

差集的存在与判别法

周 尚 超

(数学教研室)

差集是编造循环BIB矩阵不可缺少的工具,循环BIB矩阵可用来构成单纯码与方块正交码。许宝騄给出差集的一个必要条件并附言:要验算一个子集是否差集,从操作量太大的角度来看,可能是一个重要问题,需要继续探索⁽¹⁾。本文给出了差集的结构,证明了若 $4n+3$ 是素数,则差集 $(4n+3, 2n+1, n)$ 和差集 $(4n+3, 2n+2, n+1)$ 存在。本文还给出了判别一个子群是否差集的简易方法。

定义1 从 v 个数的集合 $\{0, 1, 2, \dots, v-1\}$ 中选择出一个子集 $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$,使 $d_i - d_j (i \neq j)$ (模 v)这一共 $K(K-1)$ 个差数中恰有 λ 个等于 $m (m = 1, 2, \dots, v-1)$,这样的子集称为差集。记为 (v, K, λ) 。

本文中 v, K, λ 均为正整数,根据定义1,这三数满足下列关系:

$$\lambda(v-1) = K(K-1)。$$

若 v 为素数,则将集合 $\{0, 1, 2, \dots, v-1\}$ 记为 $GF(v)$,按照模 v 运算, $GF(v)$ 是 v 个元素的域。 $GF(v)$ 的乘法群记为 $G(v)$,用 H 表示 $G(v)$ 的子群。用 α 表示 v 的一个原根。这样就可将 $GF(v)$ 表达为

$$GF(v) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{v-2}\}$$

$G(v)$ 表达为

$$G(v) = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{v-2}\}$$

H 若是 $G(v)$ 的指数为 m 的子群,则

$$H = \{1, t, t^2, \dots, t^{k-1}\} \quad (t = \alpha^m)$$

$$G(v) = HU\alpha HU \dots V\alpha^{m-1}H。$$

令 A 为 $v \times v$ 矩阵:

$$A = (a_{ij})$$

其中 $a_{12} = a_{23} = \dots a_{v-1,v}, v = a_{v,1} = 1$,其余 $a_{ij} = 0$ 。

A 有性质: $A^v = A^0 = I$ 为单位矩阵。

矩阵 $A^0 + A + A^2 + \dots + A^{v-1}$ 是所有元素都是壹的矩阵。

矩阵 $A^{d_1} + A^{d_2}, \dots, A^{d_k}$ 是每行有 K 个壹, $v-K$ 个零的矩阵,其第 $i+1$ 行是第 i 行向右循环移位而得,这种矩阵叫做循环零壹矩阵。

循环零壹矩阵若任意两行的内积都为 λ ,则称为循环BIB矩阵。

例1 $v = 7, K = 3, \lambda = 1$

本文于1984年7月25日收到

$$A + A^2 + A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $A + A^2 + A^4$ 任一行有三个壹, 任两行内积为 1, 因此是循环 BIB 矩阵。

引理 1⁽¹⁾ 若 $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ 是 $\{0, 1, \dots, v-1\}$ 的子集, 则循环零壹矩阵 $A^{d_1} + A^{d_2} + \dots + A^{d_k}$ 是循环 BIB 矩阵的充分必要条件是 $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ 是差集。

由引理 1 知, 若 $K = v$, 则相应矩阵所有元素都是壹, 任两行内积为 v , 若 $K = v-1$, 则任两行内积是 $v-2$, 因此 v 和 $v-1$ 个元素的子集都是差集, 我们称这两种情况为平凡的。本文不讨论平凡情况。因此本文中的 K 与 v 有关系:

$$K < v-1。$$

根据下面的引理 2, 可仅讨论 $K \leq (v-1)/2$ 时的情形。

引理 2 令 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ 是 $\{0, 1, \dots, v-1\}$ 的子集, $D' = \{d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_v\}$ 是 D 的余集。则 D 是差集的充分必要条件是 D' 是差集。

