极点配置法在工程控制设计中的应用

电气工程系 易宜连

摘 要

本文运用《现代控制理论》中的极点配置原理，对单输入—单输出系统的设计综合出了一个具体的计算程序。

关于单输入—单输出线性定常系统的工程设计，目前大都采用频率法或根轨法。然而它们是基于BOde图或根轨图，是属于试探法的范畴。本文根据《现代控制理论》中的极点配置原理，运用状态反馈，对工程系统采取解析法来进行设计。重点是研究单输入—单输出系统的极点位置与系统品质的关系以及应用极点配置法进行工程设计的具体步骤。

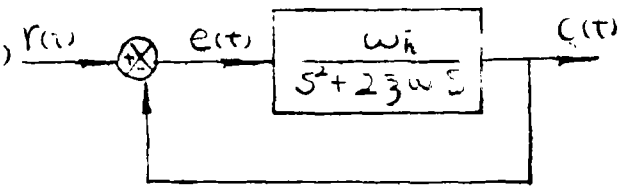
一、单输入—单输出线性定常系统的极点位置与系统品质的关系。

在工程控制中，对一般要求的系统，采用单位阶跃输入信号来研究系统的动态品质。下面分别对二阶系统及高阶系统进行论述。

1、单位阶跃函数作用下二阶系统的超调量σ_p，过渡过程时间t_s，峰值时间t_p与极点位置的关系。

二阶系统（见图一）传递函数的标准形式，即

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\omega^2_n}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega^2_n} \quad (1)$$



图一 系统方法图

式中ω_n—无阻尼自振频率；

ζ—阻尼比

由于$r(t)=1(t)$；$R(S)=\frac{1}{S}$

可从式（1）求得二阶系统在单位阶跃函数作用下输出信号的拉氏变换，即：

本文于1985年2月9日收到

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C(S)=\frac{\omega^2_n}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega^2_n}\cdot\frac{1}{S} \qquad (2)$$

由式（2）可求得二阶系统的特征方程式

$$S^2+2\zeta\omega_n S+\omega^2_n=0 \qquad (3)$$

它的两个根是：

$$S_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad (4)$$

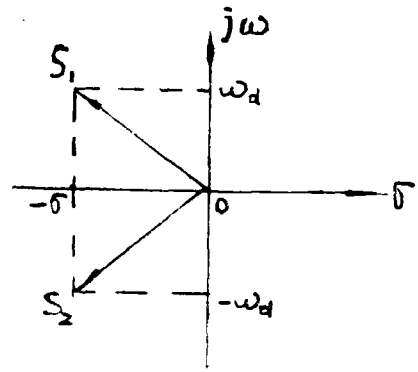
式（4）说明二阶系统的特征根（即闭环系统的极点）随着ζ取不同值而异。ζ≥1时，特征方程具有两个不等或相等的负实根。此时系统虽无超调量，但过渡过程太慢，工程设计上一般不宜采用；ζ=0是虚根，过渡过程是等幅振荡；ζ<0，过渡过程是单调发散或发散正弦振荡形式。这两种情况，系统是处于不稳定状态。因此，ζ≤0都不能采用。只有当0<ζ<1时，这才是工程设计常使用的范围。

当0<ζ<1时，特征方程具有两个共轭复数根。

$$S_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$=-\sigma\pm j\omega_d \text{（见图二）}$$

式中$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$称为有阻尼自振角频率。



图二〔S〕平面上二阶系统的闭环极点

于是式（2）可写成

$$C(S)=\frac{1}{S}-\frac{S+\zeta\omega_n}{(S+\zeta\omega_n)^2+\omega^2_d}-\frac{\zeta\omega_n}{(S+\zeta\omega_n)^2+\omega^2_d} \qquad (5)$$

取式(5)拉氏反变换，得过渡过程。

$$C(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\quad t\geq 0 \qquad (6)$$

式中 $\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

由式（6）求出峰值时间t_p

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi}{\omega_d} \qquad (7)$$

超调量σ_p

$$\sigma_p=\frac{C(t_p)-C(\infty)}{C(\infty)}\times 100\%=e^{-\frac{\sigma}{\omega_d}\pi}\times 100\%=e^{-r\pi}\times 100\% \qquad (8)$$

式中$r=\frac{\sigma}{\omega_d}$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

过渡过程时间t

在允许误差为稳态值的5%（$\Delta=0.05$）时

$$t \geqslant \frac{3+\ln\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}$$

