n 阶拟线性常微分方程的外推法及其在非线性振动力学中的某些应用

数学教研室　刘诗俊

摘　　要

本文得到如下n阶拟线性方程

$$(A)\begin{cases} y^{(n)}(t)=f(t,y,y',\cdots\cdots,y^{(n-1)}) & t\in[0,T] \\ y^{(k)}(0)=a_{K+1}(k=0,1,\cdots\cdots,n-1) \end{cases}$$

的Cauchy问题解的外推公式，并将此公式用于非线性振动问题，计算了无阻尼非线性数学摆及阻尼非线性数学摆的振动。在计算量小、程序简单的条件下，得到了比普通差分解准确得多的数值解。笔者还得到了更高阶的外推公式（待发表），由此可见用外推法解非线性问题，其前途是广阔的。

前　　言

对于n阶拟线性常微分方程的Cauchy问题。

$$\begin{cases} Y^{(n)}(t)=f\,[t,,y(t),y'(t),\cdots,y^{(n-1)}(t)] & t\in[a,b] \\ Y(a)=a_1,y'(a)=a_2,\cdots,y^{(n-1)}(a)=a_n \end{cases}$$

本文在适当的条件下得到了Euler格式差分解（包括各阶导数的差分解）的渐近展开式

$$y^{(i)'\tau}(t)=y^{(i)}(t)+\tau V_i(+)\tau^2 s_i^{\tau}(t)$$

$$(i=0,\cdots\cdots,n)$$

$$(t=j\tau+a,\ j=1,2\cdots\cdots,M-1) \qquad (M\tau=b-a)$$

$$V_i(t)\in C^2,\quad |s_i^{\tau}(t)|\leqslant e^{c(b-a)}$$

由此得到外推公式：

$$y^{(i)'*}(t)=2y^{(i)',\frac{\tau}{2}}(t)-y^{(i)',\tau}(t) \qquad (i=0,1,\cdots\cdots n)$$

本文于1985年3月27日收到

及外推结果的误差估计

$$y^{(i)}{}'^{*}(t)-y^{(i)}(t)=0\ (\tau^2) \qquad (i=0,1,\cdots\cdots n)$$

在本文的第一部分中，对以上结果进行了论证。在第二部分中用外推法探讨了几个非线性振动问题。并且对一个非线性摆作了实际外推计算。从计算结果可以看出，用外推法只花了极少的劳动，却大大提高了原来差分解的精确度。这个事实说明，用外推法处理非线性问题是很有实际用处的。当前，数学和力学都进入了“非线性时代”，外推法的发展前途看来是广阔的。这个方向是铁道科学院副研究员冯登泰同志给我建议的。本校何岳山同志为本文编制了很好的程序，在此向他们表示衷心的感谢！

一、n阶拟线性常微分方程Cauchy问题解及其各阶导数的外推算法

对于如下的Cauchy问题。

$$(A)\begin{cases} y^{(n)}(t)=f(t,y(t),y'(t),\cdots\cdots,y^{(n-1)}(t) & t\in[0,T] \\ y(0)=a_1,y'(0)=a_2,\cdots\cdots,y^{(r-1)}(0)=a_n \end{cases} \qquad \text{(注 1)}$$

首先，将（A）化为如下的一阶常微分方程组。

令$y(t)=y_1(t),y'(t)=y_2(t),\cdots\cdots,y^{(n-1)}(t)=y_n(t)$，则

$$(A')\begin{cases} y_1'(t)=y_2(t) & t\in[0,T] \\ y_2'(t)=y_3(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{n-1}(t)=y_n(t) \\ y'_n(t)=f\ (t,y_1(t),\cdots\cdots y_n(t)) \\ y_i(0)=a_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

用矩阵表示。取

$$Y\ (t)\ =\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \qquad P(t)=\begin{pmatrix} y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ f\ (t,y_1(t),\cdots\cdots,y_n(t)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=Y_0$$

