

自补图的构造

数学教研室 周尚超

摘要

本文着重讨论了自补图的结构,主要结果是:

- (1) 定义了标准自补图,构造了所有标准自补图。证明了 $4n$ 阶标准自补图有 2^{2n} 个,互不同构的不多于 2^{2n-2} 个。
- (2) $4n$ 阶标准自补图是拟正则图,即有 $2n$ 个顶点的度为 d ,其余顶点的度为 $\bar{d}$ 。
($d + \bar{d} = 4n - 1, n \leq d \leq 2n - 1$)
- (3) 定义了SSG矩阵和自补图的SSG积,证明了任意自补图是若干个标准自补图的SSG积,
- (4) $4n$ 阶自补图与 p 阶自补图的SSG积是 $4n + p$ 阶自补图。

定义1 有 $2n$ 个顶点的度为 d ,其余顶点的度为 $\bar{d}$ 的 $4n$ 阶自补图称为 d 度拟正则图,这里 $d + \bar{d} = 4n - 1, d \leq 2n - 1$ 。

命题1 若 G 是 d 度拟正则 $4n$ 阶自补图,则 $d \geq n$ 。

证明,在 $GU\bar{G}$ ($=K_{4n}, K_{4n}$ 是 $4n$ 阶完全图)中把度为 d 的顶点与度为 $\bar{d}$ 的顶点邻接的边有 $4n^2$ 条,因此在 G 中有 $2n^2$ 条边把度为 d 的顶点与度为 $\bar{d}$ 的顶点邻接,故有 $d \geq n$ 。

命题2 设 G 是 p 阶自补图, V_i 是 G 的度为 i 的顶点集,则 G 有下列性质:

- 1) $|V_i| = |V_{p-i-1}|$ 。
- 2) G 是连通图。
- 3) $|V_0| = 0$
- 4) $|V_i| \leq \min(2i, 2n) \quad (1 \leq i \leq 2n-1)$ 。
- 5) G 至多有两个端点。

证明 1) 2) 3) 是显然的。4) 若 $|V_i| = 3$,则 $|V_{p-i-1}| = 3$,有3个顶点的

本文于1985年1月28日收到

度为 $p-2$, 这三个顶点中的每一个至少和两个度为1的顶点邻接, 这样3个度为1的顶点的度之和 ≥ 6 , 矛盾。因此 $|V_1| \leq 2$ 。类似地可证 $|V_i| \leq 2i$ ($i \leq 2n-1$)

5) 度为1的顶点叫端点, 由4) 即得5)。

命题3 设 G 是自补图, f 是同构: $G \rightarrow \overline{G}$. 若 U 是 G 的顶点集 V 的子集, $f(U) = U$, 则 U 导出的子图是自补图。

图 G 的导出子图 G_1 是指, G_1 中两个顶点邻接当且仅当它们在 G 中邻接。

系1 若 V_i 是自补图 G 的度为 i 与度为 $p-i-1$ 的顶点的集, 则 V_i 导出的子图是自补图, 若干个这样的顶点集的并也导出自补子图。

系2 V_i, V_{p-i-1} 是自补图 G 的度为 i 和度为 $p-i-1$ 的顶点集, 则 $|V_i|$ 是偶数 ($i \leq 2n-1$)

证明 $V_i \cup V_{p-i-1}$ 导出自补子图, 而 $|V_i| = |V_{p-i-1}|$, $|V_i \cup V_{p-i-1}| \equiv 0 \pmod{4}$, 所以 $|V_i|$ 是偶数。

系3, 若 $p = 4n+1$, 则 $|V_{2n}| \equiv 1 \pmod{4}$

证明, 由系2, 所有度不是 $2n$ 的顶点的个数是偶数, 故 $|V_{2n}| \equiv 1 \pmod{2}$, 又 $f(V_{2n}) = V_{2n}$, V_{2n} 导出自补子图, 故 $|V_{2n}| \equiv 1 \pmod{4}$

系4 设 f 是同构: $G \rightarrow \overline{G}$, $f = f_1 f_2 \cdots f_m$ 是 f 的互不相交的循环分解, $f_1 = (a_1 a_2 \cdots a_t)$, 则 $\{a_1, a_2, \cdots, a_t\}$ 导出自补子图 $G_i, f_i: G_i \rightarrow \overline{G_i}$ 。

系5 设 f 是自补图的同构, $f: G \rightarrow \overline{G}$, $f = f_1 f_2 \cdots f_m$ 是 f 的不交的循环分解, 则 f 的每个因子的长度 $\equiv 0 \pmod{4}$, 而至多只有一个因子的长度为1。

