

基于推理反证法的轮图集边控制问题研究

徐保根, 郑萌萌, 兰 婷

(华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要:随着控制理论的快速发展,有关图的边控制集划分问题备受人们关注。对于非空图 $G=(V,E)$, $D\subseteq E$,若 $\forall e\in E-D$,都存在 $e'\in D$,使得 e 与 e' 相邻,则可称 D 为图 G 的一个边控制集。 $E(G)$ 是图 G 的所有边组成的集合, $E(G)$ 所能划分成的互不相交的边控制集的最多数目就是图 G 的集边控制数 $d'(G)$ 。主要研究了具有强对称性的轮图 W_{n+1} 的边控制集划分问题,并且通过推理反证法来寻找标号规律,最终获得了轮图 W_{n+1} 的集边控制数,从而实现了推理反证法在特殊图边控制集划分问题中的应用。

关键词:边控制集;集边控制数;图;轮图

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

Research on Set Edge Domatic Problem of Wheel Graphs Based on Deductive Reduction Method

Xu Baogen, Zheng Mengmeng, Lan Ting

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: With the rapid development of domination theory, the problem of edge domatic set partition of graphs has attracted much attention. As $G=(V,E)$, a nonempty graph, $D\subseteq E$ is said to be an edge domination set of G . If $\forall e\in E-D$, there exists an edge $e'\in D$, so that e is adjacent to e' and $E(G)$ is the set of all the edges of G . The maximum number of nonintersecting edge domination sets that can be partitioned into is the edge domatic number $d'(G)$ of graph G . The partition of edge domination set of Wheel graph W_{n+1} with strong symmetry is the main research content, and the set edge domination number of Wheel graph W_{n+1} is obtained by deductive reduction method. Accordingly, the application of deductive reduction method in edge domatic set partition of special graph is realized.

Key words: edge domination set; edge domatic number; graphs; wheel graphs

图论中的简单图可分为无向简单图和有向简单图,我们在本文中只讨论无向简单图。连接两个相同顶点的边,这种边的条数就称为边的重数,当

重数大于1时的边就称为重边。端点重合为一点的边则称为环。若一个图中每条边都无方向时,则称为无向图。当一个图没有环也没有重边且每条边都

收稿日期:2021-09-29

基金项目:国家自然科学基金(11961026);江西省高校科技落地计划项目(KJLD12067);江西省自然科学基金项目(20171BAB201009,20181BAB201002)

是无方向时则称此图为无向简单图。研究中未说明的术语和符号与邦迪等^[1-4]相同。

图论中的比较重要的内容是图的控制理论,其研究的内容也越来越广泛。赵利芬^[5],孟卓明^[6]从最小边度出发对图的边控制以及边控制集的相关参数进行了深一步的研究,得到了几类特殊图的集边控制数,其方法对于同类结构图形的参数求解具有一定的启发意义,但是不适用于具有强对称性的图。图的控制理论方面的主要研究成果被 Haynes 等^[7-9]所叙述,图的控制划分数的具体概念被 Cockayne 等^[10]所引入,图的集边控制数最早是被 Zelinka 在 1983 年所研究,在 Zelinka^[11-14]的文献中从图的最大度以及最大边度进行考虑,给出了任意图的集边控制数的最好界限,并且利用此界限及反证法从而获得了几类特殊图的集边控制数。在求解图的集边控制数时,Zelinka 运用的最好界限确实对于研究边控制集划分问题提供了很好的分析思路,但是对于具有强对称性的图,仅仅依靠这种方法只能得到强对称图的划分规律,但是无法得出具体的集边控制数,基于此现状,本文提出了一种创新的方法来弥补前人研究的不足,研究通过参考几类图的边控制集划分的方法^[15-17],然后针对具有强对称性的图研究以全新的角度对此类图的边控制集划分进行了初步探索。轮图是典型的强对称图形,对于物理,化学,计算机网络等领域的研究具有重大的理论价值与应用价值。该项研究根据轮图的强对称性按照两种不同的划分方法将轮图所有边两两划分成对应的几个集合,每个集合由两条相邻的边组成,且集合之间互不相交,根据集边控制数的定义和集合之间的对应关系来确定相等边元素的几种情况,再进行分类讨论推理,最后利用反证法进而确定了轮图的集边控制数。 $W_{n+1}=C_n \vee K_1$ (图 1)表示 $n+1$ 阶轮图。

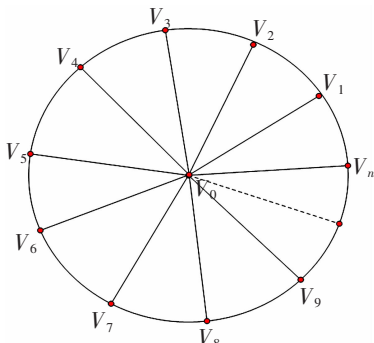


图 1 轮图

Fig.1 Wheel graphs

1 定义及引理

定义 1 设 $G=(V,E)$ 为一个非空图, $D \subseteq E$, 若对任何一条边 $\forall e \in E-D$, 都存在 $e' \in D$, 使得 e' 和 e 相邻(即有一个公共点), 则称 D 为图 G 的一个边控制集。