则(A')化为

$$(B)\begin{cases} Y'(t)=P(t) \\ Y(0)=Y_0 \end{cases}$$

作关于(B)的差分方程组（用Euler格式）

注 1：对于一般在〔a,b〕上的Cauchy问题，容易化成〔0,T〕上的（A）问题。为方便计，以下均在〔0,T〕上讨论。

$$
(C)\quad \begin{cases} [Y^{\tau}(t+\tau)-Y(t)]/\tau = P^{\tau}(t) \\ Y^{\tau}(0)=Y_0 \qquad\qquad t\in\omega_{\tau}=\{t=j\tau \mid j=0,1,\cdots\cdots,M-1\} \end{cases}
$$

在此式中 $(M\tau=T)$

$$
P^{\tau}(t)=\begin{pmatrix} y_2^{\tau}(t) \\ y_3^{\tau}(t) \\ \vdots \\ y_n^{\tau}(t) \\ f(t,y_1^{\tau}(t),y_2^{\tau}(t),\cdots\cdots,y_n^{\tau}(t) \end{pmatrix}
$$

我们来证明以下定理

定理1 如果（A）中右端函数$f(t,y_1,y',\cdots\cdots,y^{(n-1)})$满足

（亦即$f(t,y_1,y_2,\cdots\cdots y_n)$）

① $f\in C^2(R^{n+1})$

② f在R^{n+1}全空间有界

$R^{n+1}=\{(t,y_1,\cdots\cdots,y_n)\mid t,y_i$取任何实数$\}$

则 差分方程组（C）的解$Y^{\tau}(t)$有如下渐近展开式

$$
Y^{\tau}(t)=Y(t)+\tau V(t)+\tau^2 S^{\tau}(t) \qquad (t\in\omega_{\tau}) \qquad (D)
$$

在此式中，$V(t)$在$[0,T]$中有定义，它与τ无关。

$$
V(t)=\begin{pmatrix} V_1(t) \\ \vdots \\ V_n(t) \end{pmatrix}\in C^2
$$

$Y(t)$是问题（A）的唯一解，$Y(t)\in C^3$。$S^{\tau}(t)$定义在$t\in\omega_{\tau}$上。

$$
S^{\tau}(t)=\begin{pmatrix} S_1^{\tau}(t) \\ \vdots \\ S_n^{\tau}(t) \end{pmatrix}
$$

$\|S^{\tau}(t)\|$有界（$t\in\omega_{\tau}$） （注2）

证明

1）因为$f\in C^2(R^{n+1})$，且f在R^{n+1}有界，由方程（A′）可知$y'_n(t)$有界（当$t\in$任何有限区间$[a,b]$）从而$y_n(t)$有界，于是$y_{n-1}(t)$有界，……，于是$y_1(t)$有界。所以(A′)的解可延拓到任何$[a,b]$（参看张锦炎所著《常微分方程几何理论与分支问题》第一章第2节定理2）且可证明（A′）的解在任何$[a,b]\supset[0,T]$上唯一。

可见（A′）的解在$(-\infty,+\infty)$内存在且唯一。当然在$t\in[0,T]$（$T>0$为任意实数），（A′）有唯一解。又$f\in C^2$，由方程（A′）可见$Y(t)\in C^3$

2）现在试将（D）代入（C），得

$$
(E)\quad \frac{1}{\tau}[Y(t+\tau)-Y^{\tau}(t)]+\tau\cdot\frac{1}{\tau}[V(t+\tau)-V(t)]
$$

$$
+\tau^2\cdot\frac{1}{\tau}[S^{\tau}(t+\tau)-S^{\tau}(t)]=P^{\tau}(t) \qquad (t\in\omega_{\tau})
$$

注2：我们取$\|S^{\tau}(t)\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|S_i^{\tau}(t)\|$，相应的矩阵范数为$\|A\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

但是 $Y(t)\in C^3$，所以

$$\frac{1}{\tau}[Y(t+\tau)-Y^{\tau}(t)] = Y'(t)] + \frac{\tau}{2}Y''(t)+\tau^2\sigma(t)$$

在此

$$\sigma(t)=\begin{pmatrix}\sigma_1(t)\\ \vdots\\ \sigma_n(t)\end{pmatrix} \qquad \|\sigma(t)\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\sigma_i(t)| \text{ 有界 } (t\in[0,T])$$

如果 $V(t)\in C^2$ （从后文可知$V(t)$确实存在，且具有C^2光滑程度），则

$$V(t+\tau)-V(t)=V'(t)\tau+\tau^2\delta(t)$$

$$\delta(t)=\begin{pmatrix}\delta_1(t)\\ \vdots\\ \delta_n(t)\end{pmatrix}, \qquad \|\delta(t)\| \text{ 有界 } (t\in[0,T]$$