在允许误差为稳定值的2%（$\Delta=0.02$）时

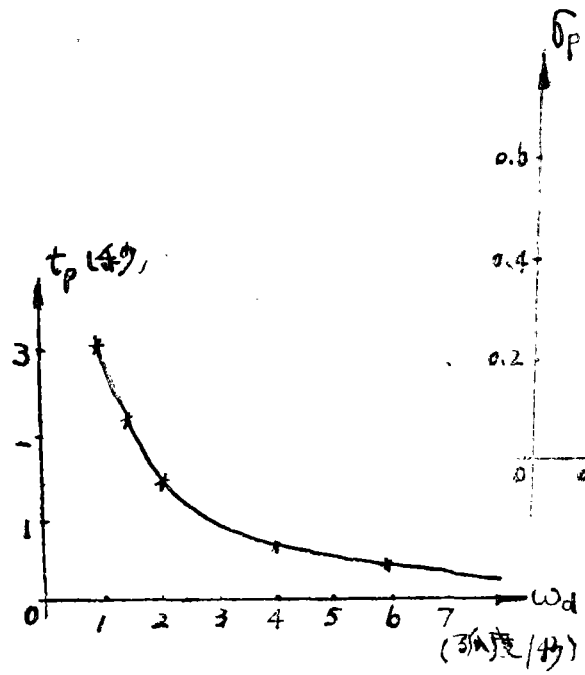
$$t_s \geqslant \frac{4+\ln\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n}$$

当$0<\zeta<0.9$时

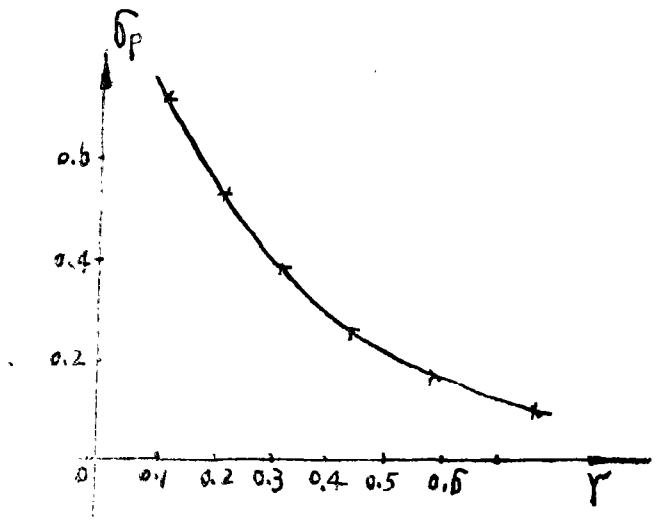
$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{\sigma} \qquad (\Delta=0.05) \qquad (9)$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{\sigma} \qquad (\Delta=0.02) \qquad (10)$$

把t_p与ω_d的关系，σ_p与r的关系画成曲线，如图三、图四所示。



图三　$t_p\sim\omega_d$曲线



图四　$\sigma_p\sim r$曲线

有了这些曲线就容易由给定的品质查出所对应的闭环极点的位置，为配置所希望的极点奠定了基础。

2、单位阶跃函数作用下高阶系统的超调量σ_p，过渡过程时间t_s，峰值时间t_p与极点位置的关系。

设高阶系统的闭环传递函数为

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots b_1S+b_0}{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots a_1S+a_0}$$

$$=\frac{K(S-Z_1)(S-Z_2)\cdots(S-Z_m)}{(S-S_1)(S-S_2)\cdots(S-S_n)} \qquad (11)$$

式中Zi(i=1, 2……m)称为系统的闭环零点。

Si(i=1, 2……n)称为系统的闭环极点。

$$K=\prod_{i=1}^{n}(-Si)/\prod_{i=1}^{m}(-Zi)\ (当C(0)/RC(0)=1)$$

它们可以是实数，也可以是共轭复数。若在高阶系统的闭环极点中既有实数点又有共轭复数点，则在单位阶跃函数作用下，系统输出量的拉氏变换式可写成如下一般形式：

$$C(S)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(S-Z^i)}{\prod_{i=1}^{q}(S-S^i)\prod_{k=1}^{r}(S^2+2\zeta_k\omega_kS+\omega_k^2} \qquad (12)$$

$$q+2r=n$$

求C(S)的拉氏反变换，得高阶系统的过渡过程C(t)如下：

$$C(t)=1+\sum_{i=1}^{q}A_ie^{S_it}+\sum_{k=1}^{r}B_ke^{-\zeta_k\omega_kt}\cos(\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}t$$
$$+\sum_{k=1}^{r}C_ke^{-\zeta_k\omega_kt}\sin(\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}t \qquad (13)$$

式（13）表明C（t）含有指数函数分量和衰减的正弦分量。如果方程（11）所有的闭环极点都位于左半S平面，那么系统将是稳定的，式（13）中的指数函数分量$A_ie^{S_it}$是衰减的。控制工程中系统的稳定性是系统良好运行的先决条件。因此，在工程设计中所希望的系统闭环极点都应处于左半S平面内。