证明, 由系4, 若 $f_1 = (a_1 a_2 \cdots a_t)$, 知 $t \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $t \equiv 1 \pmod{4}$ 。若 $t \equiv 1 \pmod{4}$ 而 $t > 1$ 。 a_1 与 a_2 在 G 中邻接 $\rightarrow a_2$ 与 a_3 在 $\overline{G}$ 邻接 $\rightarrow a_2$ 与 a_3 在 G 不邻接 $\rightarrow a_3$ 与 a_4 在 $\overline{G}$ 不邻接 $\rightarrow a_3$ 与 a_4 在 G 邻接 $\rightarrow a_{1+2k}$ 与 a_{2+2k} 在 G 邻接 $\rightarrow a_{1+2k+1}$ 与 a_{2+2k+1} 在 G 不邻接 $\rightarrow a_1$ 与 a_2 在 G 中不邻接, 矛盾。因此若 $t \equiv 1 \pmod{4}$ 必有 $t=1$ 。即 a_1 是 f 的不动点, 若 f 有多于1个不动点, 例如 i, j , 若 i, j 在 G 邻接, 则 i, j 在 $\overline{G}$ 不邻接这与 f 是同构矛盾。因此 f 最多只有一个不动点。

系6, $f: G \rightarrow \overline{G}$, G 有 $4n+1$ 个顶点, 则 f 恰有一个不动点。若 G 有 $4n$ 个顶点, 则 f 没有不动点。

定义2 若 G 是 $4n$ 阶自补图, 且存在一个同构 $f: G \rightarrow \overline{G}$, f 是 $4n$ 项循环, 则称 G 是标准自补图。

设 G 的顶点集为 V , $V = \{1, 2, \cdots, 4n\}$, $V_1 = \{1, 3, \cdots, 4n-1\}$, $V_2 = \{2, 4, \cdots, 4n\}$,

$$A = \{d_1, d_2, \cdots, d_m | d_i + d_j \equiv 2 \pmod{4n}, d_i \in V_2\}$$

V_2 的这种子集称为A型集。

引理1 V_2 的 Λ 型子集有 2^n 个。

用 $A+K$ 表示集合 $\{d+K \mid d \in A, \text{按模}4n\text{运算}\}$

引理2 若 $d \in \Lambda$, 则 $2 \notin A+d$, 若 $d \in V_2$, $d \notin \Lambda$, 则 $2 \in A+d$

引理3 $A+2n$ 和 $\overline{\Lambda}$ 都是 Λ 型集。这里 $\overline{\Lambda} \cup \Lambda = V_2$, $A \cap \overline{\Lambda} = \Phi$ (空集)。

定义3 邻接 i 与 j 的边的长度定义为 $|i-j|$ 与 $4n-|i-j|$ 中较小者。

$B = (b_1 b_2 \cdots b_n)$ 是 n 维向量 $b_i = 0$ 或 1 。

把向量 B 的分量是 1 的变为 0 , 是 0 的变为 1 , 这样得到的向量记为 $\overline{B}$ 。

$h(B) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$G_1(B)$ 是 G 的顶点集 V_1 导出的子图, 这里 $B = (b_1 b_2 \cdots b_n)$, $b_i = 1$ 当且仅当 G_1 含有所有长度为 $2i$ 的边, $b_i = 0$ 当且仅当 G_1 不含长度为 $2i$ 的边。

类似地 $G_2(B)$ 是 V_2 导出的子图。

引理4 不同的 $G_i(B)$ 有 2^n 个 ($i=1, 2$)

引理5 $G_1(B)$ 是 $2h(B)$ 正则图, 若 $b_n=0$; $G_2(B)$ 是 $2h(B)-1$ 度正则图, 若 $b_n=1$, ($i=1, 2$)

定义4 $G(A, B)$ 是这样的一个图, $G(A, B)$ 的奇数顶点集导出的子图是 $G_1(B)$, 偶数顶点集导出的子图是 $G_2(\overline{B})$, $G(A, B)$ 的奇数顶点与偶数顶点是这样邻接的, 与 $1+2K$ 邻接的顶点集是 $A+2K$, 这里 A 是 V_2 的 Λ 型子集。

定理1 $G \cong G(A, B)$ 是 $4n$ 阶标准自补图, 以 $4n$ 项循环 $f = (123 \cdots 4n)$ 为同构: $G \rightarrow \overline{G}$ 。以 f 为同构的 $4n$ 阶标准自补图有 2^{2^n} 个。

