

平面机构动态分析法及C.A.A的研究

章 华 鑫

(机 械 工 程 系)

摘 要

本文参照拓扑学网络理论,利用微分方程和达伦伯——拉格朗日原理,提出了对平面机构运动分析和动力分析中数学模型的简化方法。该方法非常适用于微型计算机,并易于获得计算结果。特别对多闭环复杂机构,其效果更为显著。

一、前 言

现代机械的发展方向是高速重载和自动化,为了保证在高速条件下,自动机的各构件能准确无误地完成各项配合运动,使机械系统具有优良的动态特性,必须研究机械系统在动态条件下的运动精度和输出特性的优化,这就是机构动态分析的目的。应用经典的图解法,已不可能完成上述繁重的任务,因此,现代机构动态分析必须建立在解析法的基础上,借助于电子计算机作辅助分析(C.A.A)*,才能顺利地完成任务。

应用电子计算机解决机构动态分析问题,最关键的一步是建立数学模型,即将机构分析问题中的问题,用数学方程式描述出来。但必须指出,由于算法语言中标准函数的限制,并不是所有的数学方程都可以直接编成源程序的;此外,还必须注意数学模型的简化,数值计算方法和计算误差的合理选择,才能保证问题正确有效地解决。

二、机构动态位移分析

关于机构的位移分析法,世界各国学者已发表了大量著作,提出了多种分析法;如果只考虑它的通用解法而不计及其计算方法的表达形式,则上述多种解法可以归纳成座标变换法和封闭矢量多边形法;如果从计算方法的表达形式来看,则机构位移分析总是和非线性方程紧密地联系在一起的。不论是采用座标变换法还是采用封闭矢量多边形法,机构位移分析的结果,都可以用一组非线性方程式来表达,其表达式为:

$$f_i(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 2L) \dots\dots (1)$$

式中: m ——机构内包含的广义座标数;

L ——组成机构的闭环数。

求解上述非线性方程组,在机构学中常采用牛顿—拉甫松(NEWTON—RAPHSON)

* C.A.A即COMPUTER Aided ANALYSIS的缩写。

本文于1984年10月15日收到

法,借助电子计算机大都可以获得需要的精确解,基本上可以认为,确定机构位置的问题,目前在理论上已完全得到解决了。不过该法计算过程较繁,不仅要用到 JACOBIAN 矩阵,而且要求在解题前预先作出初次输出矢量 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ 值的估计。因此,在推广普及解析法问题上,面临着一个如何简化数学模型和充分利用电脑功能的问题。

参照拓扑学理论,将平面机构看成由若干个独立闭环所组成,在机构运动分析过程中,对闭环内的构件,既看成是一个独立运动的单元,但又注意到相邻构件间的约束关系,一个构件的输出数据,可能是另一个构件的直接或间接的输入信息;与此相仿,对每个独立闭环,既看成是一个独立运动的单元,但又注意到相邻闭环间的约束关系,一个闭环的输出数据,可能是另一个闭环的直接或间接的输入信息。对于一个具有 F 个自由度和 S 个构件组成的闭环系统,当组成该闭环的构件的长度 L_i 和 F 个输入构件的运动规律为已知的情况下,该闭环的位移输出就是一个可求解的动态矢量,而闭环中任一构件上任意点的位移输出也是一个可求解的动态矢量。采用上述理论,不论所分析的机械系统是 II 级或 III 级机构,只要适当选择运动参考构件和广义座标,利用上述约束关系,都可以消除机构分析中的中间变量,一般都可以将 (1) 式中的 $2L$ 个非线性方程归纳成一个只含 F 个输入位移参数与输出件位移参数的非线性方程式,当 F 个位移参数为已知的条件下,该非线性方程一般为一元二次方程式,可以直接用数学公式求解。由此可知,应用上述理论作机构位移分析,可以把多自由度多闭环机构位移分析的数学模型,从求解 $2L$ 个非线性方程简化成求解一个一元二次方程;求解方法可以从牛顿—拉甫松法简化成一般代数公式,不仅理论简单易懂,而且具有下列重要意义:

- 1) 求机构位置可以不要事先作出初始输出矢量 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ 的估计值,因而可以避免由于初始输出矢量估计值选择不当而造成计算过程不易收敛的问题;
- 2) 可以不必计算 JACOBIAN 矩阵;
- 3) 由于 JACOBIAN 矩阵是精确的速度矩阵,当机构出现奇异时,它的速度行列式为零,致使牛顿—拉甫松法失效,问题没法解决;
- 4) 数学模型简化后,编制计算机源程序简便,可以节省计算机的内存和少占机时。