又

$$P^{\tau}(t)=\begin{pmatrix}y_2^{\tau}(t)\\ \vdots\\ y_n^{\tau}(t)\\ f(t,y_1^{\tau}(t),\cdots\cdots,y_n^{\tau}(t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2^{\tau}(t)\\ \vdots\\ y_n^{\tau}(t)\\ f(t,Y^{\tau}(t))\end{pmatrix}$$

但 $f(t,Y^{\tau}(t))=f(t,Y(t),+\tau V(t)+\tau^2S^{\tau}(t)$

$$=f(t,Y(t)+\tau V(t))+\sum_{i=1}^{n}\tau^2S_i^{\tau}(t)\frac{\partial f}{\partial y_i}(t,Y(t)+\tau V(t)+\theta\tau^2S^{\tau}(t))$$

$$=f(t,y_1(t),\cdots\cdots,y_n(t))+\sum_{i=1}^{n}\tau V_i(t)\frac{\partial f}{\partial y_i}(t,y_1(t),\cdots\cdots,y_n(t))$$

$$+\frac{\tau^2}{2!}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\tau V_i(t)V_j(t)f_{y_iy_j}(\cdots\cdots)\Big]+\tau^2\sum_{i=1}^{n}S_i^{\tau}(t)\frac{\partial f}{\partial y_i}(\cdots\cdots)$$

$f_{y_iy_j}(\cdots\cdots)$及$\frac{\partial f}{\partial y_i}(\cdots\cdots)$均表示有关偏导数在某内点处取值。

于是

$$P^{\tau}(t)=\begin{pmatrix}y_2(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\\ f(t,Y(t))\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}V_2(t)\\ \vdots\\ V_n(t)\\ \sum_{i=1}^{n}V_i(t)f_{y_i}(t,Y(t))\end{pmatrix}+\tau^2\begin{pmatrix}S_2^{\tau}(t)\\ \vdots\\ S_n^{\tau}(t)\\ \sum_{i=1}^{n}S_i^{\tau}(t)f_{y_i}(\cdots)\end{pmatrix}$$

$$+\tau^2\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \rho(t)\end{pmatrix}=\rho(t)+\tau P_1(t)+\tau^2P_2(t)+\tau^2\eta(t)$$

矩阵$P_1(t)$,$P_2(t)$及$\eta(t)$的含义由此式可直接看出。

$$P(t)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}V_i(t)V_j(t)f_{y_iy_j}(\cdots)$$

将以上诸式代入（E），得

$$Y'(t)+\frac{\tau}{2}Y''(t)+\tau^2\sigma(t)+\tau V'(t)+\tau^2\delta(t)+\tau^2\frac{S^{\tau}(t+\tau)-S^{\tau}(t)}{\tau}$$

$$=P(t)+\tau P_1(t)+\tau^2[P_2(t)+\eta(t)]$$

我们让此式两端τ的各次幂相等

$$\tau^0: \quad Y'(t)=P(t) \qquad \text{(这就是方程B)}$$

$$\tau^1: \quad \frac{1}{2}Y''(t)+V'(t)+P_1(t)=0 \qquad (F)$$

$$\tau^2: \quad \sigma(t)+\delta(t)+\frac{S^\tau(t+\tau)-S^\tau(t)}{\tau}=P_2(t)+\eta(t) \qquad (G)$$

现在来分析(F)和(G)。由

$$Y^\tau(t)=Y(t)+\tau V(t)+\tau^2 S^\tau(t)$$

及 $Y^\tau(0)=Y(0)$ 对任何充分小的正数τ成立，可知 $V(0)=0$，$S^\tau(0)=0$（此处0为零矩阵）对于(F)，加上初始条件，即

$$(F')\quad \begin{cases} V'(0)=-P_1(t)-\frac{1}{2}Y''(t) & t\in[0,T] \\ V(0)=0 \end{cases}$$

这是关于V(t)的线性方程组Cauchy问题。因为$Y(t)\in C^8$，所以$Y''(t)\in C'$。又显然有$P_1(t)\in c'$。所以问题(F′)在$[0,T]$有唯一解$V(t)\in C^2$。在上文中曾设$V(t)\in C^2$，现在果然满足。