定义 2 对于非空图 $G=(V,E)$, 若有划分 $E = \bigcup_{i=1}^t D_i$ 使任意 $D_i (i=1, 2, \dots, t)$ 都是图 G 的边控制集, 则把这样的划分叫作图 G 一个 t -集边控制划分。把图 G 的集边控制数记作 $d(G)$, 定义

$$d'(G) = \max\{t \mid \text{存在图 } G \text{ 的 } t\text{-集边控制划分}\}$$

定义 3 设 $G=(V,E)$ 为一个图, $e \in E$, 则 $N_c(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边集, 称为 e 的边邻域, $N_c(e) = N_c(e) \cup \{e\}$ 为 e 的闭边邻域。 $d_c(e) = |N_c(e)|$ 表示 e 在 G 中的边度, $\delta_c(G) = \min d_c(e)$ 。 $N_c[e]$ 、 $N_c(e)$ 和 $d_c(e)$ 可分别简记为 $N[e]$ 、 $N(e)$ 、 $d(e)$ 。若 $e=uv \in E(G)$, 则有

$$d(e) = d(u) + d(v) - 2$$

引理 1 对于任何图 G , $\delta(G)$ 和 $\delta_c(G)$ 分别表示图 G 的最小度和最小边度, 则有

$$\delta(G) \leq d'(G) \leq \delta_c(G) + 1$$

引理 2 对于 $n+1$ 阶轮图, 则有 $\gamma'(W_{n+1}) =$

$$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor, n \geq 3.$$

2 主要结果及证明

定理 1 对于轮图 W_{n+1} , 设 $n \geq 3$ 且 n 为整数, 则有

$$d(W_{n+1}) = \begin{cases} 3, & \text{当 } n=3 \text{ 时;} \\ 4, & \text{当 } n=4, 6, 7, 9, 12 \text{ 时;} \\ 3, & \text{其他。} \end{cases}$$

证明: 令 $G=W_{n+1}$, 可记 K_1 中的点为 V_0 , 圈 C_n 上的点 $V(C_n) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $E(W_{n+1}) = \{v_0 v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ 。

易知 $\delta_c(W_{n+1}) = 4$, 由引理 1 可知 $d'(W_{n+1}) \leq 5$ 。下面分别定义 W_{n+1} 的边标号函数 f , 并将 $E(W_{n+1})$ 划分成若干个边控制集 $D_i = \{e \in E(G) \mid f(e) = i\} (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。令 $f(v_0 v_i) = y_{i-1}$, $f(v_i v_{i+1}) = x_i$, $A_i = \{x_i, y_i\}$, $B_i = \{x_i, y_{i-1}\}$, $i=1, 2, 3, \dots, n$ 。下标取模 n 最小正剩余。

若 $d'(W_{n+1}) = 5$, 则 $\{x_2, x_3, y_2\} \cup A_1 = \{x_2, x_3, y_2\} \cup B_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 $A_1 = B_4$, 以此类推可得 $A_i = B_{i+3}$,

下标取模 n 最小正剩余。易知 $N[v_2 v_3]=\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。因为 $x_1 \in A_1, A_1=B_4$, 则 $x_1 \in B_4$, 又已知 $B_4=\{x_4, y_3\}$, 所以 $x_1=x_4$ 或 y_3 。因为 $x_4 \in A_4, A_4=B_7$, 则 $x_4 \in B_7$, 又已知 $B_7=\{x_7, y_7\}$, 所以 $x_4=x_7$ 或 y_7 。因为 $y_3 \in A_3, A_3=B_6$, 则 $y_3 \in B_6$, 又已知 $B_6=\{x_6, y_5\}$, 所以 $y_3=x_6$ 或 y_5 。以此类推可以得到关于 x_1 的标号函数

递推图, 同理可以得到 x_2, x_3, y_1, y_2 的标号函数递推图, 其中 x_i 与 y_i 的标号函数递推图是相同的, 下面只展示 x_1, x_2, x_3 的标号函数递推图依次如图 2~图 4 所示。