三、机构动态角速度和角加速度分析

用解析法求解机构中构件运动的角速度,在目前国内外文献中,大都归纳成求解下面这个矩阵方程:

$$\{A\} \{\dot{\phi}\} = \{B\} \dot{q} \dots \dots \dots (2)$$

式中: $\{A\}$ —— $2L \times m$ 矩阵,是一个仅与机构尺寸有关的已知矩阵;

$\{\dot{\phi}\} = \{\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dots, \dot{\phi}_m\}^T$ 为输出角速度列阵;

$\{B\} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}^T$ 为已知列阵,它仅与机构尺寸和原动件运动规

律有关，

$\dot{q}$ ——原动件角速度。

而求解机构中各构件输出的角加速度矢量 $\{\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \dots, \ddot{\phi}_m\}^T$ ，都归纳成求解下面这个矩阵方程：

$$[A] \{\ddot{\phi}\} = [B] \ddot{q} + [\dot{B}] \dot{q} - [\dot{A}] \{\dot{\phi}\} \dots\dots\dots (3)$$

对于单环机构，矩阵 $[A]$ 是个 2×2 方阵，应用矩阵理论求解 (2) 或 (3) 比较容易，但是对于多闭环机构，矩阵 $[A]$ 就是一个 $2L \times m$ 矩阵，求解 (2) 或 (3) 式就不那么容易。要想把一个高阶矩阵方程的解输入主程序，就必须调用一个很长的专用子程序，不但编制源程序困难，而且会占用计算机相当多的内存量和运算机时。因此，在机构 C. A. A 法研究中，对上述角速度和角加速度的数学模型，仍存在一个如何简化的问题。

对于一个具有 F 个自由度， S 个构件和 n 个闭环组成的平面低副机构来说，当 F 个输入件运动规律为已知时，选定运动参考构件和广义座标后，应用上述位移分析法就可以求出机构的广义座标的动态变化矢量 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ ，在这个基础上，进行角速度和角加速度分析，只需对各封闭环的封闭矢量方程式进行一次和二次微分，然后应用座标旋转法，就可以求出各构件的角速度和角加速度的函数表达式。将各构件的广义座标分别代入该表达式，就能算出各构件的运动角速度和角加速度。上述解法，可以将机构分析中构件角速度和角加速度的数学模型，从高阶矩阵方程简化成若干个函数表达式，然后利用电子计算机作迭代运算。两种解法相比较，显然函数表达式迭代法较解高阶矩阵方程要简便得多。

四、机构动态动力分析

机构动态动力分析的目的，从力学观点来看，无非是按照工作阻力的动态变化去确定原动件上阻力或阻力矩的动态特性曲线；或者是在给定的动态驱动力或力矩作用下，去确定工作件所能克服工作阻力的动态特性曲线。从设计的观点来看，则要求计算出各运动副中的约束反力，以便进行零件强度的设计，选择合适的轴承型号和确定各轴承的润滑方式。

用解析法进行机构的动力分析，也有各种不同的方法。如果仅从力学观点去求原动件阻力矩的动态特性曲线或求解工作阻力的动态特性曲线，那末，采用达朗伯—拉格朗日原理更为方便有利。根据该原理，对任何具有 M 个可动构件和 F 个自由度的机构，它的一般力平衡方程组为：

$$Q_j = \sum_{i=1}^M (X_i U_i + Y_i V_i + M_i \Omega_i) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

式中： $j = 1, 2, \dots, F$ ，
 U_i, V_i ——速度系数，
 Ω_i ——角速度系数，
 X_i, Y_i ——作用于 i 点上的力分量，
 M_i ——作用在 i 点上的力偶。

只要作用力满足上述F个线性方程，该机构就处于平衡状态。对于单自由度机构，即F=1时，上式简化成：

$$Q = \sum_{i=1}^M (X_i U_i + Y_i V_i + M_i \omega_i) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