证明 由引理1, V_2 的 Λ 型集有 2^n 个。 n 维零壹向量 B 有 2^n 个, 因此 $G(A, B)$ 有 2^{2^n} 种不同的画法。

若 $i, K \in V_1$, (i, K) 是 G_1 的长为 $2j$ 的边, 则 G_2 不含长为 $2j$ 的边, 即 $i+1$ 与 $K+1$ 不邻接, 因此在 $\overline{G}$ 中 $i+1$ 与 $j+1$ 邻接, 即 $f(i)$ 与 $f(K)$ 邻接。反之若 i 与 K 不邻接, 可知 $f(i)$ 与 $f(k)$ 不邻接。

以下要证奇数顶点与偶数顶点的邻接情况。先证与 $2+2k$ 邻接的奇数顶点集是 $1+2k + \overline{A}$ 。

若 $d \in V_2$, $d \notin \Lambda$, 从引理2, $2 \in A+d$, $2+2k \in A+d+2k$, $A+d+2k$ 是与 $1+2k+d$ 邻接的顶点集, 因此 $2+2k$ 与 $1+d+2k$ 邻接, 即 $1+2k + \overline{A}$ 是与 $2+2k$ 邻接的顶点集

若 $d \in \Lambda$, 则 $2 \notin A+d$, $2+2k \notin A+d+2k$, $2+2k$ 与 $1+d+2k$ 不邻接。由此得出与 $2+2k$ 邻接的顶点集是 $1+2k + \overline{A}$ 。

若 $1+2k$ 与 $2j$ 邻接, 则 $2j \in A+2k$, $2j+1 \in A+2k+1$, $2j+1 \notin \overline{A} + 2k+1$, $2j+1$ 与 $2+2k$ 不邻接, 因此在 $\overline{G}$ 中 $2j+1$ 与 $2+2k$ 邻接, 即 $f(2j)$ 与 $f(1+2k)$ 邻接。同理可证, 若 $1+2k$ 与 $2i$ 不邻接, 则 $f(1+2k)$ 与 $f(2j)$ 不邻接。这就证明了 f 是同构: $\overline{G} \rightarrow G$ 。

下面要证, 若 G 是以 f 为同构的图, 则一定存在 Λ 型集与向量 B , 使得 $G = G(A, B)$,

在 G 中 1 和 i 邻接 $\rightarrow$ 在 $\overline{G}$ 中 2 和 $i+1$ 邻接 $\rightarrow$ 在 G 中 2 和 $i+1$ 不邻接 $\rightarrow$ 在 $\overline{G}$ 中 3 和 $i+2$ 不邻接 $\leftarrow$ 在 G 中 3 和 $i+2$ 邻接 $\rightarrow \cdots$, 简言之, 在 G 中:

1 和 i 邻接 $\leftrightarrow$ $1+2k$ 和 $i+2k$ 邻接

$\leftrightarrow$ $1+2k+1$ 和 $i+2k+1$ 不邻接

特别地

1 和 $2j$ 邻接 $\longleftrightarrow 1 + (4n-2j) + 1$ 和 $2j + (4n-2j) + 1$ 不邻接, 即 $4n-2j+2$ 与 1 不邻接。

这说明和 1 邻接的顶点集是 A 型集, 而和 $1+2k$ 邻接的是 $A+2k$ 。 G_1 含有长度为 $2j$ 的边当且仅当 G_2 不含长度为 $2j$ 的边, 因此 $G_1 - G_1(B)$, 而 $G_2 - G_2(\overline{B}) - G - G(A, B)$ 。 证毕。

例 1 $V = \{1, 2, 3, 4\}$ 。4 阶标准自补图有下列 4 个。它们都是同构的。

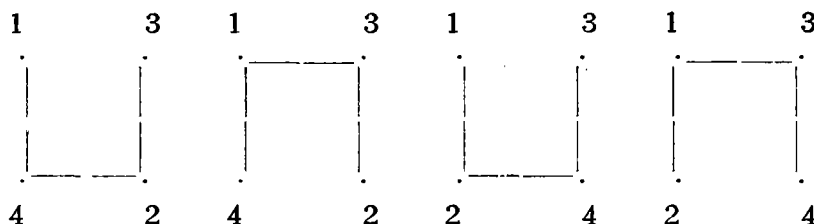


图 1

定理 2 $4n$ 阶标准自补图互不同构的至多有 2^{2n-2} 个。

证明 $\overline{G(A, B)} = G(\overline{A}, \overline{B})$, $G(A, B) \cong G(\overline{A}, \overline{B})$, ($\cong$ 表示同构)。