对于(G)，令$\eta(t)-\sigma(t)-\delta(t)=\xi(t)$，则

$$\frac{1}{\tau}[S^\tau(t+\tau)-S^\tau(t)]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ f_{y_1}(\cdots), & f_{y_2}(\cdots) & \cdots\cdots & & f_{y_n}(\cdots) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1^\tau(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_n^\tau(t) \end{pmatrix}+\xi(t)$$

$$=H(t)\cdot S^\tau(t)+\xi(t)$$

矩阵H(t)的含义由此式可直接看出。现在证明列向量$S^\tau(t)$的范数$\|S^\tau(t)\|$有界。

显然有$C>0$，使$\|H(t)\|$，$\|\xi(t)\|\leqslant C$（当$t\in\omega_\tau$）

又$S^\tau(t+\tau)=[I+\tau H(t)]\cdot S^\tau(t)+\tau\xi(t)$

I是n阶单位矩阵。于是

$$\|S^\tau(t+\tau)\|\leqslant(1+C\tau)\|S^\tau(t)\|+C\tau$$

$$\leqslant(1+C\tau)[(1+C\tau)\|S^\tau(t-\tau)\|+C\tau]+C\tau$$

$$=(1+C\tau)^2\|S^\tau(t-\tau)\|+(1+C\tau)C\tau+C\tau$$

$$\leqslant\cdots\cdots\leqslant(1+C\tau)^{i+1}\|S^\tau(0)\|+C\tau(1+C\tau)^i+C\tau(1+C\tau)^{i-1}+\cdots\cdots$$

$$+C\tau(1+C\tau)+C\tau=C\tau(1+C\tau)^i\frac{1-\left(\frac{1}{1+C\tau}\right)^{i+1}}{1-\frac{1}{1+C\tau}}$$

$$\leqslant C\tau(1+C\tau)^i\frac{1}{1-\frac{1}{1+C\tau}}=(1+C\tau)^{i+1}\leqslant e^{c\tau(i+1)}$$

$$\leqslant e^{c\tau M}=e^{cT} \qquad (\because M\tau=T)$$

所以

$$\|S^\tau(t+\tau)\| \leqslant e^{cT}\ (\text{当}\ t\in\omega_\tau)$$

因为$\|S^\tau(0)\|=0$，所以

$$\|S^\tau(t)\| \leqslant e^{cT} \qquad t=i\tau\ (i=0,1,\cdots\cdots,M-1,M)$$ 证毕

(D)式是外推的理论根据。将这矩阵形式的渐近展开式写成普通形式，就是

$$(H)\begin{cases} y^\tau(t)=y(t)+\tau V_1(t)+\tau^2 S_1{}^\tau(t) \\ y^{(1)'\tau}(t)=y^{(1)}(t)+\tau V_2(t)+\tau^2 S_2{}^\tau(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad V_i(t)\in C^2 \\ y^{(n)'\tau}(t)=y^{(n)}(t)+y(t)+\tau^2 S_n{}^\tau(t) \qquad |S_i{}^\tau(t)|\leqslant e^{cT}(t\in\omega_\tau) \end{cases}$$

$y^\tau(t)$是(A)的精确解。 $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

$y^\tau(t),y^{(1)'\tau}(t),\cdots\cdots,y^{(n)'\tau}(t)$是$y(t)$及其各阶导数的差分解。(H)和(D)是$y(t)$及其各阶导数差分解的渐近展开式。

我们在下文中常用到的是下面这个定理。

定理2 如果(A)中的右端函数$f\in C^2(R^{n+1})$，且(A)在$[0,T]$有唯一解$y(t)$，则定理1的所有结论均成立。

这是明显的。因为，由方程(A′)可见$y(t)\in C^3[0,T]$。而在定理1的证明中，实际上只用到$f\in C^2(R^{n+1})$及$Y(t)\in C^3[0,T]$这两个条件。