由此可见，应用上述原理求解机构的输出特性曲线，可以不出现构件间接点的反力，因而平衡方程组内的方程数目，可以明显地减少。

如果对一个机构进行动力分析时，不仅要分析出机构输出件的动态特性曲线，而且要求出各运动副内反力的动态曲线，那么，就必须对上述原理作一扩充，即将机构内的构件折成自由体，再将上述原理应用于每一个自由体，写出各该自由体在平衡状态下的三个平衡方程（ $\Sigma F_x = 0$ ， $\Sigma F_y = 0$ ， $\Sigma M = 0$ ）。对于一个具有F个自由度M个可动构件和 P_L 个低副组成的非奇异低副机构来说，可以写出3M个平衡方程，其中包含有 $2P_L$ 个接点反力，不过这3M个平衡方程并非都是独立的，因为在这些平衡方程中，出现的作用力和F个平衡方程有关。所以，系统的独立平衡方程总数为3M—F个，其中仍包含有 $2P_L$ 个接点反力在内。

根据GRUEBLER判据，非奇异低副机构的自由度数为：

$$F = 3M - 2P_L \dots \dots \dots (5)$$

因而系统平衡的独立方程数恰好与接点反力数目相匹配，上述独立方程组具有唯一的一组解。

由于所有接点反力在3M个力平衡方程中均呈线性关系，所以，机构动力分析问题，在国内外文献中，都归纳成一个矩阵方程，其一般形式为：

$$[A] \{R\} = -[B] \{H\} \dots \dots \dots (6)$$

式中：[A]—3M×3M矩阵，是一个与机构尺寸及位置有关的未知力系数矩阵；
[B]—3M×(2 P_L +1)矩阵，也是与机构尺寸和位置有关的已知力系数矩阵；
{R}—未知力列矩阵；
{H}—已知力列矩阵。

用上述矩阵方程作机构动态动力分析的数学模型，必然要遇到高阶矩阵方程的求解问题，在C.A.A中，仍然存在着上述编制源程序困难等问题。

为了克服上述困难，适应C.A.A要求，建议采用矢量力学迭代法求解，该法的特点是数学模型简单，能充分发挥电子计算机高速迭代运算的功能。该法的理论基础在于，对不包含复合运动副的平面机构来说，上述折副后得到的3M个方程中，一般都是成对出现的，几乎没有同时求解两个以上方程的可能性。同时还基于求解上述成对方程时，具有如下规律：对于动力机械系统，可以先从原动件与相邻构件间的运动副求解，其反力 R_x 和 R_y 可以从相邻两构件的 $\Sigma M = 0$ 方程联立求解，然后进行迭代运算，求出其他各运动副中的反力；对于工作机械系统，则应先从工作件与相邻构件间的运动副开始求解。这种分析方法，可以将机构动力分析中的数学模型，从高阶矩阵方程简化成2×2矩阵方程，从而取得编制、调试源程序方便，节省计算机内存和少占机时等目的。

五、实 例

已知四杆机构中各杆长度为 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 ，机架AD与X轴的交角为 β_4 ，各杆和机架的质量为 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 ，各质心距运动副A、B、C、D的距离为 L_5 、 L_6 、 L_7 、 L_8 ，各质心与各杆中心线的夹角为 β_5 、 β_6 、 β_7 、 β_8 。设原动件的角位移为 $\beta_1(I)$ ，角速度为 ω_1 ，角加速度为 ϵ_1 ，杆3上受到 T_0 的工作阻力矩，试用C.A.A法求：

- 1) 构件2、3的角位移动态变化 $[\beta_2(I), \beta_3(I)]$ ；
- 2) 构件2、3的角速度动态变化 $[\dot{\beta}_2(I), \dot{\beta}_3(I)]$ ；
- 3) 构件2、3的角加速度动态变化 $[\ddot{\beta}_2(I), \ddot{\beta}_3(I)]$ ；
- 4) 运动副A、B、C、D中反力的动态变化 $[R_1(I), R_2(I), R_3(I), R_4(I)]$ ；
- 5) 主动件平衡力偶矩的动态变化 $[T_9(I)]$ 。

a) 机构运动简图(附后)

b) 输入参数：

$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \omega_1, \epsilon_1, m_1, m_2, m_3, m_4, J_1, J_2, J_3, T_0, \beta_1(I)$

