

线性系统分析的特殊函数响应法

杜 庆 萱

(西南交通大学教授、华东交通大学兼职教授)

摘 要

从信号分解的观点来分析线性系统,则无论是时域分析法还是频域分析法均可看成为某种特殊函数的响应方法。与脉冲函数响应法和阶跃函数响应法相比较,在作者提出的门函数响应法中,由于输入函数分解得出的基本信号分量相互不存在时间延迟,线性系统的零状态响应可表示为一般积分形式,从而简化了计算。

目前线性系统分析所习用的时域求解方法是响应分解法。在响应分解法中,将系统对输入量的总响应分为由于系统初始状态,亦即系统初始能量储存所引起的响应和由于输入量在系统中所引起的响应两部份,即所谓零输入响应与零状态响应。这种响应分解方法的优点在于将初始能量储存在系统中的响应与输入量引起的响应分开后,我们就可以针对输入激励来进行分析研究其对系统的作用。不同输入量对系统作用所引起的响应仅零状态响应有所不同而已。

根据上述响应分解原则,并利用线性定常系统具有的迭加性与时不变性,可将输入函数看成为一系列特殊函数的迭加和,而用系统对此种特殊函数的响应作为系统的固有属性来描述表征线性系统,并从而导出输入激励与零状态响应之间的关系式。这就是特殊函数响应法的基本设想。作为特殊函数响应法中选用的特殊函数,在数学上要求公式运算方便,而在物理性质上则要求其响应易于通过实验进行测定。有关文献提出的特殊函数大致有单位脉冲函数、单位阶跃函数、单位门函数以及广义指数函数等。现将应用这些特殊函数求解线性系统响应的方法分别简述于后。

(一) 单位脉冲函数响应法

在单位脉冲函数响应法中,输入函数 $x(t)$ 可以表示为一系列宽度为 Δt 、时间逐渐延迟的窄脉冲之和,为图 1 所示。

图中 $t = n\Delta t$ 时用阴影线表示的第 n 个窄脉冲的高度为 $x(n\Delta t)$, 脉冲的面积(冲量)为 $x(n\Delta t)$ 。在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限情况下,此窄脉冲可以被视为强度为 $x(n\Delta t)$ 、时间延迟 $n\Delta t$ 的单位脉冲函数 $x(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t)$ 。

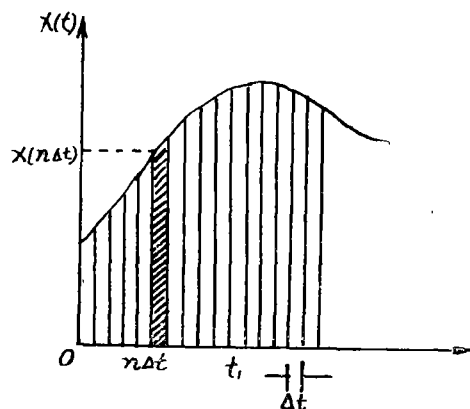


图 1

本文系作者于1984年5月来我校讲学的讲稿

设系统的单位脉冲函数响应为 $h(t)$ ，即

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

根据线性定常系统的时不变性，第 n 个窄脉冲所引起的响应将是

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[x(n\Delta t) \Delta t \right] h(t - n\Delta t)$$

系统在 $t = t_1$ 时刻由于第 n 个窄脉冲的响应为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[x(n\Delta t) \Delta t \right] h(t_1 - n\Delta t)$$

系统在 $t = t_1$ 时刻的总响应 $y(t_1)$ 将为各个窄脉冲响应之和。

$$y(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \left[x(n\Delta t) \Delta t \right] h(t_1 - n\Delta t)$$

对物理现实的输入激励和其脉冲响应来说，由于所有在 $t = t_1$ 之后的脉冲对 $t = t_1$ 时刻的系统响应将不起作用，故上面的和式将从 $n\Delta t = 0$ 到 $n\Delta t = t_1$ 范围内进行。

$$y(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n\Delta t=0}^{n\Delta t=t_1} x(n\Delta t) h(t_1 - n\Delta t) \Delta t$$

在极限情况下， $\Delta t \rightarrow 0$ ，离散和变成积分

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} x(t) h(t_1 - t) dt$$

将积分变量 t 改为 τ ，则

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} x(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau$$

于是零状态线性系统在任何时刻的响应可表示为如下形式〔1〕

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) \quad (1)$$

这里应当指出，就是因为输入函数 $x(t)$ 被分解为一系列时间上逐渐延后的脉冲分量，所以系统的零状态响应变成输入函数 $x(t)$ 与单位脉冲函数响应 $h(t)$ 之卷积积分。此即为产生卷积积分关系之根本原因。