在定理2中，我们去掉了f在全空间有界这个条件，代之以解存在唯一条件。后者常可由微分方程定性理论推出。用起来较为方便。

渐近展开式(D)和(H)是外推算法的基础。由(D)可见

$$Y^\tau(t)=Y(t)+\tau V(t)+O(\tau^2)$$

$$Y^{\frac{\tau}{2}}(t)=Y(t)+\frac{\tau}{2}V(t)+O(\tau^2)$$

所以 $$2Y^{\frac{\tau}{2}}(t)-Y^\tau(t)=Y(t)+O(\tau^2)$$

取外推解 (I) $$Y^*(t)=2^{\frac{\tau}{2}}(t)-Y^\tau(t)$$

则 $$Y^*(t)-Y(t)=O(\tau^2)$$

与 $$Y^\tau(t)=Y(t)+O(\tau)$$

$$Y^{\frac{\tau}{2}}(t)=Y(t)+O(\tau)$$

比较，可以看出外推的精度比$Y^\tau(t)$甚至$Y^{\frac{\tau}{2}}(t)$提高了一个数量级！

将外推公式的矩阵形式(I)写成普通形式，并以$y_i(t)=y^{(i-1)}(t)$代入，得

$$(J)\begin{cases} y^{(0)'*}(t)=y^*(t)=2y^{\frac{\tau}{2}}(t)-y^\tau(t) \\ y^{(1)'*}(t)=2y^{(1)'\frac{\tau}{2}}(t)-y^{(1)'\tau}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)'*}(t)=2y^{(n)'\frac{\tau}{2}}(t)-y^{(n)'\tau}(t) \end{cases}$$

且 $$y^{(i)'*}(t)-y^{(i)}(t)=0(\tau^2) \quad (i=0,1,\cdots\cdots,n)$$

二、外推法在非线性振动问题中的某些应用

研究非线性振动时，人们要处理非线性常微分方程。要直接求出这种方程的精确解，在数学上遇到了很大的困难。有些非线性方程，人们将它的解表成了特殊函数（如椭圆函数，贝塞尔函数，等等），但求数值仍然很不方便。在本文中，用"差分外推"的算法，以简单的程序，得到了很精确的数值解。这说明用外推法解非线性问题，是值得重视的方向。就我们所得到的结果看来，它似乎比有限元法还好些。下面说明如何用"差分外推算"法来求非线性振动问题的数值解。

1.无阻尼非线性数学摆的振动

人们熟知，这种振动问题可用方程

$$\varphi''(t)+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \qquad (g为重力加速度)$$

来描写。l为悬线长，$\varphi(t)$是在t时刻摆悬线偏离稳定平衡位置的角度。如果已知当$t=0$时

$$\varphi(0)=\varphi_0,\qquad \varphi'(0)=0\qquad (0<\varphi_0<\pi)$$

我们就要解如下Cauchy问题

$$(A_1)\begin{cases}\varphi''(t)+\dfrac{g}{l}\sin\varphi=0\\ \varphi(0)=\varphi_0,\quad \varphi'(0)=0\end{cases}$$

它的精确解为

$$(B_1)\quad \varphi=2\arcsin\left\{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot \mathrm{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+K\right]\right\} \qquad (注)$$

在此，$\mathrm{sn}[z]$是z的椭圆正弦函数。

$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$是对应于$k=\sin\frac{\varphi_0}{2}$的第一类全椭圆积分。

现在来求(A_1)的数值解。分以下几个步骤：

(1) 令$\varphi(t)=y_1(t)$，$\varphi'(t)=y_2(t)$，则(A_1)化为

$$(C_1)\begin{cases}y_1'(t)=y_2(t) & t\in[0,T]\\ y_2'(t)=-d\sin y_1(t) & d=g/l\\ y_1(0)=\varphi_0,\quad y_2(0)=0\end{cases}$$

显然，$f(t,y_1,y_2)=-d\sin y_1\in C^{\infty}(R^3)$，且在$R^3$有界。所以，在任何$[0,T](T>0)$，当$t\in[0,T]$，$(C_1)$有唯一解，$(A_1)$也如此。

因为$\mathrm{sn}(z)$有实数周期$4K$，所以由(B_1)可知$\varphi(t)$有周期

注：参看冯登泰编《应用非线性振动力学》2.6

$$T_1 = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}$$

取 $l=1$，$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$，(由$\varphi_0 \frac{\pi}{2}$可知$(A_1)$是本质非线性问题)