证明 我们只要证明, 若 D 是差集, 则 D' 也是差集就行了。 $T = A^{d_1} + A^{d_2} + \dots + A^{d_k}$, $T' = A^{d_{k+1}} + A^{d_{k+2}} + \dots + A^{d_v}$, 显然, T' 是把 T 的每个壹换为零, 每个零换为壹而得的矩阵。令

$$(a_1, a_2, \dots, a_v), (b_1, c_2, \dots, b_v)$$

是 T 的任意两行, 则

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_v b_v = \lambda$$

在这 v 个和项中, 有 λ 个项 a 和 b 都是壹, 有 $2(K-\lambda)$ 个项 a 和 b 一个是壹另一个是零。其余的 $v-2(K-\lambda)-\lambda = v-2K+\lambda$ 个项 a 和 b 都是零。若把 a 和 b 的值原为壹的换为零, 原为零的换为壹, 则得到 T' 的任两行的内积为 $\lambda' = v-2K+\lambda$, 因此 T' 是循环 BIB 矩阵, 由引理 1, D' 是差集。证毕。

若 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, 用 $tD + S$ 表示集合

$$\{td_1 + S, td_2 + S, \dots, td_k + S\} \text{ (模 } v\text{)}。$$

定义 2 若 $tD = D + S$ ($t \neq 1$), 则称 t 是 D 的乘数, 或 D 以 t 为乘数。

引理 3⁽¹⁾ (推广乘子定理) 设 V, K, λ, l 满足下列条件:

- 1) l 是 $K-\lambda$ 的一个因子
- 2) $l > \lambda$
- 3) $(l, v) = 1$
- 4) 对于 l 的全体素因子 $p_1, p_2, \dots, p_s$, 存在方次数 $j_1, j_2, \dots, j_s$ 使

$$P_1 i^1 = P_2 i^2 = \dots = P_n i^n \pmod{v}$$

令 t 为4)中 $P_i i^i \pmod{u}$ 的公共值, 则任何差集 (V, K, λ) 必以 t 为它的一个乘数。

引理4 若 D 是差集, $(t, V) = 1$, 则集合 $tD + S$ 也是差集。

以下设 v 为素数。

定理1 若 $GF(V)$ 的子集 D 是差集 (V, K, λ) , $(K \leq (V-1)/2)$, 则存在 $G(V)$ 的一个子群 H , 使得

$$D^* = H \cup d_1 H \cup \dots \cup d_{m-1} H$$

或 $D^* = \{0\} \cup H \cup d_1 H \cup \dots \cup d_{m-1} H$

是差集 (V, K, λ) 。

证明 令 $l = K - \lambda$, 则 V, K, λ, l 满足引理3的条件, 因此存在乘数 $t (\neq 1)$, 使得 $tD = D + S$ 。 $t(D+m) = tD + tm = D + S + tm = D + m + S + (t-1)m$, $t-1 \neq 0$, $GF(v)$ 是域, 故可令 $m = -S(t-1)^{-1}$, 则 $S + (t-1)m = 0$, 于是 $t(D+m) = D+m$, 若 $D+m$ 中不含1, 可用 $D+m$ 中一非零元之逆元与 $D+m$ 相乘而得一含有1之集, 而其仍为差集。故可假设 $1 \in D+m$ 。

令 $D^* = D+m$, 若 $0 \notin D^*$, 由 $1 \in D^*$, $tD^* = D^*$, 得 $t \in D^*$, 继而 t 的所有方幂都在 D^* 中, 令 H 是 t 生成的 $G(v)$ 的子群, $H = \{1, t, \dots, t^{n-1}\}$, 令 $D^* = \{1, d_1, \dots, d_{k-1}\}$, 则下列 n 个集合

$$D^* = \{1, d_1, \dots, d_{k-1}\}$$

$$td^* = \{t, td_1, \dots, td_{k-1}\}$$

$\vdots$

$$t^{n-1}D^* = \{t^{n-1}, t^{n-1}d_1, \dots, t^{n-1}d_{k-1}\}$$

都是 D^* , 把它们并起来也是 D^* , 把等号右边的每一列作为一个集, 则第一列是 H , 第二列是 $d_1H, \dots$, 第 K 列是 $d_{k-1}H$, 则 D^* 又可写为