符号意义：

L_1, L_2, L_3, L_4 ，——构件长度尺寸；

L_5, L_6, L_7, L_8 ，——构件质量中心至运动副的距离；

β_4 ——机架倾角；

$\beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$ ，——质心与构件中心线间的夹角；

ω_1 ——原动件的角速度；

ϵ_1 ——原动件的角加速度；

$m_i (i=1, 2, 3, 4)$ ——构件的质量；

$J_i (i=1, 2, 3)$ ——构件的转动惯量；

T_0 ——工作阻力矩；

$\beta_1(I)$ ——主动件的角位移量。

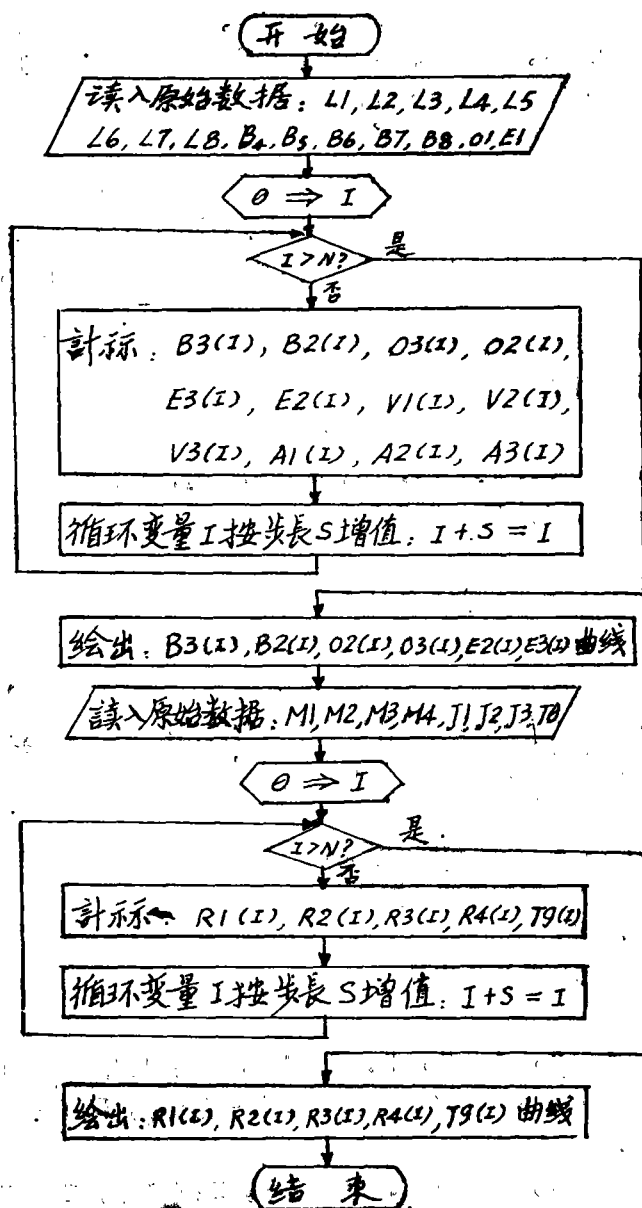
c) 输入数据：

7, 9, 11, 4, 3, 4, 5, 2, 0, 15°, 30°, 15°, 100, 0, 1.5, 2, 3, 9, 10, 12, 15000, 0—360°(每隔10°输出一组数据, 即 $I=0 \sim 36$)

d) 输出动态参数：

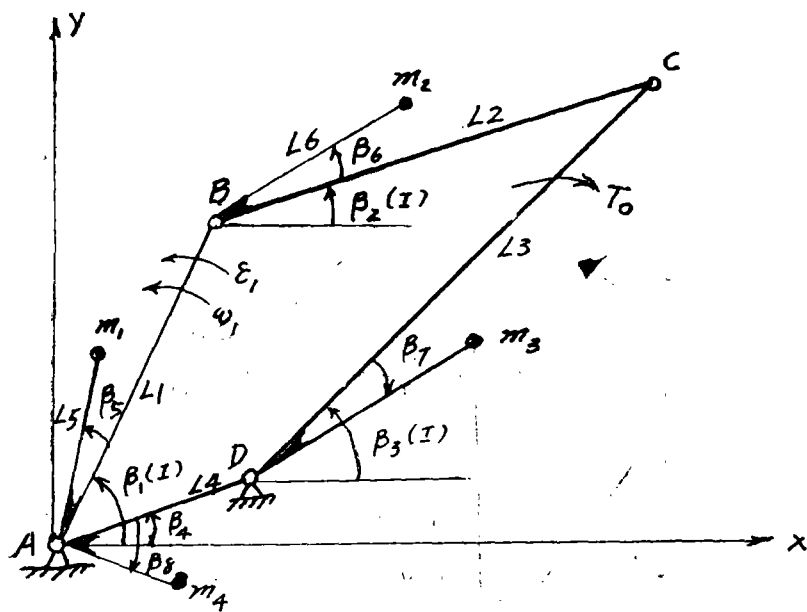
$\beta_2(I), \beta_3(I), \dot{\beta}_2(I), \dot{\beta}_3(I), \ddot{\beta}_2(I), \ddot{\beta}_3(I), R_1(I), R_2(I), R_3(I), R_4(I), T_9(I)$