则 $k = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = 1.8541$$

$$T_1 = \frac{4\times 1.8541}{\sqrt{9.80665}} = 2.3682787$$

下面只在 $[0, \frac{T_1}{2}]$ 即 $[0, 1.184139]$ 中求数值解。

(2)作差分方程，并外推。

作(C_1)的差分方程组

$$(D_1)\begin{cases} \frac{1}{\tau}\cdot[\overset{\tau}{y}_1(t+\tau)-\overset{\tau}{y}_1(t)] = \overset{\tau}{y}_2(t) & (t=i\tau,\ i=0,1,\cdots\cdots,199) \\ \frac{1}{\tau}\cdot[\overset{\tau}{y}_2(t+\tau)-\overset{\tau}{y}_2(t)] = -d\sin\overset{\tau}{y}_1(t) & d=\frac{g}{l}=9.80665 \\ \overset{\tau}{y}_1(0)=\frac{\pi}{2},\quad \overset{\tau}{y}_2(0)=0 \end{cases}$$

取 $\tau = \frac{1.184139}{200} = 0.0059207$

解出 $\overset{\tau}{y}_1(t)$ 及 $\overset{\tau}{y}_2(t)$ $\quad t=i\tau,\ i=0,1,\cdots\cdots 199,200)$

又取 $\frac{\tau}{2} = 0.00296035$，用它替换$(D_1)$中的$\tau$，解出

$$\overset{\frac{\tau}{2}}{y_1}(t) \text{ 及 } \overset{\frac{\tau}{2}}{y_2}(t) \quad (t=i\frac{\tau}{2},\ (i=0,1,\cdots,400)$$

我们在Apple机上计算（采取边算边印之法，只用了很少的内存），同时算出外推解。

$$\begin{cases} y_1^*(t) = 2\overset{\frac{\tau}{2}}{y_1}(t) - \overset{\tau}{y}_1(t) \\ y_2^*(t) = 2\overset{\frac{\tau}{2}}{y_2}(t) - \overset{\tau}{y}_2(t) \end{cases} \quad (t=i\tau,\ i=0,1,\cdots\cdots,200)$$

机器实际计算及打印时间约为1000秒。现摘几段数值如下（原打印结果太长）注意在下表中，i是按步长$\frac{\tau}{2}$所取分点的编号。

无阻尼非线性数学摆的差分解及差分外推解数值表

i	$y_1^{\frac{\tau}{2}}(t)$	$y_2^{\frac{\tau}{2}}(t)$	$y_1^{\tau}(t)$	$y_2^{\tau}(t)$	$y_1^{*}(t)$	$y_2^{*}(t)$
0	1.5708	0	1.5708	0	1.5708	0
1	1.5708	-0.0290311				
2	1.57071	-0.0580622	1.5708	-0.0580622	1.57062	-0.0580622
3	1.57054	-0.0870934				
4	1.57028	-0.116124	1.57045	-0.116124	1.57011	-0.116124
5	1.56994	-0.145156				
9	1.56951	-0.174187	1.56976	-0.174187	1.56925	-0.174187
7	1.56899	-0.203218				
8	1.56839	-0.232249	1.56873	-0.232249	1.56804	-0.232249
6	1.5677	-0.26128				
10	1.56693	-0.290311	1.56736	-0.290311	1.5665	-0.290311
			……	……		
196	0.0555063	-4.4499	0.0587492	-4.47411	0.0522634	-4.4257
197	0.042333	-4.45151				
198	0.029155	-4.45274	0.0322593	-4.47752	0.0260507	-4.42797
199	0.0159733	-4.45359				
200	0.00278915	-4.45405	0.00574932	-4.47939	-0.000171028	-4.42872
201	-0.0103964	-4.45413				
202	-0.0235822	-4.45383	-0.0207718	-4.47972	-0.0263926	-4.42794
203	-0.0367671	-4.45315				
304	-0.04995	-4.45208	-0.0472949	-4.47852	-0.0526501	-4.42564
			……	……		
299	-1.14442	-2.91123				
300	-1.15304	-2.88479	-1.16224	-2.91999	-1.14384	-2.84959
			……	……		
398	-1.59336	-0.0889198	-1.61625	-0.121193	-1.57047	-0.0566468
399	-1.539362	-0.059896				
400	-1.5938	-0.0308725	-1.61697	-0.0681904	-1.57063	-0.0014455