下面要证: $G(A, B) \cong G(\overline{A}, B)$ 。令 $g(i) = 2-i$ 是 $4n$ 个顶点的一一对应, 对顶点用模 $4n$ 记法。设 i, j 在 $G(A, B)$ 邻接, i, j 都是奇数顶点, l 是边 (i, j) 的长, 则 l 也是边

$(2-i, 2-j)$ 的长, 因此 $(2-i, 2-j)$ 也是 $G(A, B)$ 的边, 即 $g(i)$ 与 $g(j)$ 在 $G(\overline{A}, B)$ 中邻接, 反之, 若 i, j 在 $G(A, B)$ 中不邻接, 则可推出 $g(i)$ 与 $g(j)$ 在 $G(\overline{A}, B)$ 中不邻接。若 i, j 都是偶数顶点, 证明是类似的。若 $1+2k$ 与 $2j$ 在 $G(A, B)$ 中邻接, 则 $2j \in A+2k$, $2j-2k \in A$, 据引理 2, $2 \notin A+2j-2k$, $2k-2j+2 \in \overline{A}$, $2-2j \in \overline{A}-2k$, 在 $G(\overline{A}, B)$

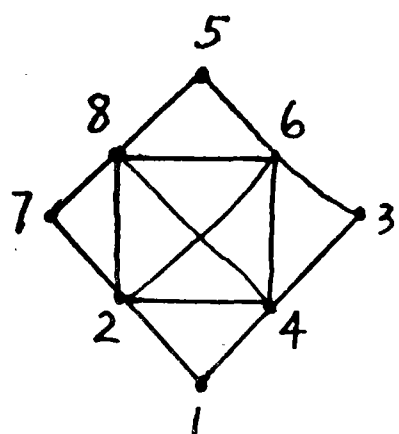
中与 $\overline{A}-2k$ 邻接的顶点集是 $1-2k$, 即 $2-2j$ 与 $1-2k$ 邻接, 即 $g(2j)$ 与 $g(1+2k)$ 邻接。因此 g 是同构: $G(A, B) \rightarrow G(\overline{A}, B)$, 而 $G(A, B) \cong \overline{G(A, B)} = G(A, \overline{B})$ 。这样, $G(A, B)$, $G(\overline{A}, \overline{B})$, $G(\overline{A}, B)$, $G(A, \overline{B})$ 这 4 个图都是以 $f = (12 \cdots 4n)$ 为同构: $G \rightarrow \overline{G}$ 且任两个都不相等。因此在 2^{2n} 个图中, 把同构的划为一组, 每组至少 4 个。因此互不同构的不多于 2^{2n-2} 个。

定理 3 $4n$ 阶标准自补图是 d 度拟正则图。这里 $d = \min(n+2h-1, 3n-2h)$ 或 $= \min(n+2h, 3h-2h-1)$, $n \leq d \leq 2n-1$ 。

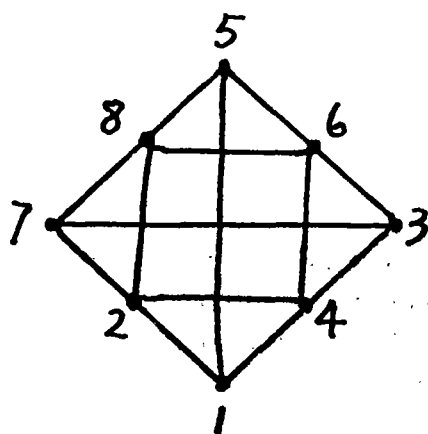
证明 设 $G(A, B)$ 是 $4n$ 阶标准自补图, 由引理 5, $G_1(B)$ 是 $2h$ 或 $2h-1$ 度正则图, 每个奇数顶点与 n 个偶数顶点邻接, 因此奇数顶点的度是 $n+2h-1$ 或 $n+2h$, 偶数顶点的度是 $3n-2h$ 或 $3n-2h-1$ 。 $0 \leq h \leq n$, 所以 $n \leq d \leq 2n-1$ 。

例 2 4 个 8 阶标准自补图。 $A_1 = \{2, 4\}$, $A_2 = \{2, 6\}$, $A_3 = \{4, 8\}$, $A_4 = \{6, 8\}$ 是 4 个 A 型集, $A_1 = \overline{A_4}$, $A_2 = \overline{A_3}$ 。 $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$, $B_3 = (1, 0)$, $B_4 = (1, 1)$,