在前面二阶系统的分析中，已找出闭环极点的位置与系统品质的关系。如果在高阶系统中也能找出类似关系的话，那么当给定σ_p、t_r和t_s后，就能找到满足这些性能指标所需要的极点位置。从而根据极点配置原理，设计出所需的状态反馈阵，使系统的闭环极点处于希望极点的位置上。但是从式（13）看出很难找到这种简单的关系。因此必需采用主导极点，概念，用一个二阶系统去近似地代替一个高阶系统，所谓主导极点，就是指在控制系统中，如果有一对离虚轴最近的闭环共轭复数极点，其周围无零点，而其它闭环极点离虚轴的距离是上述那对共轭复数极点离虚轴的距离五倍以上，则高价系统的过渡过程形式及其品质，主要取决于上述那对共轭复数极点，那对共轭复数极点就称之为主导极点。

根据主导极点的概念，可求得高阶系统反应单位阶跃函数过渡过程的近似表达式。

设一对共轭复数极点$S_{1,2}=-\sigma\pm j\omega_1$为高阶系统的主导极点，通过$S_1$、$S_2$可得出系统输出的拉氏变换式的近似表达式如下：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C(S)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{n-1}+\cdots+b_1S+b_0}{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0}\cdot\frac{1}{S}=\frac{M(S)}{\dot{D}(S)}\cdot\frac{1}{S}$$

$$=\frac{1}{S}+\left(\frac{1}{S}\times\frac{M(S)}{\dot{D}(S)}\right)\Bigg|_{S=S_1}\frac{1}{S-S_1}+\left(\frac{M(S)}{\dot{D}(S)}\times\frac{1}{S}\right)\Bigg|_{S=S_2}\frac{1}{S-S_2}\qquad(14)$$

式中$\dot{D}(S)=\frac{d}{dS}D(S)$　　$\frac{M(0)}{D(0)}=1$

通过拉氏反变换，求得高阶系统过渡过程的近似表达式为：

$$C(t)=1+2\left|\frac{M(S_1)}{S_1\dot{D}(S_1)}\right|e^{-\sigma t}\cos\left(\omega_d t+L\frac{M(S_1)}{S_1\dot{D}(S_1)}\right)t\geqslant 0\qquad(15)$$

根据近似表达式（15）可计算出高阶系统性能指标的近似表达式。

峰值时间t_p

对式（15）取对时间的导数并令其为0，即 $\frac{dC(t)}{dt}=0$　　(16)

由此得出

$$t_p=\frac{1}{\omega_d}(\pi-\sum_{i=1}^{m}\theta_{zi}+\sum_{i=3}^{n}\theta si)$$

式中 $\theta_{zi}=\leqslant(S_1-Zi)$；　　$\theta si=\leqslant(S_1-Si)$。

式（16）表明：闭环系统的零点存在使t_p减小，即提高了系统的反应速度，而且零点靠近虚轴越近，上述的作用就越大；主导极点以外的极点存在，使t_p加大，即使系统反应的速度降低；如果闭环系统的极点和零点彼此靠得很近，它们对系统过渡过程的影响则互相低消。

最大超调量σ_p

按定义$\sigma_p=\frac{C(t_p)-C(\infty)}{C(\infty)}$及式（15）可算出

$$\sigma_p=\frac{\prod_{i=3}^{n}|Si|}{\prod_{i=3}^{n}|S_1-Si|}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}|S1-Zi|}{\prod_{i=1}^{m}|Zi|}e^{-\sigma t_p}\qquad(17)$$

由式（17）看出，若闭环系统的零点离虚轴较近，且$|S1-Zi|\geqslant|Zi|$，则σ_p将变得很大；反之，主导极点以外的极点Si（$i=3,4\cdots n$）离虚轴较近，且$|S_1-Si|\geqslant|Si|$时，σ_p则将大大减小。

过渡过程时间t_s

由于高阶系统过渡过程可通过与一对共轭复数闭环主导极点对应的过渡过程分量来近似地描述，所以计算高阶系统过渡过程的时间与计算二阶系统过渡过程时间的关系式相同，

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

即

当取 $\Delta = 0.05$ 时　　$ts \approx \frac{3}{\sigma}$　　（18）

$\Delta = 0.02$ 时　　$ts \approx \frac{4}{\sigma}$　　（19）

二、状态反馈和极点配置原理

在经典控制理论中，对单输入—输出系统，为了改善系统的品质往往采用反馈控制，但反馈量仅仅限于系统的输出量，或者是它的导数和积分。而在《现代控制理论》中则认为输入引起系统状态的变化，状态的变化决定于系统输出量的变化。如果把状态变量也反馈到系统的输入端与输入量共同组成控制变量，那么系统的性能必然会比仅由输出量的反馈所得到的性能更优越，这就是状态反馈。