下面分别对与 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 函数值相同的边进行分析。

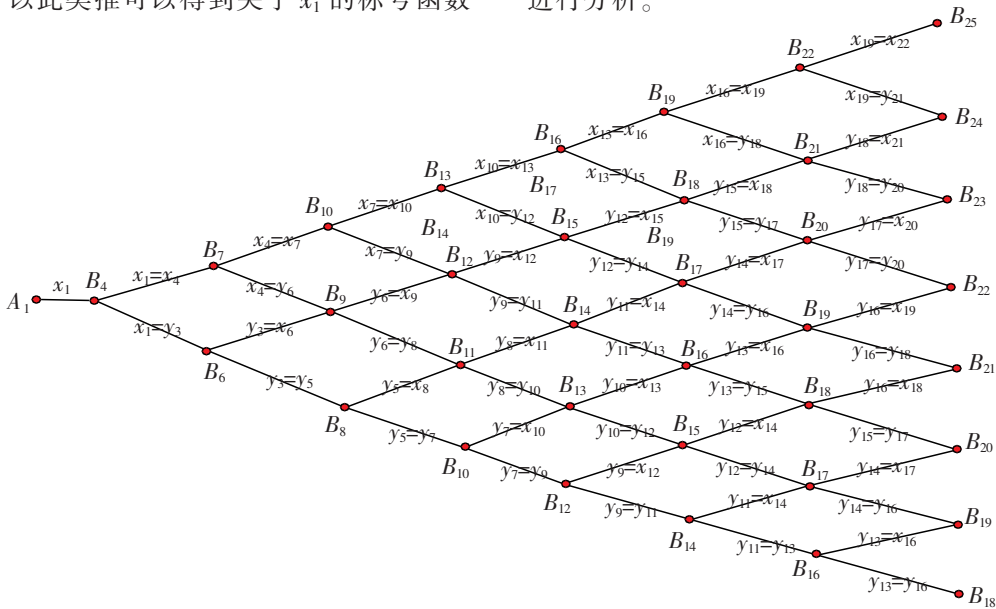


图 2 x_1 的标号函数递推图
Fig.2 Labeled function recursion graph of x_1

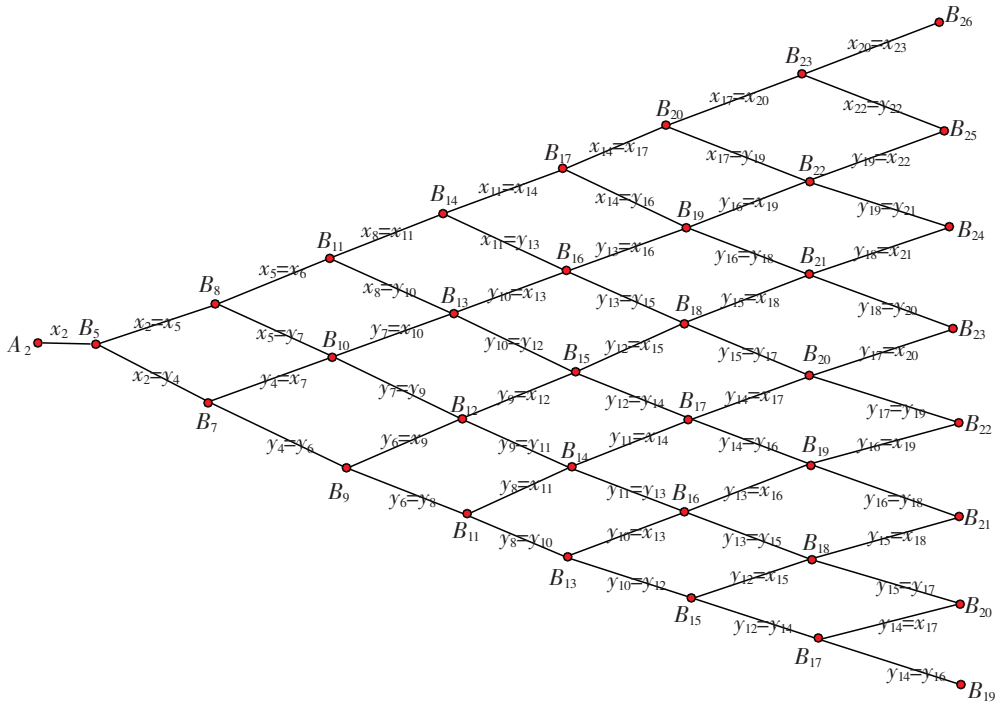
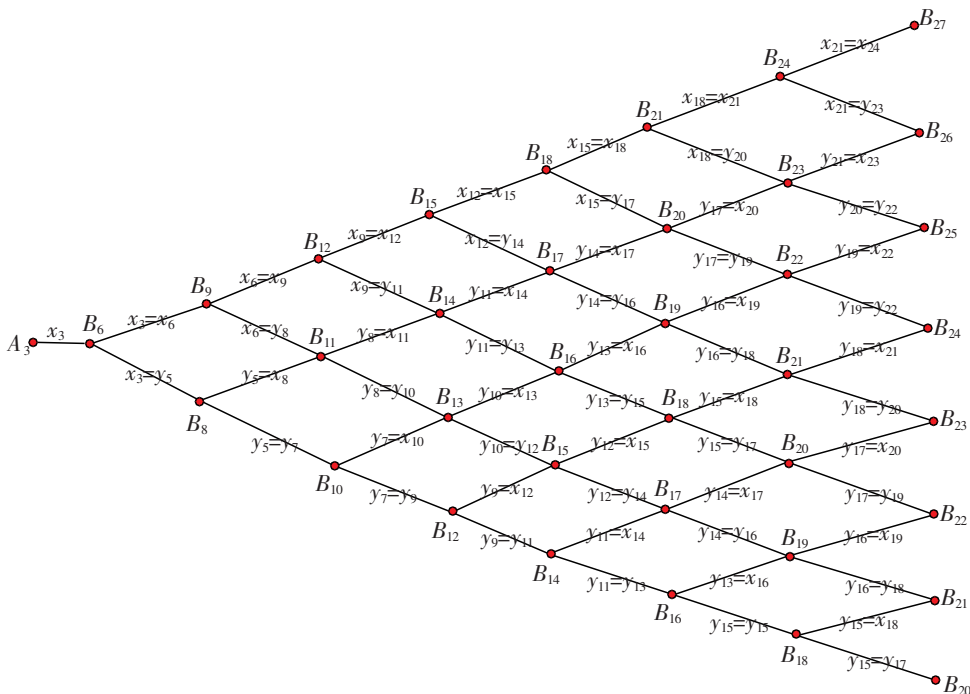


图 3 x_2 的标号函数递推图
Fig.3 Labeled function recursion graph of x_2

图 4 x_3 的标号函数递推图Fig.4 Labeled function recursion graph of x_3

1) $x_1 \in B_1, A_{n-2}=B_1$ 且 $A_{n-2}=\{x_{n-2}, y_{n-2}\}$, 所以 $x_1=y_{n-2}$ 或者 $x_1=x_{n-2}$, 又因为 B_2, B_3, B_n 中一定不含有与 x_1 函数值相同的边, 则 B_{n-1} 与 B_{n+1} , 或者 B_{n-2} 与 B_{n+1} 中一定含有与 x_1 函数值相同的边。

2) $x_2 \in B_2, A_{n-1}=B_2$ 且 $A_{n-1}=\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$, 所以 $x_2=y_{n-1}$ 或者 $x_2=x_{n-1}$, 又因为 B_1, B_3, B_4 中一定不含有与 x_2 函数值相同的边, 则 B_n 与 B_{n+2} , 或者 B_{n-1} 与 B_{n+2} 中一定含有与 x_2 函数值相同的边。

3) $x_3 \in B_3, A_n=B_3$ 且 $A_n=\{x_n, y_n\}$ $x_3=y_n$ 或者 $x_3=x_n$, 又因为 B_2, B_4, B_5 中一定不含有与 x_3 函数值相同的边, 则 B_{n+1} 与 B_{n+3} , 或者 B_n 与 B_{n+3} 中一定含有与 x_3 函数值相同的边。

4) $y_1 \in B_2, A_{n-1}=B_2$ 且 $A_{n-1}=\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$, 所以 $y_1=y_{n-1}$ 或者 $y_1=x_{n-1}$, 又因为 B_1, B_3, B_5 中一定不含有与 y_1 函数值相同的边, 则 B_n 与 B_{n+2} , 或者 B_{n-1} 与 B_{n+2} 中一定含有与 y_1 函数值相同的边。

