

可图的置换群

周 尚 超

(基础课部)

提 要

设 H 是作用在集合 X 上的置换群,若 H 与某个图的自同构群恒等,则称 H 是可图的。设 F_1 与 F_2 是可图的,本文得到了 $F_1 + F_2$ 可图的必要充分条件。

本文采用〔1〕中的记号和术语,除非另外说明。设 H 是作用在集合 X 上的置换群,若 H 与某个图 G 的自同构群 $\text{Aut}(G)$ 恒等,则称 H 是可图的。设 $|X| = n$,则称 H 是 n 度的置换群,若对任意 $x, y \in X$,都存在 $h \in H$,使得 $h(x) = y$,则称 H 是可迁的。哪些有限置换群是可图的,这是图与群中一个较困难的问题。C. Y. Chao证明了 $n(>2)$ 度的可迁的交换群是不可图的〔2〕,S. P. Mohanty等人得到了某些循环置换群可图的充分必要条件〔3〕。本文主要证明了定理1。

定理1 设 F_1 和 F_2 是可图的置换群,则 $F_1 + F_2$ 可图的充分必要条件是满足下列条件之一:

- 1) $F_1 \cong F_2$
- 2) F_1 或 F_2 不是可迁群
- 3) 自同构群是 $F_i (i=1$ 或 $2)$ 互不同构的图至少有2个。

$F_1 \cong F_2$ 表示 F_1 与 F_2 恒等, $F_1 + F_2$ 表示 F_1 与 F_2 的和,两个置换群的恒等以及和的定义参看〔1〕。

引理1〔1〕 若 G_1 与 G_2 是不相交的,连通的而且不同构的图,则

$$\text{Aut}(G_1 \cup G_2) = \text{Aut}(G_1) + \text{Aut}(G_2)$$

引理2〔1〕 设 $\bar{G}$ 是 G 的补图,则 $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\bar{G})$ 。

定理1充分性的证明 设 F_1 和 F_2 是可图的,即存在 G_1 和 G_2 ,使 $\text{Aut}(G_i) = F_i (i=1, 2)$ 。根据引理2,设 G_i 是连通的($i=1, 2$)。若 $F_1 \cong F_2$,则 G_1 与 G_2 不同构, $\text{Aut}(G_1 \cup G_2) = F_1 + F_2$, $F_1 + F_2$ 是可图的。设 G_1 与 G_2 和 $\bar{G}_2$ 都同构,自同构群是 F_2 的,还有 G_3 ,则 G_1 与 G_3 不同构, $\text{Aut}(G_1 \cup G_3) = F_1 + F_2$ 。设 F_1 不是可迁群, G_1 与 G_2 同构, b_1 是 G_1 的度最大的一个顶点, $M = \{f(b_1) | f \in F_1\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 。设 G 是这样的一个图: $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{1,2}$,这里 $E(G)$ 表示 G 的边的集合, $E_{1,2} = \{[u, v] | u \in M, v \in V(G_2)\}$, $[u, v]$ 是邻接 u 与 v 的边。因为 F_1 不可迁,因此 $M \cong V(G_1)$, M 是图 G 的度最大的顶点集,若 $f \in \text{Aut}(G)$,则 $f(M) = M$, $f(V(G_2)) = V(G_2)$, $f = f_1 f_2$, f_1 是 f 在 V

本文于1986年6月23日收到

(G_i) 上的限制, $f_i \in \text{Aut}(G_i)$, 反之, 若 $f_i \in \text{Aut} G_i$, 则 $f_1 f_2 \in \text{Aut} G$, 因此 $\text{Aut} G = F_1 + F_2$, 定理充分性证毕。

定理 1 必要性的证明 我们证明, 若 F_1 和 F_2 不满足定理 1 的 3 个条件, 则 $F_1 + F_2$ 是不可图。设 $F_1 \cong F_2$, F_1 是可迁群, 自同构群是 F_1 的只有 G_i 和 $\overline{G_i}$ ($i=1, 2$), G_1 与 G_2 同构。设 $F_1 + F_2$ 可图, 存在图 G , 使 $\text{Aut} G = F_1 + F_2$, 设 $V(G) = V_1 \cup V_2$, V_i 是 F_i 变动的顶点集, G_i 是 G 的以 V_i 为顶点集的导出子图, 则 $F_i \subseteq \text{Aut}(G_i)$, 设 $f \in \text{Aut}(G_1)$, $a \in V_1$, $b \in V_2$, a 与 b 邻接, 因为 F_1 可迁, 因此存在 $g \in F_1$, 使 $g(a) = f(a)$, 因为 $g \in F_1 + F_2$, 因此 $g(a)$ 与 b 邻接, 即 $f(a)$ 与 b 邻接, 即 $f \in F_1$, $F_1 = \text{Aut}(G_1)$, 同理 $F_2 = \text{Aut}(G_2)$, 因为 $F_1 \cong F_2$, 群为 F 的图只有 1 个, 因此 G_i 是自补图, G_1 与 G_2 同构, 由前面的证明可知, 若 V_1 中有一个顶点 a 与 V_2 中一个顶点邻接, 则 V_1 中任意顶点与 V_2 中任意顶点邻接, 设 f 是 G_1 到 G_2 的同构映射, 则易知 $\overline{f} \in \text{Aut}(G)$, 但是 $\overline{f} \cong f_1 f_2$, (f_i 是 V_i 上的置换) 这与 $\text{Aut}(G) = F_1 + F_2$ 矛盾, 因此 $F_1 + F_2$ 是不可图的。这里 $\overline{f} = (a_1, f(a_1))(a_2, f(a_2)) \cdots (a_m, f(a_m))$, $V_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$