e) 电标流程框图

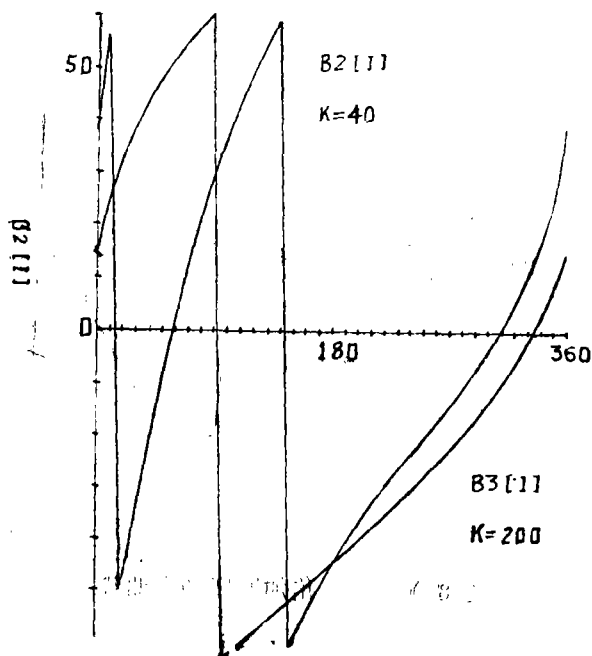


f) 源程序 (略)