(二) 单位阶跃函数响应法

在单位阶跃函数响应法中，输入激励 $x(t)$ 可用一系列时间逐渐延后 Δt 的阶跃函数来逼近，如图2所示。

图中 $t = n\Delta t$ 时用阴影线表示的第 n 个阶跃函数，其高度为 Δx ，故可表示为如下形式

$$\Delta x u(t - n\Delta t) = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \Delta t u(t - n\Delta t)$$

设系统的单位阶跃函数响应为 $j(t)$ ，即
 $u(t) \rightarrow j(t)$

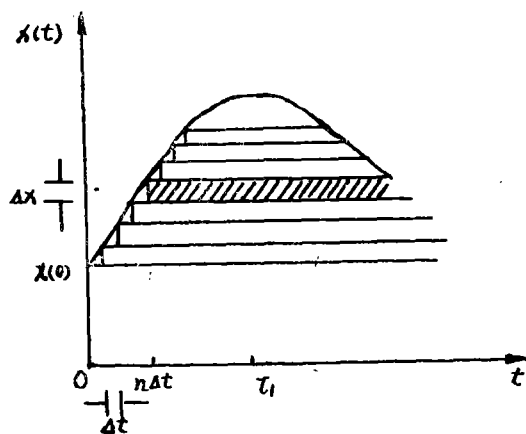


图2

根据线性定常系统的时不变性, 第 n 个阶跃函数所引起的响应

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \Delta t \cdot j(t - n\Delta t)$$

于是系统在 $t = t_1$ 时刻由于第 n 个阶跃函数的响应为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] \Delta t \cdot j(t_1 - n\Delta t)$$

系统在 $t = t_1$ 时刻的总响应 $y(t_1)$ 应是所有各阶跃函数响应之和(参阅图2)

$$y(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n\Delta t=0}^{n\Delta t=t_1} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] j(t_1 - n\Delta t) \Delta t + x(0) j(t_1)$$

在极限情况下, $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 变成 $\frac{dx}{dt} = x'(t)$, 而离散和变成积分,

$$y(t_1) = x(0) j(t_1) + \int_0^{t_1} x'(t) j(t_1 - t) dt$$

将积分变量 t 改为 τ , 则

$$y(t_1) = x(0) j(t_1) + \int_0^{t_1} x'(\tau) j(t_1 - \tau) d\tau$$

系统在任何时刻的零状态响应则表示为如下形式〔2〕〔3〕,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(0) j(t) + \int_0^t x'(\tau) j(t - \tau) d\tau \\ &= x(0) j(t) + x'(t) * j(t) \end{aligned} \quad (2)$$

此处同样必须指出, 输入信号 $x(t)$ 由于被分解为一系列时间上逐渐延后的阶跃分量, 所以系统的零状态响应也必然成为输入函数 $x(t)$ 的导数与单位阶跃函数响应 $j(t)$ 的卷积积分。

(三) 单位门函数响应法〔4〕

随着变流技术与计算机控制的迅速发展, 在系统分析时, 经常会遇到一些由矩形脉冲函数分量所组成的输入信号。为了简化计算, 作者于1980年提出门函数响应法, 将单位门函数作为一种特殊函数用以进行线性系统响应的分析。单位门函数 $e_T(t)$ 定义为一个矩形脉冲函数, 脉冲的高度为1、脉冲宽度(持续时间)为 T , 其图形如图3所示。

单位门函数 $e_T(t)$ 可用数学式表示如下:

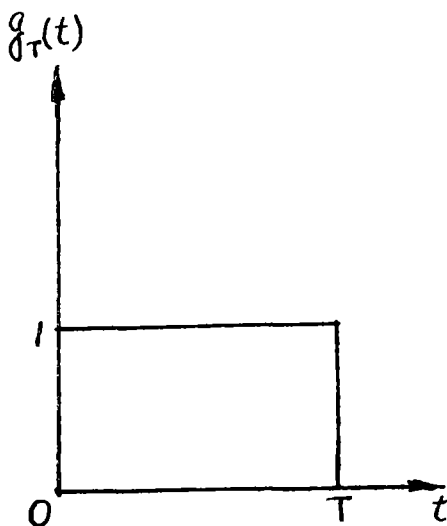


图3

$$g_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & t < 0 \text{ 及 } t > T \end{cases}$$