5) $y_2 \in B_3, A_n=B_3$ 且 $A_n=\{x_n, y_n\}$ $y_2=y_n$ 或 $y_2=x_n$ 者, 又因为 B_2, B_4, B_6 , 中一定不含有与 y_2 函数值相同的边, 则 B_{n+1} 与 B_{n+3} , 或者 B_n 与 B_{n+3} 中一定含有与 y_2 函数值相同的边。

情况 1 当 $n=0(\text{mod } 6)$ 时, 令 $n=6k$ 。

子情况 1.1 当 $k=1$ 时, $n=6$ 。反证法: 假设 d'

(W_{n+1})=5, 则此时只有 B_4, B_7 中含有与 x_1 函数值相同的边, 结合 x_1 的标号函数递推图可知与 x_1 函数值相同的边只有 x_4 , 即 $\{x_1, x_4\}$ 为一个边控制集, 但此时 y_2 却不受此控制集的控制, 产生矛盾, 所以假设错误, 故 $d'(W_{n+1}) \leq 4$ 。定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_{0v_{1+2i}})=1 \\ f(v_{0v_{2+2i}})=2 \\ f(v_{2+2v_{3+2i}})=3 \\ f(v_{1+2v_{2+2i}})=4 \end{cases}$$

其中: $i=0, 1, 2$; 下标取模 n 最小正剩余。可见当 $n=6$

时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^4 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制

集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 4$ 。又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 所以当 $n=6$ 时, $d'(W_{n+1})=4$ 。

子情况 1.2 当 $k=2$ 时, $n=12$ 。反证法: 假设 $d'(W_{n+1})=5$, 则根据之前对 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的函数值的分析可知

1) $x_1=y_{10}$ 或者 $x_1=x_{10}$, 则 B_{11} 与 B_{13} , 或者 B_{10} 与 B_{13} 中一定含有与 x_1 函数值相同的边, 则与 x_1 函数值相同的边有如下几种可能:

① $x_1=y_4=y_6=y_8=y_{10}$;

② $x_1=y_3=y_6=y_8=y_{10}$;

- ③ $x_1=y_3=y_5=y_8=y_{10}$;
- ④ $x_1=y_3=y_5=y_7=y_{10}$;
- ⑤ $x_1=x_4=x_7=x_{10}$ 。

2) $x_2=y_{11}$ 或者 $x_2=x_{11}$, 则 B_{12} 与 B_{14} , 或者 B_{11} 与 B_{14} 中一定含有与 x_2 函数值相同的边, 则与 x_2 函数值相同的边有如下几种可能:

- ① $x_2=x_5=x_8=x_{11}$;
- ② $x_2=y_4=y_6=y_8=x_{11}$;
- ③ $x_2=y_4=y_6=x_9=y_{11}$;
- ④ $x_2=x_5=y_7=y_9=y_{11}$;
- ⑤ $x_2=y_4=x_7=y_9=y_{11}$ 。

3) $x_3=y_{12}$ 或者 $x_3=x_{12}$, 则 B_{13} 与 B_{15} , 或者 B_{12} 与 B_{15} 中一定含有与 x_3 函数值相同的边, 则与 x_3 函数值相同的边有如下几种可能:

- ① $x_3=x_6=x_9=x_{12}$;
- ② $y_1=y_3=y_5=y_7=y_9=y_{11}$;
- ③ $x_3=x_6=y_8=y_{10}=y_{12}$;
- ④ $x_3=y_5=x_8=y_{10}=y_{12}$;
- ⑤ $x_3=y_5=y_7=x_{10}=y_{12}$ 。

4) $y_1=y_{11}$ 或者 $y_1=x_{11}$, 则 B_{12} 与 B_{14} , 或者 B_{11} 与 B_{14} 中一定含有与 y_1 函数值相同的边, 则与 y_1 函数值相同的边有如下几种可能:

- ① $y_1=y_3=y_5=y_7=y_9=y_{11}$;
- ② $y_1=x_4=x_7=y_9=y_{11}$;
- ③ $y_1=y_3=x_6=x_9=y_{11}$;
- ④ $y_1=x_4=y_6=x_9=y_{11}$;
- ⑤ $y_1=x_4=y_6=y_8=x_{11}$;
- ⑥ $y_1=y_3=x_6=y_8=x_{11}$;
- ⑦ $y_1=y_3=y_5=y_8=x_{11}$ 。

5) $y_2=y_{12}$ 或者 $y_2=x_{12}$, 则 B_{13} 与 B_{15} , 或者 B_{12} 与 B_{15} 中一定含有与 y_2 函数值相同的边, 则与 y_2 函数值相同的边有如下几种可能:

- ① $y_2=y_4=x_7=x_{10}=y_{12}$;
- ② $y_2=y_4=x_7=y_9=x_{12}$;
- ③ $y_2=x_5=y_7=y_9=x_{12}$;
- ④ $y_2=y_4=y_6=y_8=y_{10}=y_{12}$;
- ⑤ $y_2=x_5=x_8=y_{10}=y_{12}$;
- ⑥ $y_2=x_5=y_7=x_{10}=y_{12}$;
- ⑦ $y_2=y_4=x_7=x_{10}=y_{12}$ 。

由于 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的函数值各不相同, 所以当 $n=12$ 时, 无论 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的函数值为上述 5 种可能里的哪一种组合, 最终都会产生矛盾, 所以假设

有误, 故 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_{0v_{1+2i}})=1 \\ f(v_{0v_{2+2i}})=2 \\ f(v_{2+2v_{3+2i}})=3 \\ f(v_{1+2v_{2+2i}})=4 \end{cases} \quad (2)$$

式中 $i=1, 2, 3, 4, 5$; 下标取模 n 最小正剩余。可见当 $n=12$ 时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^4 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 4$ 。又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 所以当 $n=12$ 时, $d'(W_{n+1})=4$ 。

