

整数规划可行解的分布函数及随机试验法

周 承 高

(科研生产处)

规划论中求解整数规划问题最常用的方法有分枝定界法和割平面法,这两种方法都只能求解线性的整数规划问题。用微型计算机及绘图仪,对整数规划可行解的分布函数进行分析,可用随机试验法来求解整数规划问题。采用所介绍的随机试验法不仅编程简单,在建立数学模型上更符合实际问题,而且可求解线性或非线性整数规划问题。

一、可行解的分布函数

用计算机绘图来求可行解的分布函数计算量是很大的,本文讨论的目的在于说明整数规划的随机试验法。把整数规划问题可行解所对应的目标函数值作为被统计量,用图解法求其分布函数。在TRS—80微机上编程计算,并用与该机联机的FWX—4675型多笔数字化绘图仪自动绘图。编程步骤如下:

1. 搜索全部可行解并找出目标函数的最大值 (BIG) 和最小值 (LIT)。

2. 在 (BIG, LIT) 区间内等分分组, 组距为 D , $D = \frac{BIG - LIT}{2K}$, K 根据具体情况

确定。

3. 计算全部可行解的目标函数值, 确定其所在的分区间, 记下每个分区间上目标函数的个数。

4. 计算各个分区间中目标函数出现的频率。

5. 利用绘图机绘图, 得到整数规划可行解所对应的目标函数的分布密度。

整数规划目标函数 $P = X_1 + X_2 + X_3$ 在 $0 \leq X_i \leq 10$, $i = 1, 2, 3$ 时, 其可行解的目标函数值的分布函数如图 1 所示。

整数规划目标函数 $P = 0.01X_1^2 + 2X_2$ 在满足约束

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 50 \\ 3X_1 + X_2 \leq 120 \\ 0 \leq X_i \leq 50 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

时目标函数值的分布函数如图2所示。

本文于1984年10月26日收到

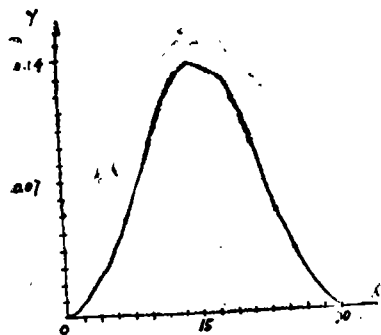


图 1

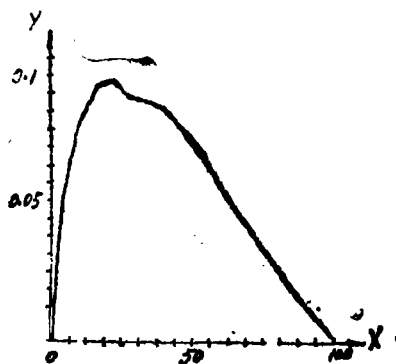


图 2

从概率的统计定义可知，目标函数值在各分区间的频率近似等于概率，分布曲线下的面积为1。

通过对很多整数规划目标函数分布函数图形的绘制，从未出现过如图3所示的具有孤立极点的情况。将其图形可抽象地绘成如图4所示。

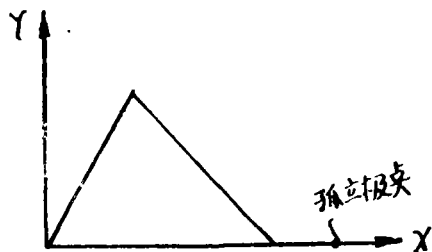


图3

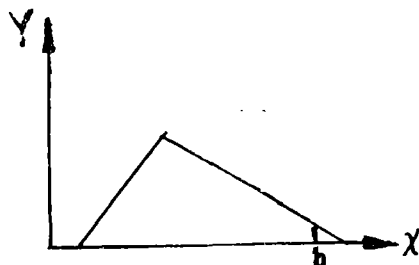


图 4

设求目标函数的最大值为最优解，那么最优解在曲线的最右端。设b点右边曲线下的面积为1%，左边为99%，那么在10000个随机抽样中至少有一个目标函数值出现在b点右边的概率为：

$$P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(10000)$$

即为 $1 - P(0)$ ， $P(0)$ 为没有一个目标函数值出现在b点右边的概率

$$1 - P(0) = 1 - 0.99^{10000} = 0.9999561$$

其概率近似等于1，故总有一个接近最优解的目标函数值处于1%的区域。我们在编制程序中，这种值只要出现一次就可以保存下来，直到程序结束。

二、整数规划的随机试验法

在BASIC语言中，有随机函数 $RND(X)$ ，当 $X=0$ 时，该函数的函数值为0.000001—0.999999范围内的随机数。 $INT(X)$ 为取整函数，其函数值为不大于X的最大整数。当 $X=0$ 时，每执行一次 $INT(RND(X) * 100)$ 将完全随机地产生0，1，2，……99整数。