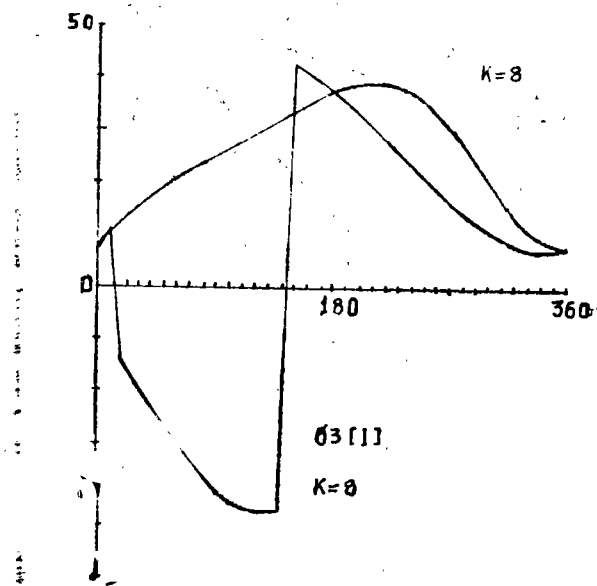
g) 输出动态特性曲线及分析



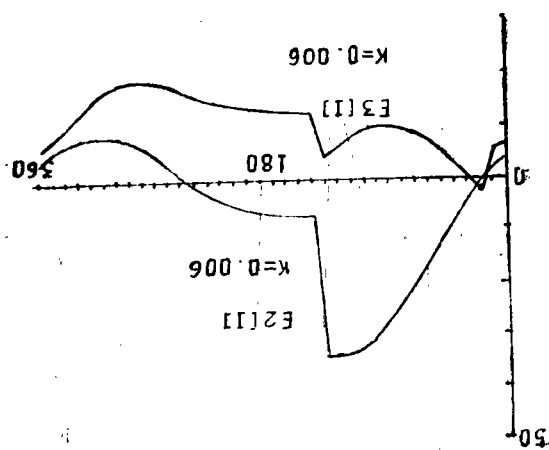
机械运动简图



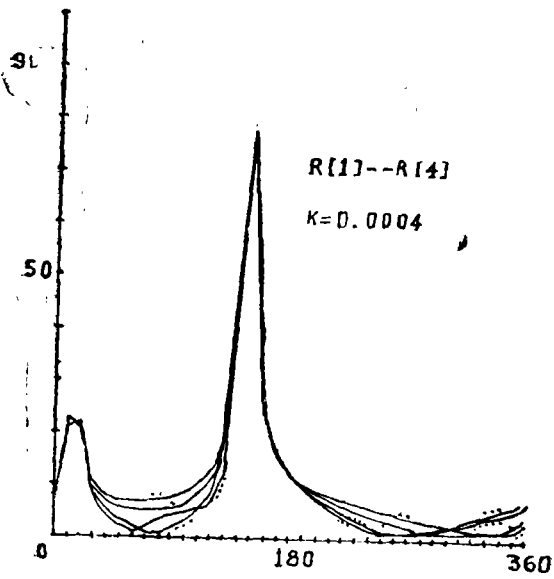
(1) 角位移动态曲线



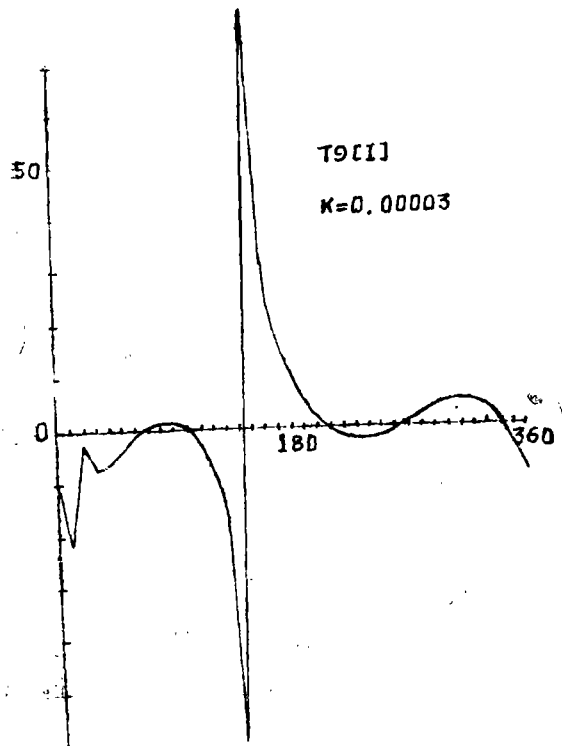
(2) 角速度动态曲线



(3) 角加速度动态曲线



(4) 轴承反力动态曲线



(5) 主动件平衡阻力矩动态特性曲线

从轴承反力的动态曲线和原动件阻力矩的动态特性曲线可以明显地看出,原动件位于 140° — 160° 范围内,其阻力矩突然增大,于此同时各轴承内的反力也突然增高。该机构的运转不均匀系数相当大,将出现较大的速度波动,应采取平衡措施或其他改变参数的办法来改善机构的输出特性。

六、结 论

1)应用本文提出的C.A.A法时上述实例进行分析的过程中,数学模型全部简化成函数表达式。数学上只遇到一元二次方程式和二元联立方程组,没有出现任何高阶矩阵方程。

2)上述实例如采用目前国内文献中提出的矩阵方程分析法,则位移分析中将同时求解两个非线性方程;角速度和角加速度分析中将各求解一个 2×2 矩阵方程;动力分析中将求解一个 9×9 的矩阵方程。对于多闭环的复杂机构,采用本文提出的C.A.A法,其效果更佳。

3)在C.A.A法研究过程中,由于充分地利用了机构分析中的内在规律,尽可能地简化机构分析中的数学模型,做到人脑与电脑功能的综合开发,因而,不论在源程序的编制、调试,还是计算结果的获得,都比较简便,为微机在机构分析中的应用和推广开辟了一条捷径,为教学和科研提供了新的途径。

本文实例源程序编制过程中,曾得到马立英、连禹生两同志的帮助,特此致谢。

主 要 参 考 文 献

- 1.天津大学主编,“机械原理”,人民教育出版社,1979。
- 2.机械学译文集编写组,“机构学译文集”,机械工业出版社,1982。
- 3.西南交通大学,机械原理教学小组编,“用解析法进行平面连杆机构的分析与综合教材的更新与实践”,1982。
- 4.〔日〕牧野洋著,“自动机械机构学”,科学出版社,1980。
- 5.BURTON PAUL:“KINEMATICS AND DYNAMICS OF PLANER MACHINERY” PRENTICE-HALL, INC.ENGLEWOOD CLIFFS, NEW JERSEY 07632.1979。
- 6.HAMILTON H. MABIE,“MECHANISM AND DYNAMICS OF MACHINERY”, JOHN WILEY & SONS, INC. 1978。
- 7.J.E.SHIGLEY,“THEORY OF MACHINES AND MACHANISMS”, MCGRAM—HILL BOOK COMPANY, 1979。
- 8.中国科学院沈阳计算技术研究所等编,“电子计算机常用算法”,科学出版社,1979。
- 9.杨麓引等编,“电子计算机应用数学”,冶金工业出版社,1979。