子情况 1.3 当 $k \geq 3$ 时, 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_3v_4)=f(v_6v_7)=f(v_9v_{10})=f(v_{11}v_{12})=f(v_{13}v_{14}) \\ =f(v_{15+3i}v_{16+3i})=1, \\ f(v_2v_3)=f(v_5v_6)=f(v_8v_9)=f(v_{11}v_{12})=f(v_{14}v_{15})=2 \\ f(v_1v_2)=f(v_4v_5)=f(v_7v_8)=f(v_{10}v_{11}) \\ =f(v_{13+3i}v_{14+3i})=3 \\ f(v_{10}v_1)=f(v_{13}v_{14})=f(v_{16}v_{17})=f(v_{19}v_{20}) \\ =f(v_{22}v_{23})=f(v_{25}v_{26})=4 \\ f(v_{16}v_2)=f(v_{19}v_{20})=f(v_{22}v_{23})=f(v_{25}v_{26}) \\ =f(v_{28}v_{29})=5 \end{cases} \quad (3)$$

式中 $i=0, 1, 2, \dots, \frac{n-15}{3}$; $j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-14}{2}$; 下标

取模 n 最小正剩余。可见当 $k \geq 3$ 时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^5 D_i$,

且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 5$ 。又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 5$, 所以当 $k \geq 3$ 时, $d'(W_{n+1})=5$ 。以 $k=3$ 为例, 即 $n=18$ 时的轮图为例, 定义标号函数如图 5 所示。

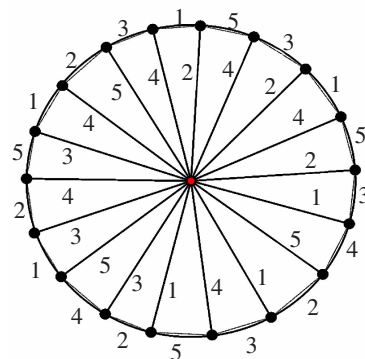


图 5 W_{19} 的标号函数
Fig.5 Labeled function of W_{19}

情况 2 当 $n=1 \pmod{6}$ 时, 令 $n=6n+1$ 。

子情况 2.1 当 $k=1$ 时, $n=7$ 。反证法: 假设, d'

(W_{n+1})=5, 则 $x_1=y_5$ 或者 $x_1=x_5$, 则 B_6 与 B_8 , 或者 B_6 与 B_8 中一定含有与 x_1 函数值相同的边。由 x_1 标号函数递推图可知, 只有 B_4, B_6 , 与 B_8 中一定含有与 x_1 函数值相同的边, 即 $x_1=y_3=y_5$ 。以此类推可知 B_4, B_7 与 B_9 中一定含有与 y_1 函数值相同的边, 即 $y_1=x_4=y_6$ 。 B_5, B_7 与 B_9 中一定含有与 x_2 函数值相同的边, 即 $x_2=y_4=y_6$ 。 则得出 $y_1=x_2$, 又 $N[v_2v_3]=\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 产生矛盾, 所以假设有误, 故 $d'(W_{n+1}) \leq 4$ 。 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0v_1)=f(v_2v_3)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=1 \\ f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=f(v_5v_6)=f(v_7v_8)=2 \\ f(v_0v_2)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=2 \\ f(v_0v_3)=f(v_4v_6)=f(v_7v_1)=4 \end{cases} \quad (4)$$

可见当 $n=7$ 时, $E(W_{n+1})=\bigcup_{i=1}^4 D_i$, 且每个 D_i 均为

W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 4$ 。 又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 所以当 $n=7$ 时, $d'(W_{n+1})=4$ 。

子情况 2.1 当 $k \geq 2$ 时, 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0v_1)=f(v_2v_3)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=f(v_{11+3i}v_{12+3i})=1 \\ f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=f(v_5v_6)=f(v_7v_8)=f(v_{10+3i}v_{11+3i})=2 \\ f(v_0v_2)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=f(v_8v_9)=f(v_{10}v_{11}) \\ =f(v_{12+3i}v_{13+3i})=3 \\ f(v_2v_3)=f(v_4v_5)=f(v_6v_7)=f(v_8v_9)=f(v_{10}v_{11})=f(v_{12+3i}v_{13+3i})=4 \\ f(v_3v_4)=f(v_5v_6)=f(v_7v_8)=f(v_9v_{10})=f(v_{13+3i}v_{14+3i})=5 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $i=0, 1, 2, \dots, \frac{n-13}{3}$; $j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-13}{2}$; 下标

取模 n 最小正剩余。可见当 $k \geq 2$ 时, $E(W_{n+1})=\bigcup_{i=1}^5 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数

定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 5$ 。 又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 5$, 所以当 $k \geq 2$ 时, $d'(W_{n+1})=5$ 。 以 $k=2$ 为例, 即 $n=13$ 时的轮图为例, 定义标号函数如图 6 所示

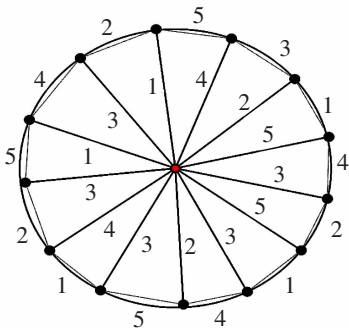


图 6 W_{14} 的标号函数

Fig.6 Labeled function of W_{14}

情况 3 当 $n \equiv 2 \pmod{6}$ 时, 令 $n=6k+2$, ($k=1, 2, 3, \dots$)。 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0v_1)=f(v_3v_4)=f(v_{6+3i}v_{7+3i})=1 \\ f(v_0v_{2+2j})=2 \\ f(v_1v_2)=f(v_4v_5)=f(v_6v_{7+2e})=3 \\ f(v_2v_3)=f(v_5v_6)=f(v_{7+3i}v_{8+3i})=4 \\ f(v_0v_3)=f(v_3v_6)=f(v_{8+3i}v_{9+3i})=5 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $i=0, 1, 2, \dots, \frac{n-8}{3}$; $j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-12}{2}$; $e=0, 1, 2, \dots, \frac{n-8}{2}$; 下标取模 n 最小正剩余。可见当