由前一节的分析中清楚的看到，系统的品质在很大程度上取决于闭环系统的极点位置。如果能够找出满足给定性能指标的希望极点，然后通过状态反馈使闭环系统的极点成为希望极点，那么所设计的系统就能满足给定性能指标的要求。这就是所谓极点配置。下列引入极点配置定理：

设：单输入—单输出线性定常系统为〔简写 $\Sigma = (A、B、C)$〕

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) & (20) \\ Y(t) = CX(t) & (21) \end{cases}$$

式中：

$X(t) \overset{\Delta}{=} [x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots x_n(t)]^T$ 为n维列向量，T为转置。

$u(t)$——输入量，标量

$y(t)$——输出量，标量

A—$n \times n$维定常系数矩阵

$q \times 1$维定常输出矩阵

c—$1 \times n$维定常输出矩阵

给定任意n个希望极点$\lambda_1, \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n$，$\lambda_i$（$i = 1, 2 \cdots\cdots n$）可以是实数或共轭对出现的复数。

以这n个极点为零根的多项式记为

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + a^*_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots\cdots + a_1^* \lambda + a_0^* \qquad (22)$$

那么存在$1 \times n$维阵k，使闭环系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A - bk)X(t) + bv(t) & (23) \\ Y(t) = CX(t) & (24) \end{cases}$$

$$[u(t) = v(t) - kX(t)]$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以λ_1，λ_2……λ_n 为极点，即

$$\det[\lambda I-(A-bk)]=\lambda^n+a^*_{n-1}\lambda_n^{n-1}+a_1^*+\cdots\lambda+a_0^* \qquad (25)$$

的充分必要条件，为受控系统Σ=（A、B、C）完全能控。（证明略）

当系统Σ=（A、B、C）为能控规范型，即

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots\cdots & -a_{n-1} \end{vmatrix},\quad b=\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},\quad c=[\beta_0\beta_1\cdots\cdots\beta_{n-1}]$$

其传递函数为

$$W_0(S)=\frac{\beta_{n-1}S^{n-1}+\beta_{n-2}S^{n-2}+\cdots\cdots\beta_1S+\beta_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0} \qquad (26)$$

通过状态反馈阵k=〔k_0，k_1……k_{n-1}〕形成的闭环系统

Σ_k=（A−bk、b，c）

$$A-bk=\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -(a_0+k_0) & -(a_1+k_1) & \cdots\cdots & -(a_{n-1}+k_{n-1}) \end{vmatrix}$$

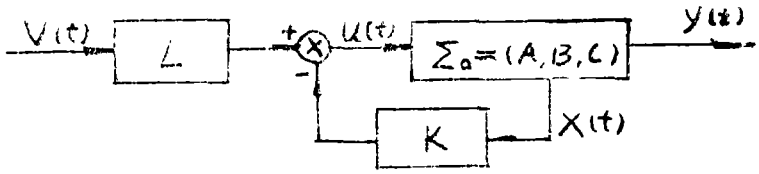
当取反馈阵k=〔k_0，k_1……k_{n-1}〕=〔$a_0^*-a_0$ $a_1^*-a_1$……$a^*_{n-1}-a_{n-1}$〕

则Σ_k=（A−bk，b，c）的传递函数为

$$W_k(s)=\frac{\beta_{n-1}S^{n-1}+\beta_{n-2}S^{n-2}+\cdots\cdots\beta_1S+\beta_0}{S^n+a^*_{n-1}S^{n-1}+\cdots\cdots a_1^*S+a_0^*} \qquad (27)$$

由式（26）和（27）看出，对单输入一单输出线性定常系统引入状态反馈后能任意配置极点的同时，却不改变其零点的形态，除非人为制造零极相消。在设计时必需加以注意。

当控制系统工作于伺服状态时，除了按极点配置原理确定反馈阵k以满足系统性能指标外，还要保证系统满足给定的静态指标即系统的跟踪误差。为此还要引入输入变换阵L，如图五所示。



图五

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

此时系统的闭环传递函数为

$$W_k(s)=\frac{L(\beta_{n-1}S^{n-1}+\beta_{n-2}S^{n-2}+\cdots\cdots+\beta_1S+\beta_0}{S^n+a^*_{n-1}S^{n-1}+a^*_{n-2}S^{n-2}+\cdots+a_1^*S+a_0^*} \qquad (28)$$

由此定出系统的跟踪误差：

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\phi_e(0)v(t)+\phi'_e(0)v'(t)+\frac{1}{2}\phi''_e(0)v''(t)+\cdots\cdots \qquad (29)$$