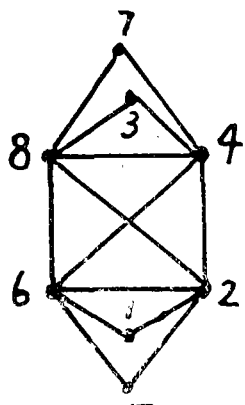
$B_1 = \overline{B_1}$, $B_2 = \overline{B_2}$. 取 A_1 , A_2 与 B_1 , B_2 的不同组合, 就得到 4 个 8 阶自补图



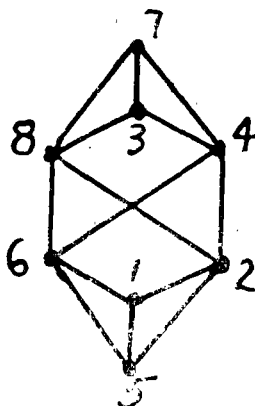
$G(A_1, B_1)$



$G(A_1, B_2)$



$G(A_2, B_1)$



$G(A_2, B_2)$

图 2

定理 3 的逆不成立。

例 3 下面是两个 3 度拟正则 8 阶自补图, 但不是标准自补图。

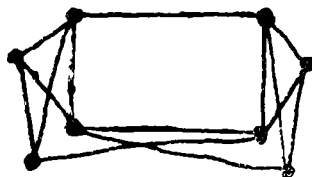
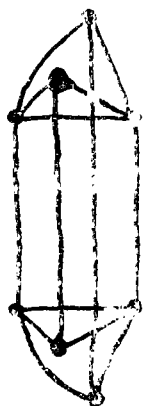


图 3

定义5 令 $S \equiv t \equiv 0 \pmod{4}$, $m = (s, t)$ 是 S, t 的最大公约数, $S \times t$ 矩阵如下

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_m & \cdots & d_1 & d_2 & \cdots & d_m \\ \overline{d_m} & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_{m-1}} & \cdots & \overline{d_m} & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{d_2} & \overline{d_3} & \cdots & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_2} & \overline{d_3} & \cdots & \overline{d_1} \end{pmatrix}$$

其中 $d_i = 0$ 或 1 , $d_i + \overline{d_i} = 1$, 除去偶数行元素上方有“—”号外, D 是循环矩阵, D 称为标准自补图复合矩阵, 简称SSG矩阵。

命题4 若 D 是 $s \times t$ SSG矩阵, $D = (d_{ij})$, 则 D 有下列性质:

- 1) $\overline{D} = (\overline{d_{ij}})$ 是SSG矩阵, $\overline{\overline{D}} = D$
- 2) D' 是 $t \times S$ SSG矩阵
- 3) 对所有 i, j , $d_{ij} = 1 \iff d_{i+1, j+1} = 0$ (对下标分别用模 S 和模 t 记法)。

4) 不同的 D 有 2^m 个, D 由向量 $(d_1 d_2 \cdots d_m)$ 唯一决定。这里 $m = (s, t)$ 。

命题5 若 D 是 $S \times t$ 矩阵, $S \equiv t \equiv 0 \pmod{4}$ D 的元素是 0 或 1 , 对所有 i, j , $d_{ij} = 0 \iff d_{i+1, j+1} = 1$, 则 D 是SSG矩阵。

证明, 设 $S \leq t$, $m = (S, t)$, $t = nm$, $S = lm$, $nS = lt$ 。设 D 的第一行为 $(e_1, e_2, \cdots, e_t)$, 则第二行为 $(\overline{e_t}, \overline{e_1}, \cdots, \overline{e_{t-1}})$ 。故除偶数行元素上方有“—”号外, D 是循环矩阵。

据循环性, $d_{33} = \overline{e_1} \rightarrow d_{1, s+1} = \overline{e_{s+1}} = \overline{e_1} \rightarrow d_{3, 2s} = \overline{e_1} \rightarrow \cdots \rightarrow e_{(n-1)s+1} = \overline{e_1}$ 。

由 $ns = lt$ 知 $\{0, s, 2s, \cdots, (n-1)s\} = \{0, lm, \cdots, (n-1)lm\}$ 是模 t 的 n 个不同的数, 又都是 m 的倍数, 又 $(l, n) = 1$, 知它们是 m 的 n 个不同的倍数。故得 $\{0, s, 2s, \cdots, (n-1)s\} = \{0, m, 2m, \cdots, (n-1)m\} \pmod{t}$ 。即 $e_{m+1} = e_{2m+1} = \cdots = e_{(n-1)m+1} = e_1$, 同理可证 $e_{ki+1} = e_1$ ($k = 0, 1, \cdots, (n-1), i = 2, \cdots, m$)。 D 是SSG矩阵。