$n \equiv 2 \pmod{6}$ 时, $E(W_{n+1})=\bigcup_{i=1}^5 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1}

的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 5$ 。 又已知 $d'(W_9) \leq 5$, 所以 $d'(W_{n+1})=5$ 。 以 $k=1$ 为例, 即 $n=8$ 时的轮图为例, 定义标号函数如图 7 所示。

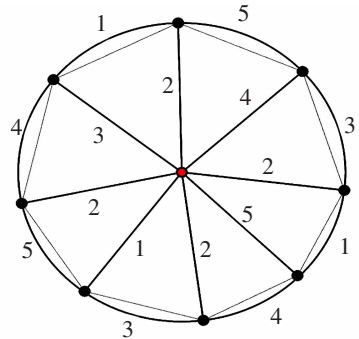


图 7 W_9 的标号函数

Fig.7 Labeled function of W_9

情况 4 当 $n \equiv 3 \pmod{6}$ 时, 令 $n=6k+3$ 。

子情况 4.1 当 $k=0$ 时, $n=3$ 。 反证法: 假设 $d'(W_{n+1})=5$, 则 $N[v_1v_2]=N[v_2v_3]=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 又因为 $N[v_1v_2]=\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_3\}$, $N[v_2v_3]=\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_3\}$, 所以 $y_2=y_3$, 已知 y_2 与 y_3 都属于 $N[v_1v_2]$, 又因为当 $d'(W_{n+1})=5$ 时, 轮图的每个闭邻域内的元素都各不相同, 产生矛盾。 所以假设有误, 故 $d'(W_{n+1}) \leq 4$ 。

假设 $d'(W_{n+1})=4$, 即 $E(W_{n+1})=D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, 且 D_i ($i=1, 2, 3, 4$) 均为图 W_{n+1} 的边控制集, 则必存在某个 D_i , 使

$$|D_i| \leq \frac{E(W_{n+1})}{4} = \frac{3}{2} \quad (7)$$

即

$$|D_i| \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \quad (8)$$

由图 W_{n+1} 的边控制数的定义知, $\gamma'(W_{n+1})=\min$

$|D_i| \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$, 由引理 2 知, $\gamma'(W_{n+1}) = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 2$, 但是 $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor$, 即存在某个 D_i , 使得 $|D_i| < \gamma'(W_{n+1})$, 产生矛盾, 所以假设错误, 故 $d'(W_{n+1}) \leq 3$ 。定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0 v_3) = f(v_1 v_2) = 1 \\ f(v_0 v_1) = f(v_2 v_3) = 2 \\ f(v_0 v_2) = f(v_1 v_3) = 3 \end{cases} \quad (9)$$

可见 $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^3 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数的定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 3$ 。又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 3$, 所以当 $n=3$ 时, $d'(W_{n+1})=3$ 。

子情况 4.2 当 $k=1$ 时, $n=9$ 。反证法: 假设 $d'(W_{n+1})=5$, 则根据之前对 x_1, x_2, x_3, y_1, y_3 的函数值的分析可知。

1) $x_1=y_7$ 或者 $x_1=x_7$, 则 B_8 与 B_{10} , 或者 B_7 与 B_{10} 中一定含有与 x_1 函数值相同的边, 即 $x_1=y_3=y_5=y_7$ 或者 $x_1=x_4=x_7$ 。

2) $x_2=y_8$ 或者 $x_2=x_8$, 则 B_9 与 B_{11} , 或者 B_8 与 B_{11} 中一定含有与 x_2 函数值相同的边, 即 $x_2=y_4=y_6=y_8$ 或者 $x_2=x_5=x_8$ 。

3) $x_3=y_9$ 或者 $x_3=x_9$, 则 B_{10} 与 B_{12} , 或者 B_9 与 B_{12} 中一定含有与 x_3 函数值相同的边, 即 $x_3=y_5=y_7=y_9$ 或者 $x_3=x_6=x_9$ 。

4) $y_1=y_8$ 或者 $y_1=x_8$, 则 B_9 与 B_{11} , 或者 B_8 与 B_{11} 中一定含有与 y_1 函数值相同的边, 即 $y_1=y_3=x_6=y_8$ 或者 $y_1=x_4=y_6=y_8$ 或者 $y_1=y_3=y_7=y_9$ 。

5) $y_2=y_9$ 或者 $y_2=x_9$, 则 B_{10} 与 B_{12} , 或者 B_9 与 B_{12} 中一定含有与 y_2 函数值相同的边, 即 $y_2=y_4=y_6=x_9$ 或者 $y_2=x_5=y_7=y_9$ 或者 $y_2=y_4=y_7=y_9$ 。

由于 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的函数值各不相同, 所以当 $n=9$ 时, 无论 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 的函数值为上述五种可能里的哪一种组合, 最终都会产生矛盾, 所以假设错误, 故 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0 v_{3+2i}) = f(v_0 v_1) = f(v_{n-1} v_n) = 1 \\ f(v_0 v_{2+2i}) = f(v_n v_1) = f(v_{n-2} v_{n-1}) = 2 \\ f(v_{1+2i} v_{2+2i}) = f(v_0 v_{n-1}) = 3 \\ f(v_0 v_n) = f(v_{2+3i} v_{3+2i}) = 4 \end{cases} \quad (10)$$

式中: $i=0, 1, 2$ 。可见当 $n=9$ 时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^4 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可

知 $d'(W_{n+1}) \geq 4$ 。又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 所以当 $n=9$ 时, $d'(W_{n+1})=4$ 。