式中$\phi_e(0)$，$\phi'_e(0)$、$\phi''_e(0)$……是误差传递函数$\phi(s)$对S的零阶、一阶、二阶……导数在S=0的值。

$$\phi_e(S)=\frac{V(S)-Y(S)}{V(S)}=1-\frac{Y(S)}{V(S)}1-Wk(S)$$

$$=1-\frac{L(\beta_{n-1}S^{n-1}+\beta_{n-2}S^{n-2}+\cdots+\beta_1S+\beta_0)}{S^n+a^*_{n-1}S^{n-1}+a^*_{n-2}S^{n-2}+\cdots+a_1^*S+a_0^*}$$

当$v(t)=1(t)$时的跟踪误差——

$$e=\phi_e(0)1(t)=[1-\overline{wk}(0)]=1-\frac{L\beta_0}{a_0^*} \qquad (30)$$

当$v(t)=t$时的跟踪误差——

$$e_v=\phi_e(0)t+\phi_e'(0)=[1-Wk(0)]t+[1-Wk(s)]_{,}=0$$

$$=(1-\frac{L\beta_0}{a_0^*})t+L\frac{\beta_0a_1^*-\beta_0a_0^*}{a_0^{*2}} \qquad (31)$$

当$v(t)=\frac{1}{2}t^2$时的跟踪误差——

$$e_a=\phi_e(0)t^2/2+\phi'_e(0)+\frac{1}{2}\phi''_e(0)$$

$$=(1-\frac{L\beta_0}{a_0^*})t^2/2+L\frac{\beta_0a_1^*-\beta_1a_0^*}{a_0^{*2}}+L\beta_0[\frac{a_0^*}{2a_0^{*2}}-\frac{a_1^{*2}}{a_0^{*3}}$$

$$+\frac{L\beta_1a_1^*}{a_0^{*2}}-\frac{L\beta_2}{2a_0^*}] \qquad (32)$$

由式（30）、（31）、（32）导出：

位置跟踪误差e_0为零的条件是：

$$L=\frac{a_0^*}{\beta_0} \qquad (33)$$

速度跟踪误差e_v为零的条件是：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} L = \dfrac{a_0^*}{\beta_0} \\ \dfrac{\beta_0}{\beta_1} = \dfrac{a_0^*}{a_1^*} \end{cases} \qquad (34)$$

加速度跟踪误差e_a为零的条件是：

$$\begin{cases} L = \dfrac{a_0^*}{\beta_0} \\ \dfrac{\beta_0}{\beta_0} = \dfrac{a_0^*}{a_1^*} \\ \dfrac{\beta_0}{\beta_2} = \dfrac{a_0^*}{a_2^*} \end{cases} \qquad (35)$$

三、工程设计的具体步骤及举例

利用《现代控制理论》中的极点配置原理进行工程设计时，具体步骤大致归纳如下：

（1）建立系统的数学模型

根据用户对系统提出的要求以及使用条件，环境等各种因素，合理地确定系统的性能指标。然后确定好初步方案，选择元部件，拟定整个系统的开环原理路线路图。根据线路图用解析法或实验法找出每个元部件的传递函数，进而得出整个开环系统的数学模型——传递函数。

（2）化系统的输入—输出频域描述为状态空间表达式

设单输入——单输出线性定常系统的传递函数一般表达式为

$$W(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \cdots\cdots + b_{n-1} S + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} S + a_n} \qquad (36)$$

据据系统的传递函数找其相应的状态空间表达式，由于选取的状态变量不同，状态空间表达式的形式也不是唯一的。如果选取的状态变量在物理上是可测量的，那么在形成状态反馈时就很方便。相反，选取的状态变量在物理上是不可测量的，为了形成状态反馈，就必须采用状态观测器重构状态，这就会使系统的结构变得更复杂些。另外，选取不同的状态变量构成状态反馈后，系统所具有动特性的优劣也不会一样的。因此就需要进行比较，全面权衡，择其适合者。

下面介绍几种形式的状态空间表达式

1°能控规范型

设 $$W(S) = \frac{\beta_{n-1} S^{n-1} + \beta_{n-2} S^{n-2} + \cdots + \beta_1 S + \beta_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0} \qquad (37)$$

则

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + bu \\ Y(t) = CX(t) \end{cases} \qquad (38)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中 $A=\begin{pmatrix} 0 & \vdots & I_{n-1} \\ -a_0 & \vdots & -a_1 \cdots\cdots -a_{n-1} \end{pmatrix}$ n×n维矩阵

$b=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，n×1维输入阵

$C=[\beta_0\beta_1\cdots\cdots\beta_{n-1}]$ 1×n维输出矩阵

$X=[X_1、X_2\cdots\cdots、X_n]^T$ ——n维列向量

u一输入量，标量。

y一输出量，标量。

2°能观规范型

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+bu \\ Y(t)=CX(t)\end{cases}$$