定义6 只有一个顶点 V_0 的图 K_1 是标准自补图。 1×1 矩阵 $(0), (1)$ 也称为SSG矩阵,

定义7 设 G_1, G_2 是标准自补图, $|G_1| = S, |G_2| = t, (s, t) \equiv 1$ 。 D 是 $s \times t$ SSG矩阵, 把 G_1 与 G_2 按下列方程式邻接, a_i 与 b_j 邻接 $\iff d_{ij} = 1$ 。这里 $\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}, \{b_1, b_2, \cdots, b_t\}$ 分别是 G_1 与 G_2 的顶点集, $f_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_s), f_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_t)$ 。 f_i 是同构 $G_i \rightarrow \overline{G_i}$ ($i = 1, 2$)。这样得到的图称为 G_1 与 G_2 的SSG积。或称 G_1 与 G_2 以SSG方式

邻接。记为 $G_1 \times G_2$, 简记为 $G_1 \times G_2$ 。

命题6 设 G_1, G_2 是标准自补图, 则SSG积有下列性质。

- 1) $\begin{matrix} D & D' \\ G_1 \times G_2 = & G_2 \times G_1 \end{matrix}$
- 2) $\begin{matrix} D & \overline{D} \\ G_1 \times G_2 = & \overline{G_1} \times \overline{G_2} \end{matrix}$
- 3) G_1 与 G_2 的邻接方式有 2^m 种, $m = (S, t)$

定义8 设 G_1 是 $4n$ 阶标准自补图, G_2 是一个顶点的平凡图。把 G_1 的所有用奇数标号的顶点与 G_2 邻接而得的图记为 $G_1 \times G_2$ 。把 G_1 的所有用偶数标号的顶点与邻接而得的记为 $G_1^{(1)} \times G_2$ 。

(0)
 $G_1 \times G_2$, 二者都称为 G_1 与 G_2 的SSG积, 或称 G_1 与 G_2 以SSG方式邻接。

定义9 设 $G_1, G_2, \dots, G_K$ 是标准自补图, 其中至多有一个是1点平凡图。把任意两个都以SSG方式邻接而得的图称 $G_1, G_2, \dots, G_K$ 的SSG积, 记为 $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_K$ 。

定理4 设 $G_1, G_2, \dots, G_K$ 是标准自补图, 其至多有一个是平凡图。则 $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_K$ 是 $\sum |G_i|$ 阶自补图。

证明, 设 $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_K$, $f_i: G_i \rightarrow \overline{G_i}$ 定义 $V(G)$ 到自身的映射 $f = f_1 f_2 \dots f_K$, $f(a_m) = f_i(a_m)$, 若 $a_m \in V(G_i)$ ($i = 1, 2, \dots, K$)

设 $a_m \in G_i, b_l \in G_j, a_m$ 与 b_l 邻接 $\rightarrow d_{m+1} = 1 \rightarrow d_{m+1} + 1 = 0 \rightarrow a_{m+1}$ 与 b_{l+1} 不邻接 $\rightarrow$ 在 $\overline{G}$ 中 a_{m+1} 与 b_{l+1} 邻接, 即 $f(a_m)$ 与 $f(b_l)$ 邻接, 反之若 a_m 与 b_l 不邻接可推出 $f(a_m)$ 与 $f(b_l)$ 不邻接, 由此即知是同构: $G \rightarrow \overline{G}$ 。