子情况 4.3 当 $k \geq 2$ 时。定义标号函数 f 如下:

$$\begin{cases} f(v_0 v_1) = f(v_3 v_4) = f(v_0 v_6) = f(v_8 v_9) \\ \quad = f(v_0 v_{11}) = f(v_{13+3i} v_{14+3i}) = 1 \\ f(v_1 v_2) = f(v_0 v_4) = f(v_6 v_7) = f(v_0 v_9) \\ \quad = f(v_{11} v_{12}) = f(v_0 v_{14+2j}) = 2 \\ f(v_0 v_2) = f(v_4 v_5) = f(v_0 v_7) = f(v_9 v_{10}) \\ \quad = f(v_0 v_{12}) = f(v_{14+3i} v_{15+3i}) = 3 \\ f(v_2 v_3) = f(v_0 v_5) = f(v_7 v_8) = f(v_0 v_{10}) \\ \quad = f(v_{12} v_{13}) = f(v_0 v_{15+2j}) = 4 \\ f(v_0 v_3) = f(v_5 v_6) = f(v_0 v_8) = f(v_{10} v_{11}) \\ \quad = f(v_0 v_{13}) = f(v_{15+3i} v_{16+3i}) = 5 \end{cases} \quad (11)$$

式中: $i=0, 1, 2, \dots, \frac{n-15}{3}; j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-15}{2}$; 下标

取模 n 最小正剩余。可见当 $k \geq 2$ 时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^5 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 5$ 。又已知 $d'(W_n) \leq 5$, 所以 $d'(W_{n+1})=5$ 。以 $k=2$ 为例, 即 $n=15$ 时的轮图为例, 定义标号函数如图 8 所示。

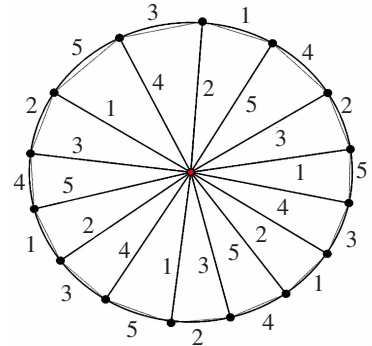


图 8 W_{16} 的标号函数

Fig.8 Labeled function of W_{16}

情况 5 当 $n \equiv 4 \pmod{6}$ 时, 令 $n=6k+4$ 。

子情况 5.1 当 $k=0$ 时, $n=4$ 。则有 $N[v_1 v_2] = \{x_1, x_2, x_4, y_1, y_4\}$, $N[v_1 v_4] = \{x_1, x_3, x_4, y_3, y_4\}$ 。反证法: 假设 $d'(W_{n+1})=5$, 则对于任意的 $e \in E(W_{n+1})$, 都有 $N[e] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 但又因为 $A_1=B_4$, 即 $\{x_1, y_1\} = \{x_4, y_3\}$, 所以 $y_3=x_1$ 或 $y_3=y_1$ 。又因为 $y_3, x_1 \in N[v_1 v_4]$, 所以 $y_3 \neq x_1$, 故只有 $y_3=y_1$ 。又由于 $N[v_1 v_2] = N[v_1 v_4]$, 即 $\{x_1, x_2, x_4, y_1, y_4\} = \{x_1, x_3, x_4, y_3, y_4\}$, 所以 $x_2=x_3$, 但是 $x_2, x_3 \in N[v_2 v_3]$, 当 $d'(W_{n+1})=5$ 时, 轮图的每个闭边邻域内的元素都各不相同; 因此 $x_2 \neq x_3$, 产生矛盾, 所以假设错误, 故

$d'(W_{n+1}) \leq 4$ 。定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0 v_3) = f(v_1 v_2) = 1 \\ f(v_0 v_4) = f(v_2 v_3) = 2 \\ f(v_0 v_1) = f(v_3 v_4) = 3 \\ f(v_0 v_2) = f(v_4 v_1) = 4 \end{cases} \quad (12)$$

可见 $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^4 D_i$, 且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边

控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 4$ 。又已知 $d'(W_{n+1}) \leq 4$, 所以当 $n=4$ 时, $d'(W_{n+1})=4$ 。

子情况 5.2 当 $k \geq 1$ 时定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0 v_1) = f(v_0 v_3) = f(v_5 v_6) = f(v_{8+3i} v_{9+3i}) = 1 \\ f(v_3 v_4) = f(v_0 v_6) = f(v_0 v_8) = f(v_{10+3i} v_{11+3i}) = 2 \\ f(v_1 v_2) = f(v_0 v_4) = f(v_6 v_7) = f(v_0 v_{9+2j}) = 3 \\ f(v_2 v_3) = f(v_0 v_5) = f(v_0 v_7) = f(v_{9+3i} v_{10+3i}) = 4 \\ f(v_0 v_2) = f(v_4 v_5) = f(v_7 v_8) = f(v_0 v_{10+2j}) = 5 \end{cases} \quad (13)$$

其中 $i=0, 1, 2, \dots, \frac{n-10}{3}$, $j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-10}{2}$, 下标取模 n 最小正剩余, 可见当 $k \geq 1$ 时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^5 D_i$,

且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 5$ 。又已知 $d'(W_9) \leq 5$, 所以 $d'(W_{n+1})=5$ 。以 $k=1$ 为例, 即 $n=10$ 时的轮图为例, 定义标号函数如图 9 所示

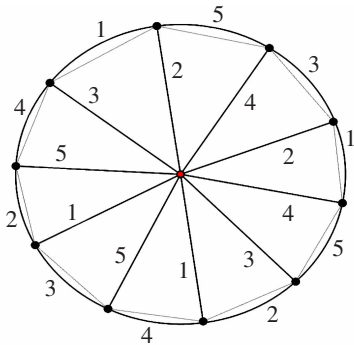


图 9 W_{11} 的标号函数

Fig.9 Labeled function of W_{11}

情况 6 当 $n \equiv 5 \pmod{6}$ 时, 令 $n=6k+5$ 。 ($k=0, 1, 2, \dots$) 定义标号函数 f 如下

$$\begin{cases} f(v_0 v_1) = f(v_3 v_4) = f(v_{6+3i} v_{7+3i}) = 1 \\ f(v_1 v_2) = f(v_0 v_4) = f(v_0 v_{6+2j}) = 2 \\ f(v_0 v_2) = f(v_4 v_5) = f(v_0 v_{7+2j}) = 3 \\ f(v_2 v_3) = f(v_0 v_5) = f(v_{7+3i} v_{8+3i}) = 4 \\ f(v_0 v_3) = f(v_5 v_6) = f(v_{8+3i} v_{9+3i}) = 5 \end{cases} \quad (14)$$