当用单位阶跃函数 $u(t)$ 来表示时, 单位门函数 $g_T(t)$ 则可写成

$$g_T(t) = u(t) - u(t - T)$$

这里有两点必须予以说明: (1) 在此法中, 门函数的脉冲宽度 T 将作为连续时间变量来处理, 也就是说, 单位门函数 $g_T(t)$ 实际上是一个幅值为1, 宽度可以改变的矩形脉冲。

(2) 单位门函数 $g_T(t)$ 是规定从 $t=0$ 瞬刻开始的一个矩形脉冲。

在单位门函数响应法中, 输入函数 $x(t)$ 可以被看成是一系列宽度 T 在变化的门函数的代数之和, 如图4所示。

任取某一瞬刻 t_1 。在此瞬刻, 反函数 $x^{-1}(t_1)$ 表示为

$$x_1^{-1}(t_1) = \sum_{T=0}^{T=t_1} \Delta x g_T(t_1)$$

$$= \sum_{T=0}^{T=t_1} \left[\frac{\Delta x}{\Delta T} \right] g_T(t_1) \Delta T$$

而函数 $x(t_1)$ 则是高度为 $x(t_1)$ 宽度为 t_1 的门函数及反函数 $x^{-1}(t_1)$ 之差, 可以表示为

$$x(t_1) = x(t_1) g_{t_1}(t_1) - \sum_{T=0}^{T=t_1} \left(\frac{\Delta x}{\Delta T} \right) g_T(t_1) \Delta T$$

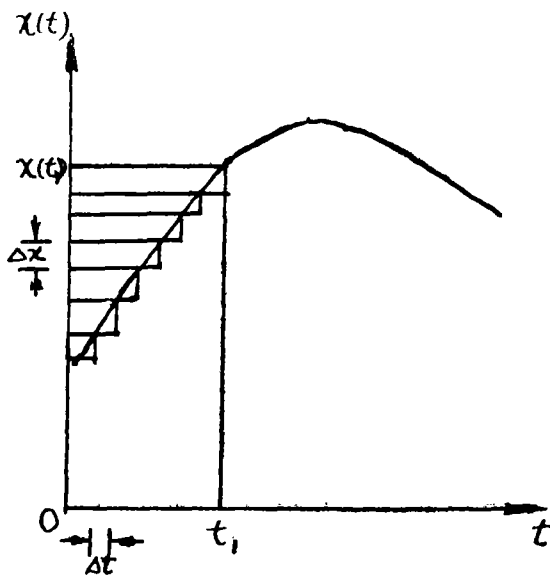


图4

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta T} \right) g_T(t_1) \Delta T$$

设系统的单位门函数响应为 $\rho_T(t)$ 即

$$g_T(t) \rightarrow \rho_T(t)$$

根据线性系统的迭加性, 系统在 $t=t_1$ 瞬刻的总响应 $y(t_1)$ 应为各门函数响应之迭加和,

$$y(t_1) = x(t_1) \rho_{t_1}(t_1) - \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{T=0}^{T=t_1} \left(\frac{\Delta x}{\Delta T} \right) \rho_T(t_1) \Delta T$$

在极限情况下, $\Delta T \rightarrow 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta T}$ 变成 $\frac{dx}{dT} x'(T)$, 而

$$y(t_1) = x(t_1) \rho_{t_1}(t_1) - \int_0^{t_1} x'(T) \rho_T(t_1) dT$$

在上面的积分式中, t_1 为固定参量, 而门函数的宽度 T 则是时间变量, 故系统在任意瞬

刻的零状态响应可以写成

$$y(t) = x(t) \rho_T(t) - \int_0^t x'(T) \rho_T(t) dT \quad (8)$$

将上式与单位脉冲函数响应法和单位阶跃函数响应法的相应计算公式比较,可以看出,由于门函数定义从 $t=0$ 瞬刻开始,输入函数 $x(t)$ 的各个门函数分量相互之间没有时间上的延后关系,因此所得的积分计算公式避免了卷积积分运算。

(四) 广义指数函数响应法

众所周知,在应用拉普拉斯变换的频域分析中,任意有因函数 $f(t)$ 均存在着拉普拉斯变换对的关系。因此对于任意输入函数 $x(t)$ 来说,当然也可以写出如下变换关系。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

于是输入激励 $x(t)$ 可以看作是一系列频谱密度为 $x(s)$ 的广义指数函数 e^{st} 沿着 $\sigma-j\infty$ 到 $\sigma+j\infty$ 的积分路线的连续和。