式中 $b=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}$ $C=[0、0\cdots\cdots1]$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ I_{n-1} & -a_1 \\ & \vdots \\ & -a_{n-1}\end{pmatrix}$$

除此以外，还有对角规范型及约当规范型等。

（3）判断系统的能控性

因为只有系统的状态完全能控，才能任意配置系统的极点：

设 $\begin{cases}\dot{X}+AX+bu \\ Y=CX\end{cases}$ （39）

若能控性矩阵$\theta k=[b\vdots Ab\vdots\cdots\vdots A^{n-1}b]$满秩

即$r_ank[b\vdots Ab\cdots\vdots A^{n-1}b]=n$则状态完全能控【证明略】

（4）根据确定的性能指标，确定闭环系统的希望极点

对于二阶系统超调量σ_P、峰值时间t_p和过渡过程时间ts与系统闭环极点的位置有严格的数学表达式［式（7）（8）(9)(10)］，当性能指标给定后，就可根据公式算出或由曲线（图三、图四）查出极点的位置，从而确定了希望极点。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对于高阶系统应用主导极点的概念，将它用一个由一对共轭复数$S_{1,2}=有-\sigma\pm j\omega_d$为主导极点所决定的二阶系统来近似。这里应该注意的是除主导极点外，系统还其它极点和零点，而零点的形态通过状态反馈后仍不改变。这些零，极点的存在都将对系统的性能产生影响。特别是应该注意到应用主导极点的概念是有条件的，即在它的周围无零点存在，且其它极点离虚轴的距离都要比主导极点离虚轴的距离大五倍以上。如果根据性能指标所确定的希望极点与系统的零点很接近，在这种情况下就得先使用一个校正环节把那个与主导极点相接近的零点消除，否则是违背了主导极点的条件。另外零点的存在使过渡过程的峰值时间t_p减小，从而提高了系统反应控制信号的快速性，但也使系统的超调量σ_p增大，使系统的阻尼性变坏。主导极点以外的极点存在，对系统产生的影响与零点的影响恰相反。所以在配置系统的零、极点时要很好地处理这些关系。

希望极点确定后，就可算出闭环系统的特征多项式，即

$$f^*(S)=\prod_{i=1}^{n}(S-\lambda_i)=S^n+a^*_{n-1}S^{n-1}+\cdots\cdots+a_1^*S+a_0^* \qquad (40)$$

式中λ_i $(i=1、2\cdots\cdots n)$是希望极点。

(5)把由传递函数得来的状态空间表达式化成能控规范型，并确定其变换阵T^{-1}

设系统$\overline{\Sigma}=(\overline{A}、\overline{b}、\overline{C})$为

$$\begin{cases}\dot{\overline{X}}(t)=\overline{A}\overline{X}(t)+\overline{b}u(t)\\ y(t)=\overline{C}\overline{X}(t)\end{cases} \qquad (41)$$

其传递函数$W(S)=\dfrac{\beta_{n-1}S^{n-1}+\beta_{n-2}S^{n-2}+\cdots+\beta_1S+\beta_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0}$ (42)

特征多项式为$\det[SI-\overline{A}]=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0$

经非奇异变换阵T

$$T=[\overline{A}^{n-1}\overline{b}\vdots\overline{A}^{n-2}\overline{b}\vdots\cdots\vdots\overline{b}]\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ a_{n-1} & 1 & \iddots & \\ \vdots & & \iddots & 1\\ \vdots & a_{n-1} & & \\ a_1 & \cdots\cdots & a_{n-1} & 1\end{pmatrix}$$

变换后，得能控规范型

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases} \qquad (43)$$

其中$\overline{x}(t)=Tx(t)$

$$A=T^{-1}\overline{A}T=\begin{pmatrix}0 & \vdots & Iu^{-1}\\ -a_0 & -a_1 & -a_{n-1}\end{pmatrix} \qquad (44)$$

$$b=T^{-1}\overline{b}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \qquad (45)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$c=\bar{c}\bar{T}=[\beta_0、\beta_1\cdots\cdots,\ \beta^n{}_{-1}] \tag{46}$$

且$\beta_{n-1}=\bar{b}\,\bar{c}$

$$\beta_{n-2}=c(\bar{Ab}+a_{n-1}\bar{b})$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_0=\bar{c}(\bar{A}^{n-1}\bar{b}+a_{n-1}\bar{A}^{n-2}\bar{b}+\cdots+a_1\bar{b})$$