式中: $i=0, 1, 2, \dots, \frac{n-8}{3}$; $j=0, 1, 2, \dots, \frac{n-7}{2}$; 下标取

模 n 最小正剩余。可见当 $k \geq 0$ 时, $E(W_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^5 D_i$,

且每个 D_i 均为 W_{n+1} 的边控制集, 由集边控制数定义可知 $d'(W_{n+1}) \geq 5$ 。又已知 $d'(W_9) \leq 5$, 所以 $d'(W_{n+1})=5$ 。以 $k=1$ 为例, 即 $n=11$ 时的轮图为例, 定义标号函数如图 10 所示。

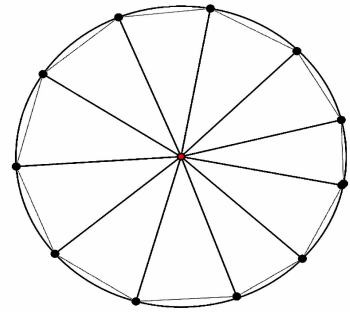


图 10 W_{11} 的标号函数

Fig.10 Labeled function of W_{11}

定理证毕。

3 结论

轮图作为一类具有强对称性的复合图类, 有着极其重要的理论研究价值和应用价值。

本研究的主要结果是利用归纳递推法确定了具有强对称性图的边控制划分数, 获得了轮图 W_{n+1} 的集边控制数, 此方法也可以用来探索其他具有对称性图类的边控制集划分问题, 对于图的控制领域也具有较好的应用前景。

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY V S R. Graph theory with application [M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.
- [2] 张先迪, 李正良. 图论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
ZHANG X D, LI Z L. Graph theory and its applications[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005.
- [3] 徐保根, 图的控制与染色理论[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2013.
XU B G. Theory of domination and coloring in graphs[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2013.
- [4] 徐保根. 图的控制参数[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2021.

- XU B G. Parameters of domination in graphs[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Tecnology Press, 2021.
- [5] 赵利芬. 关于图的控制集划分[D]. 南昌: 华东交通大学, 2015.
- ZHAO L F. On the partitions of the dominating set in graphs[D]. Nanchang: East China Jiaotong University, 2015.
- [6] 孟卓明. 关于图的集控制数[D]. 南昌: 华东交通大学, 2019.
- MENG Z M. Domatic numbers of graphs[D]. Nanchang: East China Jiaotong University, 2019.
- [7] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in graph[M]. Marcel Dekker Inc, 1998.
- [8] DUBAR J E, HEDETNIEMI S T, HENNING M A. Signed domination in graphs[M]. New York: John Wiley Inc, 1995.
- [9] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, HENNING M A. Fundamentals of domination in graphs[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1998.
- [10] COCKAYNE E J, HEDETNIEMI S T. Towards a theory of domination in graphs[J]. Networks, 1977(7): 247–261.
- [11] ZELINKA B. Edge-domatic number of graph[J]. Czech Math, 1983, 33: 107–110.
- [12] ZELINKA B. Total edge-domatic number of graph[J]. Math Bohe, 1989, 116: 96–100.
- [13] ZELINKA B. Some remarks on domatic numbers of graphs [J]. Casop Pest Mat, 1982, 106: 373–375.
- [14] ZELINKA B. Adomatic and idiomatic numbers of graphs [J]. Math Slovaca, 1983, 33: 99–103.
- [15] 徐保根, 孟卓明, 张婷婷. 扇形图和广义扇形图的边控制集划分[J]. 华东交通大学学报, 2018, 35(2): 89–93.
- XU B G, MENG Z M, ZHANG T T. Edge domination set partition of sector and generalized sector[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2018, 35(2): 89–93.
- [16] 徐保根, 邹妍, 赵丽鑫. 两类图的边控制集划分[J]. 安徽大学学报, 2016, 40(4): 1–5.
- XU B G, ZOU Y, ZHAO L X. Edge domination set partition of two kinds of graphs[J]. Journal of Anhui University, 2016, 40(4): 1–5.
- [17] 赵利芬, 徐保根, 操叶龙. 几类图的边控制划分[J]. 宜春学院学报, 2013, 35(9): 12–14.
- ZHAO L F, XU B G, CAO Y L. Edge domination partition for several classes of graphs[J]. Journal of Yichun College, 2013, 35(9): 12–14.
- [18] LI X J, XU J M. The signed edge-domatic number of a graph[J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29(6): 1881–1890.
- [19] VOLKMANN L, ZELINKA B. Signed domatic number of a graph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 150(1): 261–267.
- [20] VOLKMANN L. Bounds on signed domatic number[J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24(2): 196–198.
- [21] VOLKMANN L. Some remarks on the signed domatic number of graphs with small minimum degree[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(8): 1166–1169.
- [22] ATAPOUR M, SHEIKHOLESLAMI S M, GHAMESHLOU A N, et al. Signed star domatic number of a graph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(3): 213–218.
- [23] VOLKMANN L. On the signed total roman domination and domatic numbers of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 214: 179–186.
- [24] FAVARON O, SHEIKHOLESLAMI S M, VOLKMANN L. Signed k -domatic numbers of graphs[J]. Ars Comb, 2015, 123: 169–184.
- [25] VOLKMANN L. Upper bounds on the signed total domatic number of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2011, 159(8): 832–837.
- [26] VOLKMANN L. Signed total (j, k) -domatic numbers of graphs[J]. Australasian Journal Combinatorics, 2013, 57: 39–48.



第一作者: 徐保根(1963—), 男, 华东交通大学首席教授, 硕士研究生导师, 研究方向为图论及其应用与组合数学。E-mail: Baogenxu@163.com。

(责任编辑: 姜红贵)