$$D^* = H \cup d_1 H \cup \dots \cup d_{k-1} H$$

设这 K 个陪集中互不相同的有 m 个, 并设前 m 个互不相同, 则

$$D^* = H \cup d_1 H \cup \dots \cup d_{m-1} H$$

若 $0 \in D^*$, 则

$$D^* = \{0\} \cup H \cup d_1 H \cup \dots \cup d_{m-1} H$$

D 是差集, 由引理4, D^* 是差集。

证毕。

例2 $G(13)$ 的子群 $H = \{1, 3, 9\}$, $H \cup \{0\}$ 是差集 $(13, 4, 1)$, $\{0, 1, 3, 9\}$ 的余集或 H 的三个陪集之并是差集 $(13, 9, 6)$ 。

例8 $H = \{1, 5, 25\}$ 是 $G(31)$ 的子群, $H \cup 11H = \{1, 5, 25, 11, 24, 27\}$ 是差集 $(31, 6, 1)$ 。 H 的另外8个陪集加上0是差集 $(31, 25, 20)$ 。

定理2 $G(V)$ 的指数为 m 的 K 阶子群 H 为差集的充分必要条件是 $K(K-1)/(V-1) = \lambda$ 是整数且 $H-1$ 中有 λ 个元素属于 $a^i H (i = 0, 1, \dots, m-1)$ 。

证明 我们首先计算 H 中任意两个元素的差:

$$t-1, t^2-1, \dots, t^{K-2}-1, t^{K-1}-1$$

$$t^2-t, t^3-t, \dots, t^{K-1}-t$$

$$t^{K-1} - t^{K-2}$$

上面第一行是 $t^i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, K-1$), 第二行是 $t^i - t$ ($i = 2, 3, \dots, K-1$), 其余类推, 这样就得到 $K(K-1)/2$ 个差数。把这些差数加上负号, 就得到另外 $\frac{1}{2}K(K-1)$ 个差数。 $t-1$ 加上负号变为 $1-t=t^K-t$, 把它放在上面第二行第 $K-1$ 列, 记为 $(1, 1) \rightarrow (2, K-1)$, 第一行第二列的 t^2-1 变为 $1-t^2=t^K-t^2$, 放到第三行, 第 $K-2$ 列, 即 $(1, 2) \rightarrow (3, K-2)$ 。一般地 $(i, j) \rightarrow (i+j, K-j)$, ($i+j \leq K$) 最后得到 H 中任意两个元素之差为下表中的 $K(K-1)$ 个差数:

$$\begin{array}{ccccccc} t-1 & t^2-1 & \dots & t^{K-2}-1 & t^{K-1}-1 & & \\ t^2-t & t^3-t & \dots & t^{K-1}-t & t^K-t & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t^K-t^{K-1} & t^{K+1}-t^{K-1} & \dots & t^{2K-3}-t^{2K-1} & t^{2K-2}-t^{K-1} & & \end{array}$$

把每一列的元素作为一个集合, 则第一列是 H 的陪集 $(t-1)H$, 第二列是 $(t^2-1)H$, ..., 第 $K-1$ 列是 $(t^{K-1}-1)H$, 我们把这 $K(K-1)$ 个差数记为:

$$(t-1)H \cup (t^2-1)H \cup \dots \cup (t^{K-1}-1)H \quad (*)$$

由于 $G(V) = H \cup aH \cup \dots \cup a^{m-1}H$

H 是差集 $\Leftrightarrow (*)$ 式的 $K(K-1)$ 个数中 $G(V)$ 的任一元素出现 λ 次

$\Leftrightarrow (*)$ 式的 $K(K-1)$ 个数中 a^iH 中任一元出现 λ 次 ($i = 0, 1, \dots, m-1$)

$\Leftrightarrow (*)$ 式的 $K-1$ 个陪集中有 λ 个与 a^iH 相同 ($i = 0, 1, m-1$)