一添而言,要产生0, 1, 2, ……M随机整数,就可 用 $\text{INT}(\text{RND}(X) * (M+1))$ 来完成。

对数学模型为

$$\text{Max}.f(x) \quad x \in E^n$$

约束 $g_i(x) (\geq, =, \leq) b_i \quad i=1, 2, \dots, m$ 的整数规划, $f(x), g_i(x)$ 可以是线性或非线性函数, 其随机试验法步骤如下

(1) 根据实际问题确定每个变量 X_i 的变化区间 $[a_i, b_i] \quad i=1, 2, \dots, n$ 计算机所能表示的最小数 $\Rightarrow B$, 变量的随机抽样组数 $\Rightarrow \text{MAX}$ 。

(2) 随机取每组变量值 $a_i + \text{INT}(\text{RND}(x) * (b_i - a_i + 1))$, $i=1, 2, \dots, n$ 。

(3) 检查是否满足 $g_i(x) (\geq, =, \leq) b_i, i=1, 2, \dots, m$ 。若不满足则(5), 若满足则(4)

(4) 计算 $f(x)$ 值, 若 $f(x) > B$ 则 $f(x) \Rightarrow B, X_i \Rightarrow A_i \quad i=1, 2, \dots, n$, 转向(5), 否则(5)。

(5) $I+1 \Rightarrow I$, 若 $I > \text{MAX}$ 则(6), 否则(2)。

(6) 输出 $A_i, i=1, 2, \dots, n$ 和 B 的值。

(7) 结束。

如果求 $\text{Min}f(x)$, 则仅修改(1), 将计算机所能表示的最大数 $\Rightarrow B$ 。修改(4), 若 $f(x) < B$ 则 $X_i \Rightarrow A_i, f(x) \Rightarrow B \quad i=1, 2, \dots, n$ 即可。

三、应用实例

例1、生产计划问题。某工厂生产甲、乙两种产品, 市场调查表明价格——数量关系分别为:

$$P_1 = -0.2X_1 + 950$$

$$P_2 = -0.15X_2 + 1200$$

X_1, X_2 为产品甲、乙生产量, P_1, P_2 为产品甲、乙的单位价格。甲、乙产品的生产成本每件为50、55元。生产甲、乙产品可分别减免税收1000、1500元。每生产一件产品分别需要10、12小时, 现共有40000小时可利用, 问怎样安排生产可获得最大利润 P 。

数学模型为

$$\begin{aligned} \text{Max} P = & (-0.2X_1 + 950)X_1 - 50X_1 + 1000Y_1 \\ & + (-0.15X_2 + 1200)X_2 - 55X_2 + 1500Y_2 \end{aligned}$$

$$\text{约束} \quad \begin{cases} 10X_1 + 12X_2 \leq 40000 \\ X_i \geq 0 \quad i=1, 2 \end{cases}$$

并且 $X_1 > 0$ 时 $Y_1 = 1, X_1 = 0$ 时 $Y_1 = 0$ 。

$X_2 > 0$ 时 $Y_2 = 1, X_2 = 0$ 时 $Y_2 = 0$ 。

由 $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ 和 $10X_1 + 12X_2 \leq 40000$ 可知

X_1 的变化范围为0—4000

X_2 的变化范围为0—3333

利用随机试验法编制BASIC程序如下:

程序运行结果表明应安排生产产品甲 1206 件、产品乙 2327 件,可获得最大利润 2.65×10^6 元。

```
3  REM PLANNING PROBLEM
5  REM MAXIMIZE PROFIT
10 X = 0
20 B = -999999
30 FOR I = 1 TO 10000
35 PRINT I
40 X1 = INT(RND(X) * 40001)
50 X2 = INT(RND(X) * 3334)
60 IF 10 * X1 + 12 * X2 > 40000 THEN 190
70 P = 0
80 IF X1 > 0 THEN 100
90 GOTO 110
10 P = P + 1000
11 IF X2 > 0 THEN 120
115 GOTO 125
120 P = P + 1500
125 P1 = -0.2 * X1[2 + 950 * X1
130 P2 = -0.15 * X2[2 + 1200 * X2
135 P = P + P1 + P2
136 P = P - 50 * X1 - 55 * X2
140 IF P > B THEN 160
150 GOTO 190
160 A1 = X1
170 A2 = X2
180 B = P
190 NEXT I
200 LPRINT "X1 = ", A1, "X2 = ", A2
210 LPRINT "MAX.PROFIT P = ", B
220 END
```

X1 = 1206 X2 = 2327
MAX.PROFIT P = 2.64919E+06

例2、配料问题。某茶厂生产甲、乙、丙三级茶叶，每斤售价分别为5，4.2和3.5元，其加工固定费用分别为150，90，80元。这三级茶叶是由A、B、C三种原茶配成，甲级茶由50% C，30%B，20%A混合加工而成，乙级茶至少由60%的B和C混合加工而成，丙级茶至少由30%的A加工而成。A、B、C三种原茶单价分别为2.5，2.75和2.95元，现分别有3000，2500和2000斤，问如何配制加工可获得最大利润。

设 X_1, X_2, X_3 分别为甲级茶中A、B、C的数量，

Y_1, Y_2, Y_3 分别为乙级茶中A、B、C的数量，

Z_1, Z_2, Z_3 分别为丙级茶中A、B、C的数量。

甲级茶可获利润：

$$\begin{aligned} P_1 &= 5(X_1 + X_2 + X_3) - 2.5X_1 - 2.75X_2 - 2.95X_3 - 150F_1 \\ &= 2.5X_1 + 2.25X_2 + 2.05X_3 - 150F_1 \end{aligned}$$

乙级茶可获利润：

$$P_2 = 1.7Y_1 + 1.45Y_2 + 1.25Y_3 - 90F_2$$

丙级茶可获利润：

$$P_3 = Z_1 + 0.75Z_2 + 0.55Z_3 - 80F_3$$

其数学模型为

$$\text{Max } P = P_1 + P_2 + P_3$$

约束

$$X_1 + Y_1 + Z_1 \leq 3000$$

$$X_2 + Y_2 + Z_2 \leq 2500$$

$$X_3 + Y_3 + Z_3 \leq 2000$$

$$0.2(X_1 + X_2 + X_3) = X_1$$

$$0.3(X_1 + X_2 + X_3) = X_2$$

$$0.5(X_1 + X_2 + X_3) = X_3$$

$$Y_2 + Y_3 \geq 0.6(Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

$$Z_1 \geq 0.3(Z_1 + Z_2 + Z_3)$$

$$X_i \geq 0, Y_i \geq 0, Z_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

并且： $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ 时 $F_1 = 0$ 否则 $F_1 = 1$

$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$ 时 $F_2 = 0$ 否则 $F_2 = 1$

$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ 时 $F_3 = 0$ 否则 $F_3 = 1$

分析等式约束条件，经过整理得：

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 3X_1 - 7X_2 + 3X_3 = 0 \\ -4X_1 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

经过初等变换化简得

$$\begin{cases} X_1 - 0.4X_3 = 0 \\ X_2 - 0.6X_3 = 0 \end{cases}$$

由 $X_3 \geq 0, Y_3 \geq 0, Z_3 \geq 0$ 和 $X_3 + Y_3 + Z_3 \leq 2000$ 可确定 X_3 的变化范围 $0 \sim 2000$ 。 X_3 随机确定后, $X_1 = 0.4X_3$, $X_2 = 0.6X_3$ 。

由不等式约束可以确定 Y_1, Y_2, Y_3 的变化范围分别为 $0 \sim (3000 - X_1)$, $0 \sim (2500 - X_2)$, $0 \sim (2000 - X_3)$, Z_1, Z_2, Z_3 的变化范围为 $0 \sim (3000 - X_1 - Y_1)$, $0 \sim (2500 - X_2 - Y_2)$ 和 $0 \sim (2000 - X_3 - Y_3)$ 。

我们可以编BASIC程序求解。

程序运行结果表明:

790斤A, 1185斤B, 1975斤C配料加工成甲级茶

525斤A, 1150斤B, 9斤C配料加工成乙级茶

1562斤A, 115斤B, 1斤C配料加工成丙级茶

可获得最大利润12590.1元。

```

3  REM  BLENDING  PROBLEM
5  REM  MAXIMIZE  PROFIT
10 B = -999999
12 N = 0
14 X = 0
15 FOR I = 1 TO 10000
17 X3 = INT ( RND ( X ) * 2001 )
18 X1 = 0.4 * X3
19 X2 = 0.6 * X3
20 Y1 = INT ( RND ( X ) * ( 3001 - X1 ) )
21 Y2 = INT ( RND ( X ) * ( 2501 - X2 ) )
22 Y3 = INT ( RND ( X ) * ( 2001 - X3 ) )
23 Z1 = INT ( RND ( X ) * ( 3001 - X1 - Y1 ) )
24 Z2 = INT ( RND ( X ) * ( 2501 - X2 - Y2 ) )
25 Z3 = INT ( RND ( X ) * ( 2001 - X3 - Y3 ) )
30 IF Y2 + Y3 < 0.6 * ( Y1 + Y2 + Y3 ) THEN 260
35 IF Z1 < 0.3 * ( Z1 + Z2 + Z3 ) THEN 260
40 N = N + 1
41 P1 = 2.5 * X1 + 2.25 * X2 + 2.05 * X3 - 150
42 P2 = 1.7 * Y1 + 1.45 * Y2 + 1.25 * Y3 - 90
43 P3 = Z1 + 0.75 * Z2 + 0.55 * Z3 - 80
44 P = P1 + P2 + P3
45 IF X3 = 0 THEN 100
50 IF Y2 = 0 THEN 60

```

```

55 GOTO 80
60 IF Y3=0 THEN 64
62 GOTO 80
64 IF Y1=0 THEN 110
80 IF Z1=0 THEN 82
81 GOTO 140
82 IF Z2=0 THEN 84
83 GOTO 140
84 IF Z3=0 THEN 120
90 GOTO 140
100 P=P+150
105 GOTO 50
110 P=P+90
115 GOTO 80
120 P=P+80
140 IF P>B THEN 160
150 GOTO 260
160 A1=X1
170 A2=X2
180 A3=X3
190 A4=Y1
200 A5=Y2
210 A6=Y3
220 A7=Z1
230 A8=Z2
240 A9=Z3
250 B=P
251 PRINT I
260 NEXT I
265 LPRINT"N=", N
270 LPRINT"X1=", A1, " X2=", A2, " X3=", A3
280 LPRINT"Y1=", A4, " Y2=", A5, " Y3=", A6
290 LPRINT"Z1=", A7, " Z2=", A8, " Z3=", A9
300 LPRINT"MAX.PROFIT P=", B
310 END

```

N = 3112

X1 = 790

X2 = 1185

X3 = 1975

$$Y1 = 525$$

$$Y2 = 1150$$

$$Y3 = 9$$

$$Z1 = 1562$$

$$Z2 = 115$$

$$Z3 = 1$$

$$\text{NAX.PROFIT } P = 12590.1$$

四、结 论

通过以上讨论,可以看出,用随机试验法求解整数规划问题,在几千到几万个随机抽样中至少有一个可行解接近真正最优解,不受过去求解方法的种种限制,可以求解线性或非线性的整数规划问题。具有编程简单、灵活、可以在微机上实现等优点。目前存在的问题是占用机时长,文中的二个例题,在TRS—80微机上需40—60分钟。对必定收敛于全局最优解还缺乏数学上的论证。有待进一步研究。

主 要 参 考 资 料

- 1.陈家鼎等编:概率统计讲义。高等教育出版社
- 2.范鸣玉等编:最优化技术基础。清华大学出版社
- 3.万耀青等编:最优化计算方法常用程序汇编。工人出版社
- 4.多笔数字化绘图仪使用说明书。福建古田电声设备厂。
- 5.TRS—80微型计算机BASIC语言与磁盘操作系统。昆明电子设备厂。
- 6.B.E.GILLETT INTRODUCTION TO OPERATION RESEARCH.
- 7.C.WILLIAM. COMPUTER OPTIMIZATION TECHNIQUES.