系 设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是可图的, 存在 i, j , 满足下列条件之一:

- 1) $F_i \cong F_j$
- 2) F_i 或 F_j 不是可迁群
- 3) 自同构群是 F_i ($i=j$ 或 j) 的互不同构的图至少有 2 个。

则 $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ 是可图的。

例 设 $f_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ 表示这样的置换: $f_1(i) = j, j = i + 1 \pmod{5}$, 类似地, 设 $g_1 = (1)(2, 5)(3, 4), f_2 = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}), g_2 = (\overline{1})(\overline{2}, \overline{5})(\overline{3}, \overline{4})$ 。 $F_i = \langle f_i, g_i \rangle$ 是由 f_i 和 g_i 生成的群 ($i=1, 2$), 则 F_i 是可图的, 可迁的且 $F_1 \cong F_2$, 自同构群是 F_i 的互不同构的图只有一个圈 C_5 , $F_1 + F_2$ 是不可图的。

定理 2 设 F_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 是可图的置换群, $n \geq 2$, $H_n = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, $F_1 \cong F_i$ ($i=2, 3, \cdots, n$), F_1 是可迁群, 自同构群是 F_1 的互不同构的图只有一个, H_n 可图的充分必要条件是 $n > 5$ 。

证明 设 $n > 5$, $\text{Aut} G_i = F_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 则 G_1 与 G_i 同构 ($i=2, 3, \cdots, n$), G_i 是自补图 ($i=1, 2, \cdots, n$)。因为 F_1 可迁, 所以 G_1 是正则图。设 G_1 的任意顶点的度是 d , $|V(G_i)|$

$= p$, 设 $V_i = V(G_i)$, 作图 G 如下, $V(G) = \bigcup_{i=1}^n V_i$, $E(G) = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$, 这里 $E_i = E(G_i)$ ($i=1, 2, \cdots, n$), $E_{n+1} = E_{12} \cup E_{23} \cup E_{34} \cup \cdots \cup E_{n-1, n} \cup E_{24}$,

这里 $E_{ij} = \{[u, v] \mid u \in V_i, v \in V_j\}$ 。若将 V_i 中的顶点等作为一个顶点, 则这个图如图 1 所示。容易算出 $V_1 \cup V_n$ 中的顶点的度都是 $d + p$, 其它顶点的度都大于 $d + p$, 因此, 若 $a \in V_1$, $f \in \text{Aut} G$, 则 $f(a) \in V_1 \cup V_n$, 又设 $c \in V_2$, c 的度是 $d + 3p$, V_{n-1} 中点的度是 $d + 2p$, 因此 $f(c) \in V_{n-1}$, $f(a) \in V_n$, 所以 $f(a) \in V_1$, 同理若 $a \in V_n$, 则 $f(a) \in V_n$ 。这样就可推出 $f(a) \in V_i$, 若 $a \in V_i$, $f = f_1 f_2 \cdots f_n$, f_i 是 f 在 V_i 上的限制, $f_i \in F_i$, 反之若 $f_i \in F_i$, 则 $f_1 f_2 \cdots f_n \in \text{Aut} G$, 因此 $\text{Aut} G = H_n$, H_n 是可图的。设 $n \leq 5$, 我们证明 H_n 是不可图

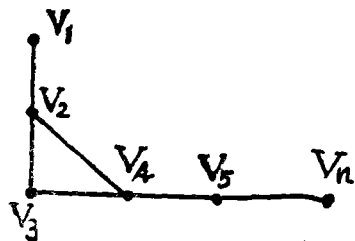


图 1

的, 以 $n = 5$ 进行证明。设 H 是可图, $\text{Aut} G = H$, F_i 变动的顶点集用 V_i 表示 G 的以 V_i 为顶点集的导出子图用 G_i 表示, 若把 V_i 中的顶点等同为一个顶点, 则得到 5 个顶点的图 $\bar{G}$, $\bar{G}$ 的自同构群不是单位元素群, 例如图 2 中的图就是这样一个图。因为 F_i 是可迁群, 若 V_i 中有一点与 V_j 中一点邻接, 则 V_i 中任意顶点都与 V_j 中任意顶点邻接, 以图 2 中的图 $\bar{G}$ 为例进行证明, 设 f 和 g 分别是 G_1 到 G_5 和 G_2 到 G_4 的同构映射, $V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, $V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$, 则易验证 $\bar{f} \bar{g} \in \text{Aut} \bar{G}$, 这里 $\bar{f} = (a_1, f(a_1))(a_2, f(a_2)) \dots (a_p, f(a_p))$, $\bar{g} = (b_1, g(b_1))(b_2, g(b_2)) \dots (b_p, g(b_p))$, 这与 $\text{Aut} G = H$ 矛盾, 因此 H 是不可图的。

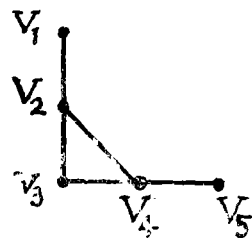


图 2 图 $\bar{G}$

系 设 $F_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是可图的置换群, $n > 5$, 则 $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ 是可图的。

参 考 文 献

- [1] Harary F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969, 中译本, 图论, 李慰萱译, 上海科学技术出版社, 1980年。
- [2] C. Y. Chao, On a theorem of Sabidussi, Proc, Amer, Math. Soc., 15(1964), 291—292.
- [3] S. P. Mohanty, M. R. Sridharan and S. K. Shukla, Graphical cyclic permutation groups, Combinatorics and Graph Theory (ed. S. B. Rao). Lecture Notes in Math. 885. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, pp339—346.