$\Leftrightarrow H-1$ 中有 λ 个属于 a^iH ($i = 0, 1, \dots, m-1$)。 证毕。

定理 3 设 H 是 $G(V)$ 的指数为 m 的 $K-1$ 阶子群。 $H \cup \{0\}$ 是差集的充分必要条件是 $K(K-1)/(v-1)$ 是整数且 $\{H-1\} \cup \{1\} \cup \{-1\}$ 中有 λ 个属于 a^iH ($i = 0, 1, \dots, m-1$)。

定理 4 $G(V)$ 的 K 阶子群 H 若为差集, 则 K 为奇数。

证明 我们证明, 若 K 为偶数, 则 H 不是差集。设 $mK = V-1$, 则 $\lambda = K(K-1)/mK$

$= (K-1)/m$, K 为偶数, 故 λ 为奇数。 $H = \{1, t, \dots, t^{K-1}\}$, 若 $t^{\frac{K}{2}} - 1 \in a^iH$, 我们来看有几个属于 a^iH , ($j \neq 1$) 若 $t^s - 1 \in a^iH$ ($S \neq K/2$), H 是偶阶子群, 故 $-1 \in H$, $-(t^s - 1) = 1 - t^s = t^S(t^{K-S} - 1) \in a^iH$ 由于 $t^S \in H$, 故 $t^{K-S} - 1 \in a^iH$, 由 $S \neq K/2$, $t^{K-S} - 1 \neq t^s - 1$, 这样 $H-1$ 中只会是偶数个属于 a^iH , 而 λ 是奇数, 根据定理 2, H 不是差集。证毕。

引理 5 设 H 是 $G(V)$ 子群, 若 $H \cup \{0\}$ 是差集, 则 H 是奇数阶子群。

引理 设 H 是 $G(V)$ 的指数为 2^n 的 K 阶子群: $G(V) = H \cup aH \cup \dots \cup a^{2^n-1}H$, 且 $K(K-1)/(V-1)$ 是整数, 则

$$h-1 \in a^iH \Leftrightarrow h^{-1}-1 \in a^{i+n}H \quad (h \in H)$$

证明 $V-1 = 2^nK$, $\lambda = K(K-1)/2^nK = (K-1)/2^n$, $K = 2^n\lambda + 1$ 为奇数。 $a^{nK} = -1$, $a^{(K-1)n} \in H$ 。

若 $h-1 \in \alpha^i H$, 则存在 $\bar{h} \in H$, $h-1 = a^i \bar{h}$, $-(h-1) = a^{nK+i} \bar{h} = a^{(K-1)n} a^{n+i} \bar{h} = a^{n+i} h a^{(K-1)n}$ 即 $1-h = h(h^{-1}-1) = a^{n+i} \cdot a^{(K-1)n} h$, $h^{-1}-1 = a^{n+i} h'$, 这里 $h' = a^{(K-1)n} h h^{-1} \in H$. 即 $h^{-1}-1 \in a^{n+i} H$. 若 $h^{-1} \in a^{n+i} H$, 由前段 $(h^{-1})^{-1}-1 = h-1 \in a^{2n+i} H$, $a^{2n} \in H$, $h-1 \in \alpha^i H$. 证毕.

定理 6 (子群成为差集的判定定理) $G(V)$ 的指数为 $2n$ 的 K 阶子群 H 是差集的充分必要条件是 $H-1$ 中有 λ 个元素属于 $\alpha^i H$ ($i=0, 1, \dots, n-2$). 这里 $\lambda = K(K-1)/(V-1)$ 为整数.

证明 必要性由定理 2 即得. 我们证明充分性. $H-1$ 中有 λ 个属于 $\alpha^i H$ ($i=0, 1, \dots, n-2$), 根据引理 5, $H-1$ 中有 λ 个属于 $\alpha^i H$ ($i=n, n+1, \dots, 2n-2$) $H-1$ 中属于 $\alpha^{n-1} H$ 与 $a^{2n-1} H$ 中的元素个数相等, 因此 $H-1$ 中有 λ 个元素属于 $\alpha^{n-1} H$ 与 $a^{2n-1} H$, 因此 H 是差集. 证毕.