由能控规范型导出它的特征多项式

$$\det[SI-A]=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0 \tag{47}$$

（6）对能控规范型状态空间表达式确定状态反馈阵

由于受控系统的极点并不是希望极点，如果已判定系统是完全能控的，那么就可以通过状态反馈进行极点配置，使闭环系统的极点处于希望极点的位置上。由能控规范型确定规范状态反馈阵为：

$$K=[\overset{*}{a_0}-a_0,\ \overset{*}{a_1}-a_1\cdots\cdots\overset{*}{a_{n-1}}-a_{n-1}] \tag{48}$$

而对于受控系统$\bar{\Sigma}=(\bar{A},\ \bar{b},\ \bar{c})$其状态反馈阵就成为

$$\bar{K}=KT^{-1} \tag{49}$$

（7）确定输入变换阵L，以满足静态指标的要求

由第二节的分析中已得出

消除位置误差的条件是—

$$L=\frac{a_0^*}{\beta_0} \tag{50}$$

消除速度误差的条件是—

$$\begin{cases}\dfrac{\beta_0}{\beta_1}=\dfrac{a_0^*}{a_1^*}\\ L=\dfrac{a_0^*}{\beta_0}\end{cases} \tag{51}$$

消除加速度误差的条件是——

$$\begin{cases}L=\dfrac{a_0^*}{\beta_0}\\ \dfrac{\beta_0}{\beta_1}=\dfrac{a_0^*}{a_1^*}\\ \dfrac{\beta_0}{\beta_2}=\dfrac{a_0^*}{a_2^*}\end{cases} \tag{52}$$

举例：

给定受控系统的递传函数

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$W(S)=\frac{1}{S(0.05S+1)(0.01S+1)}$$

要求系统满足下列品质指标：

1.静态位置误差$e_p=0$

静态速度误差$e_V\leqslant 0.06$

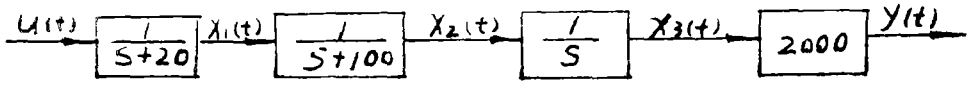
2.超调量σ不超过30%

3.过渡过程时间$t\leqslant 0.05$秒

设计过程如下：

（1）由传递函数求状态空间表达式

$$W(S)=\frac{1}{S(0.05S+1)(0.01S+1)}=\frac{2000}{S(S+20)(S+100)}$$



图六

根据传递函数是由四个环节串联而成的特点，选取每个环节的输出作为状态变量，如上图所示。

于是得状态空间表达式为

$$\dot{X}(t)=\begin{vmatrix}\dot{X}_1(t)\\ \dot{X}_2(t)\\ \dot{X}_3(t)\end{vmatrix}=AX(t)+bu(t)$$

$$=\begin{vmatrix}-20 & 0 & 0\\ 1 & -100 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\\ X_3(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1\\ 0\\ 0\end{vmatrix}u(t)$$

$$Y(t)=X(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2000\end{bmatrix}\begin{vmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\\ X_3(t)\end{vmatrix}$$

$$=2000X_3(t)$$

（2）判断系统的能控性

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

能控性矩阵$Q_k = [b : Ab : A^2b] = \begin{pmatrix} 1 & -20 & 400 \\ 0 & 1 & -120 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\gamma_{ank}Q_k = 3$，所以系统完全能控

（3）根据品质指标确定闭环系统的希望极点。

由于系统$\Sigma = (A,b,c)$是一个三阶系统，我们用一个二阶系统来近似地代替，这个二阶系统应满足给定品质指标。由$\sigma p = 30\%$查曲线（图四）得

$$\gamma = \frac{\sigma}{\omega d} = 0.37$$

由$ts \approx \frac{3}{\sigma}$ （$\Delta = 0.05$）得

$$\sigma = \frac{3}{ts} = \frac{3}{0.5} = 6$$

$$\therefore \omega d = \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{6}{0.37} = 16.22$$

一对共轭复数的闭环主导极点为

$$S_{1,2} = -\sigma \pm j\omega d = -6 \pm j16.22$$

选取第三极点（n阶系统要选取n个希望极点）

$$S_3 = 10\sigma = -60$$

所选取这对主导极点S_1、S_2，其周围无零点，且第三极点S_3离虚轴的距离是主异极点离虚轴距离的10倍，符合主导极点的条件。

根据所确定的希望极点可导出希望的闭环特征多项式：

$$f^*(S) = \prod_{i=1}^{3}(S-\lambda i) = [S-(-6+j16.22)][S-(-6-j16.22)] \times [S-(-60)]$$