例4 10个8阶自补图, 前面已给出6个, 下面给出4个。

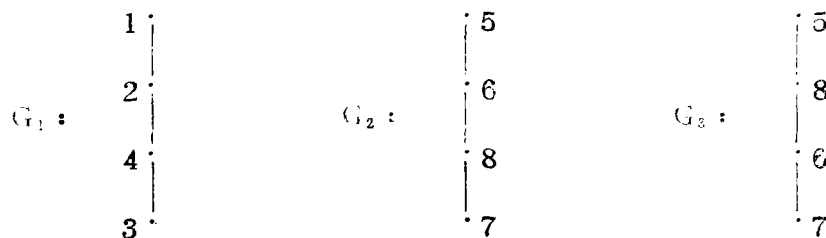


图 4

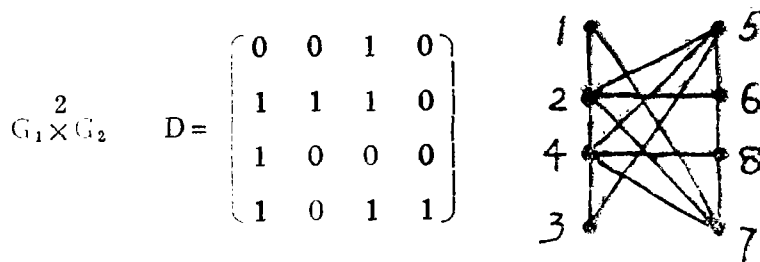


图 5

(这里把D的第一行看作二进制数2, 因此在 $\times$ 上方记2)

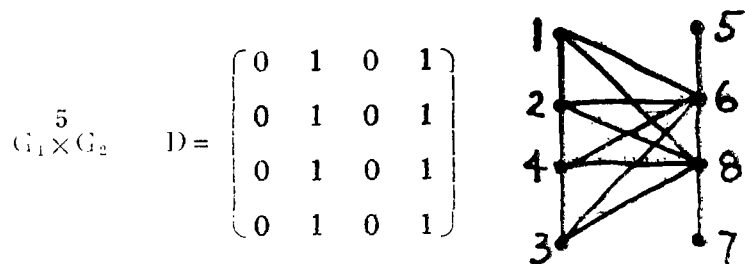


图 6

$${}_{G_1 \times G_2}^{10} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

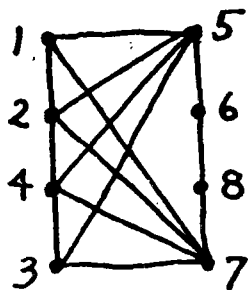


图 7

$${}_{G_1 \times G_3}^8 D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

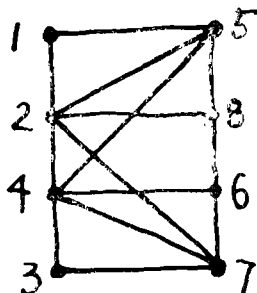


图 8

定理 5 任意自补图是其标准自补子图的SSG积。

证明, 设是自补图, $f: G \rightarrow \overline{G}$, $f = f_1 f_2 \cdots f_m$ 是 f 的互不相交的循环分解。令 G_i 是 f_i 变动的顶点的集导出的 G 标准自补子图。设 $f_i = (a_1 a_2 \cdots a_s)$, $f_i = (b_1 b_2 \cdots b_t)$, 若 a_m 与 b_1 邻接, 则记 $d_{m1} = 1$, 否则记 $d_{m1} = 0$, 这样就得到一个 $s \times t$ 矩阵 D , 易知 $d_{m1} = 0 \leftrightarrow d_{n+1, t+1} = 1$, 即 D 是SSG矩阵, G 的任意两个标准自补子图以SSG方式邻接。

定义10 令 G_1, G_2 分别是 $4n$ 阶自补图与 P 阶自补图。 $G_1 = G'_1 \times G'_3 \times \cdots \times G'_k$, $G_2 = G_1^2 \times G_2^2 \times \cdots \times G_l^2$, 把 G_1 的每个因子与 G_2 的每个因子都按SSG方式邻接而得的图称为 G_1 与 G_2 的SSG积, 记为 $G_1 \times G_2$ 。

定理 6 $4n$ 阶自补图与 P 阶自补图的SSG积是 $4n + P$ 阶自补图。

定理 7 设 G 是 $4n$ 阶自补图, $V_1 \subset V(G)$, $d_i \in V_1 \leftrightarrow d_{4n-i-1} \in V_1$, 其中 d_i 是 G 的度为 i 的顶点。 H 是 P 阶自补图则把 V_1 中的每一点都与 H 的所有顶点邻接而得的图是 $4n + P$ 阶自补图。这个图记为 $G + H$ 。