(3)与精确值对比

(a) 因为摆的周期$T_1=2.36828$，所以当

$$t=\frac{T_1}{4}=0.59207\text{时}，\qquad \varphi\left(\frac{T_1}{4}\right)=0\text{。又用能量关系}$$

$$mgl=\frac{1}{2}ml^2\varphi'^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

及$l=1$，得

$$\left|\varphi'\left(\frac{T}{4}\right)\right|=\sqrt{2g}=\sqrt{2\times 9.80665}=4.42869=4.4287$$

$$\varphi'\left(\frac{T_1}{4}\right)=-4.4287$$

现在查差分解及差分外推解。当$i=200$时，

$$t=200\times\frac{\tau}{2}=0.59207\text{。在此点的差分值为}$$

$$\begin{cases}\varphi^{\frac{\tau}{2}}\left(\frac{T_1}{4}\right)=y_1^{\frac{\tau}{2}}\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.00278915\approx 0.0028\\ \varphi'^{\frac{\tau}{2}}\left(\frac{T_1}{4}\right)=y_1^{\frac{\tau}{2}}\left(\frac{T_1}{4}\right)=-4.45405\approx -4.4540\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi^{\tau}\left(\frac{T_1}{4}\right)=y_1^{\tau}\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.00574932\approx 0.0057\\ \varphi'^{\tau}\left(\frac{T_1}{4}\right)=y_2^{\tau}\left(\frac{T_1}{4}\right)=-4.47939\approx -4.4793\end{cases}$$

在此点的外推值为

$$\varphi^{*}\left(\frac{T_1}{4}\right)=y_1^{*}\left(\frac{T_1}{4}\right)=-0.000171028\approx -0.0002$$

$$\varphi'^{*}\left(\frac{T_1}{4}\right)=y_2^{*}\left(\frac{T_1}{4}\right)=-4.42872\approx -4.4287$$

于是

$$\varphi\left(\frac{T_1}{4}\right)-\varphi^{\tau}\left(\frac{T_1}{4}\right)=-0.0057$$

$$\varphi'\left(\frac{T_1}{4}\right)-\varphi'^{\tau}\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.0507$$

$$\varphi\left(\frac{T_1}{4}\right)-\varphi^{\frac{\tau}{2}}\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.0028$$

$$\varphi'\left(\frac{T_1}{4}\right)-\varphi'^{\frac{\tau}{2}}\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.0254$$

$$\varphi\left(\frac{T_1}{4}\right)-\varphi^*\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.0002$$

$$\varphi'\left(\frac{T_1}{4}\right)-\varphi'^*\left(\frac{T_1}{4}\right)=0.0000$$

由此看出角度外推值$\varphi^*(t)$及角速度外推值$\varphi'^*(t)$在$t=\frac{T_1}{4}$处分别精确到0.0002及0.0000。用外推法只花了极少的劳动（在我们的计算中，外推计算只给计算机增加了5分钟的运算和打印时间），而结果的精确度大大提高了。

(b) 我们知道$Sn\frac{K}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$。将此值与差分值及差分外推值作一对比。

由 $k=\sin\frac{\varphi_0}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$，得

$$k'=\sqrt{1-k^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以

$$Sn\frac{K}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}=0.765366864$$

观察(B_1)式。若取

$$\sqrt{g}\,t+K=\frac{K}{2}$$

或

$$\sqrt{g}\,t+K=\frac{K}{2}+4K$$

所得t均在$[0,\frac{k}{2}]$之外，不好对比。取

$$\sqrt{g}\,t+K=\frac{K}{2}+2K$$

这时

$$t=\frac{3}{2}\frac{K}{\sqrt{g}}=0.888104854$$

用椭圆正弦的诱导公式

$$sn(Z+2k)=-snz$$

得

$$Sn(\sqrt{g}\times0.888104854+K)=Sn\left(\frac{K}{2}+2K\right)=-Sn\frac{K}{2}=-\frac{1}{\sqrt{1+k'}}=-0.765366864$$

