

关于密圈螺旋弹簧的变形分析

建 工 系 胡 宗 陵

摘 要

本文根据密圈螺旋弹簧的变形机理,用简单数学推导来分析计算弹簧在轴向力作用下的变形,并说明弹簧在变形过程中,簧杆横截面只产生刚性位移,而不绕簧杆轴线转动,与实验现象一致。

密圈螺旋弹簧在轴向拉力或压力作用下,仅沿轴向产生伸长或缩短变形。此时,弹簧簧杆横截面只产生刚性位移,而不绕簧杆轴线转动,这一现象,已得到实验证明。苏联学者С.Д.ПОНОМАРЕВ曾在弹簧上连接水平钢丝,弹簧在变形中,钢丝始终保持水平位置。国内有些高校老师,也做过类似试验,(图1);并从不同角度解释上述现象。

目前,在我国出版的材料力学教材中,关于密圈弹簧变形计算,一般采用等直圆杆扭转公式进行推导,方法简单,直观性强,且抓住了弹簧杆每个微段发生扭转变形这一本质,但是没有解释上述现象,且仔细推敲还容易产生一种错觉:“弹簧由无数个微段组成,每个微段产生扭转角,其累加结果,簧杆最后截面产生最大扭转角”。究其原因,没有区分螺旋弹簧的扭转与直杆扭转的

差异;直杆受扭仍在其原平面上,而弹簧是曲杆,各微段扭转变形时,每一圈弹簧由近乎平面曲线,变成了空间曲线,单位扭转角恰好成为空间曲线的扭率,此时,弹簧螺旋角发生改变,簧杆横截面仅产生刚体位移,而没有转动。现根据弹簧变形机理,用简单数学推导,来分析、计算弹簧的变形。

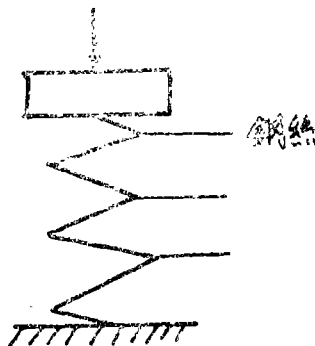


图 1

本文于1985年6月5日收到

一、弹簧的变形计算

设一密圈螺旋弹簧，受一轴向压力 P 作用，簧杆任意横截面上，将有剪力 $Q = P$ ，扭矩 $M_n = P \cdot R$ 如图2(a)；在某A处截取一微段 dS （图2(b)）， $dS = R d\theta$ ，（其中 R 为弹簧半径），当 $R \gg d$ （簧杆直径）时，这一微段可视为一直杆，忽略剪力对变形影响，在扭矩 M_n 作用下，微段A截面相对A'截面，仅产生相对扭转，其扭转角可采用等直圆杆扭转公式，即

$$d\phi = \frac{M_n dS}{GJ_p} = \frac{M_n R}{GJ_p} d\theta \quad (1)$$

式中， G ——剪切弹性模量

J_p ——簧杆横截面对簧杆轴的极惯

矩，其值为： $\frac{\pi d^4}{32}$

由于A截面相对A'截面转动，使 P 力作用点 c 产生了位移 cc' （图2），考虑到小变形，则有，

$$cc' = a \cdot d\phi$$

其垂直方向位移

$$d\lambda_n = cc'' = R \cdot d\phi \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式，得

$$d\lambda_n = \frac{M_n R^2}{GJ_p} d\theta = \frac{P R^3}{GJ_p} d\theta$$

n 圈弹簧可视为许多微段组成，则 P 力作用点 c 的垂直方向位移，可由下式求得

$$\lambda = \int_s d\lambda_n = \int_0^{2n\pi} \frac{P R^3}{GJ_p} d\theta = \frac{P R^3 2n\pi}{GJ_p} \quad (3)$$

$$\text{或} \quad \lambda = \frac{64nR^3}{Gd^4} P$$

由变形对称性，同一圈弹簧不引起 c 点的水平位移，所以，式(3)为弹簧变形的公计算式。

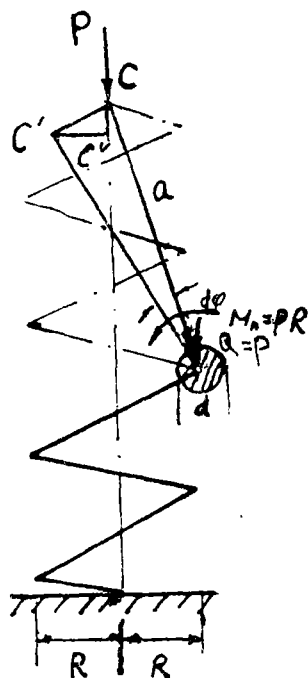


图2(a)