定理 7 若 $|G(V):H| = 2n$, 则 $H \cup \{0\}$ 是差集的充分必要条件是 $K(K-1)/(V-1)$ 是整数且 $\{H-1\} \cup \{-1\} \cup \{1\}$ 中有 λ 个属于 $\alpha^i H$ ($i=0, 1, \dots, n-2$). 这里 $|H| = K-1$.

在定理 6 和定理 7 中, 若 $m=1$, 则有如下肯定的结论:

定理 8 设 H 是 $G(V)$ 的指数为 2 的 K 阶子群且 $K(K-1)/(V-1)$ 为整数, 则 H 和 $H \cup \{0\}$ 都是差集.

若 $|G(V):H| = 2$, $|H| = K$, 则 $\lambda = K(K-1)/(V-1) = K(K-1)/2K = (K-1)/2$, $K = 2\lambda + 1$, $V = 4\lambda + 3$, 由此知 V 是 $4n+3$ 型素数, 而此时 $H = \{1, \alpha^2, \alpha^4, \dots, \alpha^{2(K-1)}\}$, 即 H 是素数 V 的所有平方剩余的集合. αH 也是差集, 它是 V 的所有平方非剩余的集合, 而 $H \cup \{0\}$ 恰是 αH 的余集. 据此我们可把定理 8 叙述为:

定理 8 若 V 是 $4n+3$ 型素数, 则 V 的平方剩余的集合与平方非剩余的集合都是差集 $(4n+3, 2n+1, n)$, 这些平方剩余再加上 0 是差集 $(4n+3, 2n+2, n+1)$; 这些平方非剩余加上 0 也是差集 $(4n+3, 2n+2, n+1)$.

例 4 23 是 $4n+3$ 型素数, 23 的 11 个平方剩余的集

$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$

是差集 $(23, 11, 5)$

当 $n>1$ 时, $G(V)$ 的指数为 $2n$ 的子群不一定是差集. 用定理 6 来判断指数为 4 的子群是否差集最为容易, 因此特写为下面的定理 9.

定义 3 若 h 和 $h+1$ 都属于 H , 则称 h 是 H 的对首元素

$H-1$ 中有 λ 个元素属于 H , 等价于 H 有 λ 个对首元素.

定理 9 $|G(V):H| = 4$, H 是差集的充分必要条件是 H 有 λ 个对首元素且 $K(K-1)/(V-1)$ 是整数. $H \cup \{0\}$ 是差集的充分必要条件是 H 具有 $\lambda-1$ 个对首元素且 $K(K-1)/(V-1)$ 是整数.

例 5 $V=197$, $\alpha=2$, $G(197)$ 的 49 阶子群 H (指数为 4) 由 $\alpha^4=16$ 的方幂生成

$H = \{1, 16, 59, 156, 132, 142, 105, 104, 88, 29, 70, 135, 190, 85, 178,$

90, 61, 188, 53, 60, 172, 191, 101, 40, 49, 193, 133, 158, 164, 63, 23, 171,
175, 42, 81, 114, 51, 28, 54, 76, 34, 150, 36, 182, 154, 100, 24, 187, 37 }

H的元素按16的升幂排列, 有横线者为对首元首, H有12个对首元素, H是差集(197, 49, 12)。

由例5可看出, 要验算49个元素的子集是否差集, 要计算 $49 \times 48 = 2352$ 个差数, 而用定理9进行判断, 则方便得多了。

例6 $v=229, K=57, \lambda=14, \alpha=6$ 。G(229)的57阶子群由 $\alpha^4=151$ 的方幂生成。

$H = \{ 1, 151, 130, 165, 183, 153, 203, 196, 55, 61, 51, 144, 218, 171, 173, 17, 48, 149, 57, 134, 82, 16, 126, 19, 121, 180, 158, 42, 159, 193, 60, 129, 14, 53, 217, 20, 43, 81, 94, 225, 83, 167, 27, 184, 75, 104, 132, 9, 214, 25, 111, 44, 3, 224, 161, 37, 91 \}$