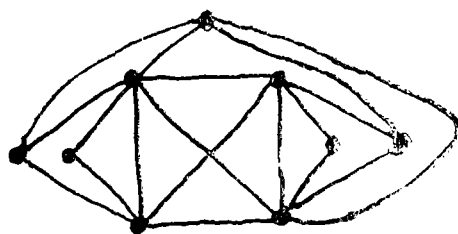
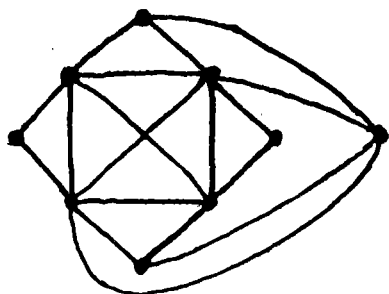
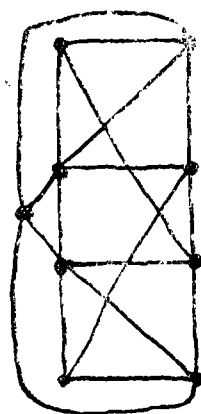
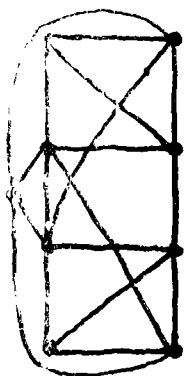
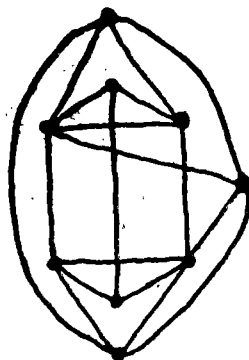
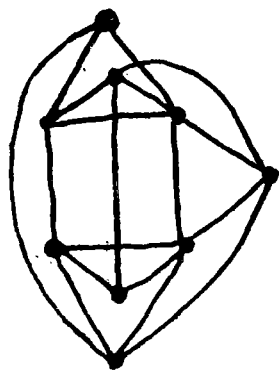
证明, 设 $f: G \rightarrow \overline{G}$, $g: H \rightarrow \overline{H}$ 。定义 fg 为 $fg(a) = f(a)$, 若 $a \in V$, $fg(a) = g(a)$, 若 $a \in V(H)$ 。若 d_i 与 h 邻接, 则 $d_i \in V_1$, $f(d_i) \notin V_1$, 即 $f(d_i)$ 与 H 不邻接, 因此在 $\overline{G} + \overline{H}$ 中 $f(d_i)$ 与 H 邻接, 即 $g(d_i)$ 与 $fg(h)$ 邻接。反之若 d_i 与 h 在 $G + H$ 中不邻接, 同理推出 $fg(d_i)$ 与 $fg(h)$ 在 $\overline{G} + \overline{H}$ 不邻接。

定理 8 设 G 是 $4n$ 阶自补图, V_1 的意义同定理 7, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \phi$, V_i 的导出子图是 G_i , ($i = 1, 2$), 则 $G_1 \cong \overline{G_2}$ 。

证明: 设 f 是同构: $G \rightarrow \overline{G}$, 由于 $f(V_1) = V_2$, 故 f 是同构: $G_1 \rightarrow \overline{G_2}$ 。

Read 给出了 P 个点的自补图的个数 S_P 的公式。(参见 [1], 223 页) 不大于 17 的 S_P 数值为 $S_4 = 1$, $S_5 = 2$, $S_8 = 10$, $S_9 = 36$, $S_{12} = 720$, $S_{13} = 5600$, $S_{16} = 703760$, $S_{17} = 11220000$ 。

例5 36个9阶自补图。用定理7叙述中的方式，例2与例3中的6个拟正则自补图与 K_1 复合得到12个9阶自补图。例4中的4个自补图与 K_1 复合得到16个。另外8个如下：



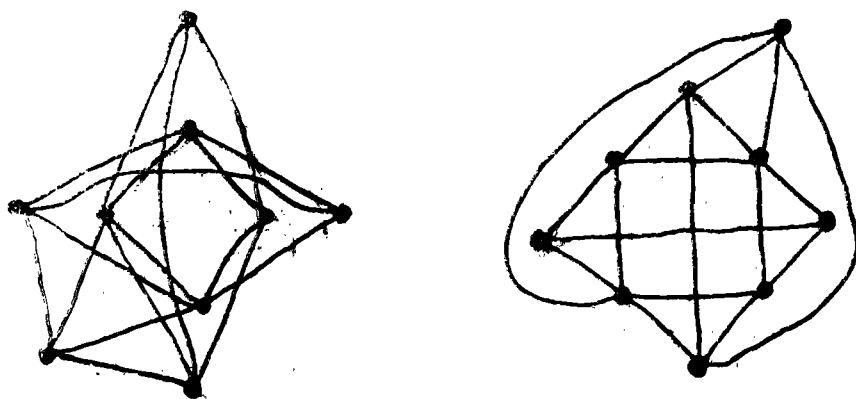


图 9

参 考 文 献

- 〔1〕 Harary F.图论, 李慰萱译, 上海科学技术出版社1979。