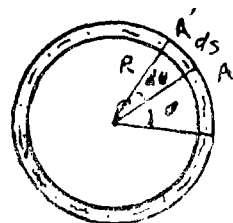


图2(b)

二、簧杆横截面刚性转动计算

簧杆各微段在扭转变形过程中, 对任一横截面产生影响的结果, 能充分说明弹簧在变形中簧杆横截面有无转动。为简单起见, 取一圈弹簧进行讨论。

在图3中, 取一微段 ds , A与A'两截面相对扭转角 $d\Phi$, 用一矢量 $\vec{n}$ 表示, 其 $|\vec{n}| = d\Phi$, 它对某一截面B产生刚体转动, 可分解为两部分:

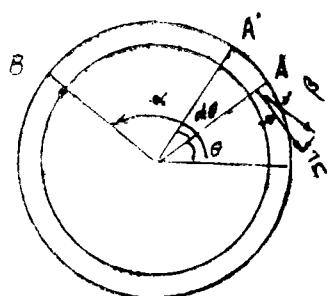


图 3

$|\vec{n}| \sin\beta$ ——使B截面绕簧杆轴线转动

$|\vec{n}| \cos\beta$ ——使B截面倾斜

由几何关系知

$$\cos\beta = \sin(\alpha - \theta)$$

$$\sin\beta = -(\cos\alpha - \theta)$$

那么, 整个一圈内, 各微段共同引起B截面绕簧杆轴转动的角度为

$$\Psi_1 = \int s \sin\beta d\varphi = - \int_{-2\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{Mn}{GJp} \cos(\alpha - \theta) d\theta = 0 \quad (4)$$

同理, 各微段相对扭转共同引起B截面的倾斜角

$$\Psi^2 = 0 \quad (5)$$

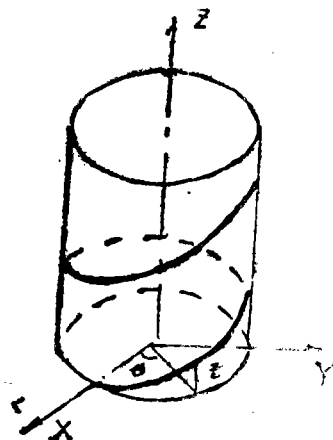
式(4)、式(5)说明, 各微段的扭转变形, 并不引起簧杆横截面产生刚性转动。

三、分 析 讨 论

簧杆任意横截面在弹簧变形过程中, 没有刚性转动, 那么, 只存在着刚性位移, 刚性位移的出现, 使螺旋角发生改变, 这样, 由近乎于平面的圆周线变成了空间螺旋线(图4)。从微分几何知, 螺旋线的参数方程为:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \theta p \end{cases} \quad (6)$$

p是与螺旋角有一定关系的常数, 其值确定如下:



图(4)

螺旋线的扭率

$$\tau = \frac{p}{R^2 + p^2} \quad (7)$$

在小变形情况下, (7)式改写为

$$\tau = \frac{p}{R^2} \quad (8)$$

令(8)式等于微段的单位扭转角, 即

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d\varphi}{ds} \\ \text{或} \quad \frac{p}{R^2} &= \frac{PR}{GJ_p} \end{aligned}$$

则可确定

$$P = \frac{p R^3}{GJ_p} \quad (9)$$

当 $\theta = 2n\pi$, 即为 n 圈螺旋时, 将它和式(9)代入到式(6)中第三式中, 则可得到螺旋顶点的位移。

$$\lambda_1 = \frac{p R^3 2\pi n}{GJ_p} \quad (10)$$

(10)式与弹簧变形计算公式(3)完全一致。

由此知道, 弹簧杆各微段扭转时, 形成了空间螺旋线, 弹簧将伸长或缩短, 在变形过程中, 各簧杆横截面并不产生转动, 而只有刚性位移, 与实验结果一致。

参 考 文 献

1. s·铁木辛柯著, 汪一麟译“材料力学”(高等理论及问题)。
2. 陈文森, 陈纪“密圈螺旋弹簧的变形分析” 力学与实践(1984, 6)
3. 张福范, “密圈螺旋弹簧变形释疑” 教育研究通讯(1981)
4. 吴大任编“微分几何讲义” 人民教育出版社