H只有12个对首元素, H不是差集。

例7 $v=73, K=9, \lambda=1, a=5$ 。G(73)的9阶子群H(指数为8)由 $5^8=2$ 生成。

$H = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 55, 37, \}$

$5H = \{ 5, 10, 20, 40, 7, 14, 28, 56, 39 \}$

$25H = \{ 25, 50, 27, 54, 35, 70, 67, 61, 49 \}$

H-1中1, 7, 54分别在H, 5H, 25H中, H是差要(73, 9, 1)。

定理10 设H是G(v)的奇数阶子群, H是差集, 则有

λ 是奇数 $\Leftrightarrow 2 \in H$

证明 H是差集, H-1中有 λ 个元素在H中, 因此 $H+1 = \{ 2, t+1, \dots, t^{K-1}+1 \}$ 有 λ 个元素在H中, 若 $t^i+1 \in H$, 则 $t^{-i}(t^i+1) = t^{-i}+1 \in H$, H是奇数阶子群, $(t^i)^2 \neq$ 即 $t^i \neq t^{-i}$, 这样除2以外有偶数个属于H。因此得

λ 是奇数 $\Leftrightarrow 2 \in H$

定理11 设H是G(v)的奇数阶子群, $H \cup \{ 0 \}$ 是差集, 则有

λ 是奇数 $\Leftrightarrow 2 \notin H$

定理12 $|G(v):H| = 2n$, 若H是差集, n是形状为 $4m+2$ 或 $4m+3$ 的数, 则 λ 为偶数。

证明 $v-1 = 2nK, K(K-1)/2nK = (K-1)/2n = \lambda, K = 2n\lambda + 1, v = 4n^2\lambda + 2n + 1$ 。

$(v^2 - 1)/8 = n^2\lambda + (n+1)n/2 \pmod{2}$

若 $n = 4m + 2$, 则 $n^2\lambda + n(n+1)/2$ 是奇数, 2不是 v 的平方剩余, $2 \notin H$, 根据定理10, λ 是偶数。若 $n = 4m + 3$, λ 是奇数, 则 $n^2\lambda + n(n+1)/2$ 是奇数, $2 \notin H$, 与定理10矛盾。故 λ 为偶数。

定理13 $|G(v); H| = 2n$, $H \cup \{0\}$ 是差集, 若 $n = 4m + 2$ 或 $n = 4m + 3$, 则 λ 为奇数。

例8 $G(43)$ 的7阶子群 H 不是差集。此时 $|G(v); H| = 6 = 2 \times 3$, $n = 3$, 根据定理12, 若 H 是差集, 则 λ 为偶数, 而此时 $\lambda = 7 \times 6/42 = 1$ 。

例9, 若 $|G(v); H| = 4$, H 是差集, 则 λ 为偶数, v 的形状为 $16\lambda + 5$ 。 $\lambda = 2, 6, 12$ 时, H 都是差集, $\lambda = 14, 18$ 时, H 不是差集。上面例5和例6给出 $\lambda = 12$ 和 $\lambda = 14$ 的两例。

例10, 若 $|G(v); H| = 4$, $H \cup \{0\}$ 是差集, 根据定理13, $n = 2$, 由此知 λ 为奇数, 此时 v 是形状为 $16\lambda - 3$ 型素数。 $\lambda = 7$ 时, $H \cup \{0\}$ 是差集, $\lambda = 11$ 时, $H \cup \{0\}$ 不是差集。前面的例2即 $\lambda = 1$ 时 $K \cup \{0\}$ 是差集。下面给出 $\lambda = 11$ 时的 H , 这时 $v = 173$, $K = 44$, $\alpha = 2$,

$H = \{ 1, 16, \underline{83}, \underline{117}, 142, 23, \underline{22}, 6, 96, 152, 10, 160, \underline{138}, \underline{132}, 36, 57, 47, 60, \underline{95}, 136, 100, 43, 169, 109, 14, \underline{51}, 124, 81, 85, 149, \underline{135}, \underline{84}, 133, 52, 140, 164, 29, \underline{118}, 158, 106, \underline{139}, \underline{148}, 119 \}$

H 有12个对首元素, H 不是差集。

参 考 文 献

〔1〕许宝騄, 许宝騄文集(1981), 211—225。