所以，当$t=0.888104854$时，

$$\varphi(t)=2\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{2}Sn\left(\frac{K}{2}+2K\right)\right]=2\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-0.765366864)\right]$$

$$=-1.143717739\approx-1.1437$$

又

$$\varphi'(t)=\frac{2\sqrt{g}\,cn(\sqrt{g}t+K)dn(\sqrt{g}t+K)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}Sn^2(\sqrt{g}t+K)}}$$

当$t=0.888104854$，$\sqrt{g}t+K=\frac{K}{2}+K$。由

$cn(z+2K)=-cnz$，$dn(z+2K)=dnz$

及

$$cn(\frac{K}{2})=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}\text{，}dn(\frac{k}{2})=\sqrt{k'}$$

得

$$\varphi'(t)=\frac{2\sqrt{g}\ cn(\frac{K}{2}+2k)dn(\frac{K}{2}+2K)}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+k'}}}=-2.850279782\approx-2.8503$$

现在与差分值及差分外推值比较。因为

$$\frac{0.888104854}{\frac{\tau}{2}}=299.99\approx300$$

所以与差分数值表中的$i=300$处的值比较。在这一点，有差分解

$$\begin{cases}\varphi_\tau(t)=-1.1622\\ \varphi'_\tau(t)=-2.9200\end{cases}\qquad\begin{cases}\varphi_{\frac{\tau}{2}}(t)=-1.1530\\ \varphi'_{\frac{\tau}{2}}(t)=-2.8848\end{cases}$$见

及外推解

$$\begin{cases}\varphi^*(t)=-1.1438\\ \varphi'^*(t)=-2.8496\end{cases}$$

附带指出，若初始能量过大，此数学摆将转动起来。但仍可用此差分外推法求数值解，因为上面说到的展开式(D)和(H)仍成立。

2.阻尼非线性数学摆的振动

这种问题引导到如下方程

$$\text{(L)}\quad\begin{cases}\varphi''(t)+\lambda\varphi'(t)+\frac{g}{l}Sin\varphi(t)=0\\ \varphi(0)=\varphi_0\text{，}\varphi'(0)=\omega_0\end{cases}$$

当$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，$\omega_0=0$时，它反映了非线性振动问题。用常微分方程定性理论可以证明(注)，

注：见叶彦谦编《常微分方程讲义》第二版p.313～314

在相空间(φ, φ')中，当$t \longrightarrow +\infty$(L)的轨线趋向$(0, 0)$，由此可知(L)在$t \in [o, +\infty]$有唯一解$\varphi(t)$满足$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \varphi'(0) = 0$。又由

$$\varphi'' = -\lambda\varphi' + \frac{g}{l}\mathrm{Sin}\varphi = f(\varphi, \varphi')$$

知$f \in c^2$，故$\varphi(t) \in c^3$。由定理2，(L)可用差分外推法求数值解。具体做法仍然是先将(L)化为一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2(t) & t \in [o, T] \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\lambda y_2(t) - \dfrac{g}{l}\mathrm{Sin}y_1(t) & \\ y_1(0) = \dfrac{\pi}{2} \qquad y_2(0) = 0 & \end{cases}$$

再写出差分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}[y_1^\tau(t+\tau) - y_1^\tau(t)] = y_2^\tau(t) \\ \dfrac{1}{\tau}[y_2^\tau(t+\tau) - y_2^\tau(t)] = -\dfrac{g}{l}\mathrm{Sin}y_1^\tau(t) - \lambda y_2^\tau \\ y_1^\tau(0) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y_2^\tau(0) = 0 \end{cases}$$

在$t \in \omega_\tau$上解出$y_1^\tau(t)$及$y_2^\tau(t)$。再取步长$\frac{\tau}{2}$，解出$y_1^{\frac{\tau}{2}}(t)$及$y_2^{\frac{\tau}{2}}(t)$。然后用(J)求出外推解$y_1^*(t)$及$y_2^*(t)$，即可得到精确度大为提高的数值解。

参　考　文　献

(1)G.I.marchuk, V.V.Shiadurov, Diffenence Methods and Their Extrapolation
(2)冯登泰，应用非线性振动力学
(3)叶彦谦，常微分方程讲义
(4)张锦炎，常微分方程几何理论与分支问题
(5)J,Stoer,R,Bulirsch,Introduction to Numerical Analysis