$$= S^3 + 72S^2 + 1019S + 17940$$

$a_0^* = 17940$　　$a_1^* = 1090$　　$a_2^* = 72$

（4）把状态空间表达式化成能控规范型，并确定其变换阵T^{-1}

受控系统的传递函数$W(S) = \frac{2000}{S(S+20)(S+100)}$

$$= \frac{200}{S^3 + 120S^2 + 2000S}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其特征多项式

$$f(S)=S^3+120S^2+2000S$$

$a_0=0 \qquad a_1=2000 \qquad a_2=72$

于是得能控规范型

$$\begin{cases}\dot{\overline{X}}(t)=\overline{A}\,\overline{X}(t)+\overline{b}u(t)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2000&-120\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{X}_1(t)\\\overline{X}_2(t)\\\overline{X}_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u(t)\\ Y(t)=\overline{C}\,\overline{X}=\begin{bmatrix}2000&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\overline{X}_1(t)\\\overline{X}_2(t)\\\overline{X}_3(t)\end{pmatrix}\end{cases}$$

确定变换阵T^{-1}

设：

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix}$$

由$\overline{b}=T^{-1}b$，$\overline{C}T^{-1}=C$，和$\overline{A}T^{-1}=T^{-1}A$

可解得

$$\begin{cases}t_{11}=0 & t_{12}=0 & t_{13}=1\\ t_{21}=0 & t_{22}=1 & t_{23}=0\\ t_{31}=1 & t_{32}=-100 & t_{33}=0\end{cases}$$

由能控规范型确定的状态反馈阵$\overline{K}$

$$\overline{K}=\begin{bmatrix}a_0^*-a_0, & a_1^*-a_1, & a_2^*-a_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}17940 & -981 & -48\end{bmatrix}$$

对受控系统$\Sigma=(A,b,c)$，其反馈阵为K

$$K=\overline{K}T^{-1}=\begin{bmatrix}17940&-981&-48\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&-100&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-48 & 3819 & 17940\end{bmatrix}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

（5）确定输入变换阵L

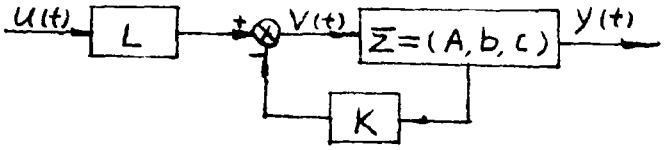


图 七

要求$e_P = 0$

$$\therefore L = \frac{a_0^*}{\beta_0} = \frac{17940}{2000} = 8.97$$

计算ev

$$ev = L\frac{\beta_0 a_1^* - \beta_1 a_0^*}{a_0^{*2}} = 8.97 \times \frac{2000 \times 1019}{17940^2} = 0.056 < 0.06$$

（6）整个系统方块图

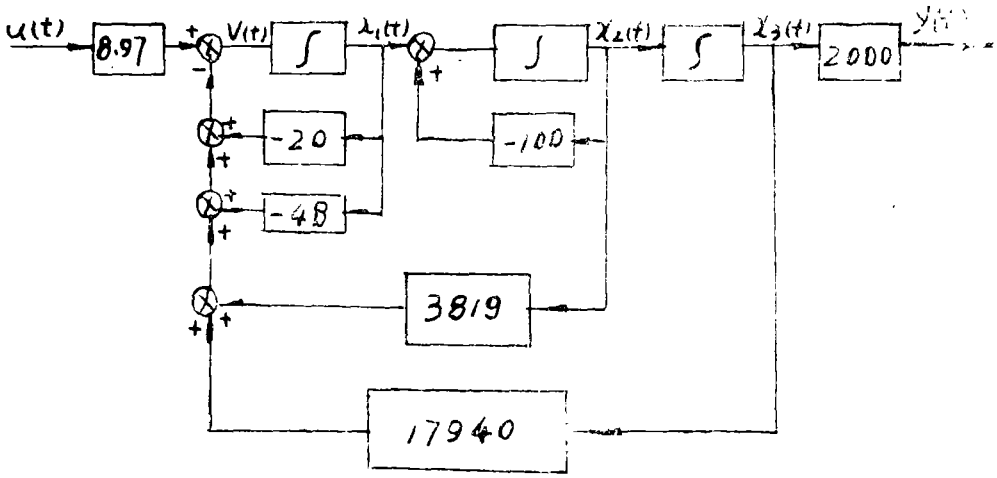


图 八

参 考 文 献

1.W. A.Wolpvich: Linear Multivariable Systems, 19)4

2.A.IYER and R.SAEKS: FeedbacK system desiyn: the pole placement problem; International Journalof control voL 39 No.3MAR 1984

3.郑大钟：线性系统按转移矩阵配置的统一算式；自动化学报 voL、8 No·3 1982

4.绪方胜彦：现代控制工程 科学出版社 1976年

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net