如果选用广义指数函数 e^{st} 作为响应法中的一种特特函数,那么只要先求出系统对广义指数函数 e^{st} 的响应,然后利用线性系统的迭加性即可写出系统对任意输入函数 $x(t)$ 的零状态响应。广义指数函数具有非常奇特的性质。设系统的传递函数为 $H(s)$,则系统对广义指数函数 e^{st} 的响应为 $H(s) e^{st}$,也即

$$e^{st} \rightarrow H(s) e^{st}$$

因此系统对输入函数 $x(t)$ 的零状态响应可以表示为〔1〕

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s) X(s) e^{st} ds \\ &= L^{-1} [X(s) H(s)] \end{aligned} \quad (4)$$

当 $s = \sigma + j\omega$ 的实数部分 $\sigma = 0$ 时,则 $s = j\omega$ 而广义指数函数 e^{st} 变为指数函数 $e^{j\omega t}$ 。用相同的推理,可以得出

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{而 } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

输入函数 $x(t)$ 可以看作是一系列频谱密度为 $X(j\omega)$ 的指数函数 $e^{j\omega t}$ 沿着 ω 轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分路线的连续和。而系统对输入量 $x(t)$ 的零状态响应相应可表示为

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= f^{-1} [H(j\omega) X(j\omega)] \end{aligned} \quad (5)$$

综合上述分析,可以得出如下结论:

(1) 以信号分析的观点来研究问题, 则无论是线性系统分析中的时域分析法, 还是频域分析法, 均可看成为特殊函数响应法, 只是其所选用的基本信号不同而已。就其实质而言, 各种响应法都可统一纳入时域分析法的范畴。

(2) 在单位脉冲函数响应法与单位阶跃函数响应法中, 由于输入函数 $x(t)$ 分解得出的基本信号分量相互之间存在时间延迟, 因之根据线性定常系统的时不变性而求得的零状态响应必然表示为卷积积分的形式, 此项结论从图1与图2均可清楚得到说明。

(3) 在单位门函数响应法与广义指数函数响应法中, 由于输入函数 $x(t)$ 分解得出的基本信号分量相互之间均不存在时间延迟关系, 因之根据线性系统迭加性而得出的零状态响应将表示为一般积分形式。这一点更进一步说明了作者在文献[4]中所指出的单位门函数响应法可将卷积积分转变为一般积分式的结论。

(4) 在一些输入信号 $x(t)$ 可以明显地分解为门函数的组合情况下, 利用门函数响应法来求解系统的零状态响应只需考虑各门函数响应的迭加和, 从而可以大大简化计算。

(5) 如果采用频域分析相似的方法来研究, 则单位门函数响应法将任意输入函数 $x(t)$ 看成是一系列宽谱密度为 $x'(T) = x'(t)$ 的门函数沿着 T 轴从 0 到 t 的积分路线的连续和。付里叶变换与拉普拉斯变换将系统的输入量从时间域转换到频率域, 而门函数响应法则将系统的输入量从时间域转换到门宽域(所谓门宽域, 即 T 域, 实质上可解释为具有另一含义的时间域)。因之就信号变换而言, 这种从时域到门宽域的变换不妨称之为杜氏变换。若用符号 ϑ 表示杜氏变换, 用符号 ϑ^{-1} 表示杜氏反变换于是可写出下面的杜氏变换对,

$$X(T)\vartheta = [x(t)] = \begin{cases} x(T) & -x'(T) \\ T=t, & T=0 \sim t \end{cases}$$

$$x(t) = \vartheta^{-1}[X(T)] = x(t)g_T(t) - \int_0^t x'(T)g_T(t)dT$$

杜氏变换指出, 信号 $x(t)$ 的宽谱密度 $X(T)$ 是由宽度为 $T=t$, 密度为 $x(T) = x(t)$ 以及宽度 T 由 $0 \sim t$, 密度相应为 $-x'(T) = -x'(t)$ 的诸元素组成的集合。

与频率特性及传递函数相似, 单位门函数响应 $\rho_T(t)$ 也可作为线性系统的一项固有属性, 用来描述线性系统。与阶跃函数响应法中的裴阿梅积分相对应, 本文中门函数响应法的计算公式(3)亦不妨称为杜氏积分。

最后还须指出, 本文所列系统响应的各种表达式均系根据单输入单输出系统导出, 只需略加改变, 即可扩展用于多输入多输出线性系统的响应计算。

参 考 文 献

- [1] B.P.Lathi, Signals, Systems and Controls, Intext Educational publishers, 1974.
- [2] R.A.Gabel & R.A.Roberts, Signals and Linear Systems, John Wiley & Sons, Inc, 1973.
- [3] D.K.Cheng, Analysis of Linear Systems, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1959.
- [4] 杜庆贵, 线性系统分析的门函数响应法, 西南交通大学学报1982年第2期。