

微机在机械振动基本理论研究中的应用

高 士 俊

(理力教研室)

一、 引 言

机械振动是自然界、工程实际和日常生活常见的现象,振动理论已发展成为力学学科的一个重要分支。为了加强对机械振动基本理论的研究和提高教学质量,我们理力教研室近年来在逐步筹建理力模型室和理力实验室,以树立教学的直观性,提高学生的动手能力和理解能力;最近,又在理力实验室中配备几台便于学生练习用的LASER310微机和LASER—PP40绘图器,并设计编制了几套振动计算程序。在学生习算法语言的基础上,教他们应用微机继续进行振动规律的研究和学习。

实践证明,应用微机及绘图器研究振动理论,不但使学生对振动理论单自由度系统的振动基本规律,尤其对振动规律的研究和理解,比单纯用数学分析方法,也比采用传感器和示波器进行波形研究更为直观、生动,更具有可以任意改变振动参数,可立即算出需要的数据并迅速自动绘出运动图,使学者能够进行深入研究,并大大提高学者的学习兴趣,能使振动理论的教学工作取得较好效果。

程序的研究编制采用哈工大大理力教研室编《理论力学》教材的有关公式(对受迫振动公式作了一些变动),按BASIC语言的规则,对公式中一些希腊文等改用适当的字母或符号代替,由浅入深、由易到难地编制了单自由度系统的“自由振动”、“有阻尼的自由振动”和“振动”三套程序,其中有些术语或符号可以参阅LASER310微机及LASER—PP40绘图器的有关说明书。

向“自由振动”程序输入一定数据,计算机即能迅速算出并打印出计算公式和结果,接着按数据绘出自由振动的运动曲线图象;向“有阻尼的自由振动”程序输入一定数据时,微机即迅速算出和打印出计算公式和结果,并用四种色笔绘图:黑色画坐标轴,蓝色和绿色画二条渐近线,红色画出衰减曲线,图象准确而且清晰,这种直观而生动的方法是教科书或其他实验手段不能取得的。第三个“振动”程序是在熟悉和掌握前二个程序的基础上进行的,当输入“自由振动”或“有阻尼的自由振动”的数据时,能计算、打印出相应的结果并绘出运动图象;如果输入“受迫振动”数据,微机能迅速算出相应结果及其共振曲线有关公式和数字并打印,然后绘出共振曲线图,可从中看出发生共振的规律性,最后用四种色笔绘出受迫振动曲线的坐标、衰减振动、受迫振动曲线及其合成曲线的图象,使学者获得相当完整的数字和图象资料。

本文于1986年8月19日收到

实践证明,通过这些程序的研究和锻炼,可以大大提高学者的科学研究能力,进一步掌握对微机的应用。

二、“自由振动”程序的研究

单自由度系统自由振动的微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0 \dots\dots\dots (1)$$

式中, $\omega_n = 2\pi f$ 为圆频率 $\dots\dots\dots (2)$

$f = 1/T$ $\dots\dots\dots (3)$

f 为振动的频率, T 为周期。

$$\text{又 } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots\dots\dots (4)$$

k 为弹簧的刚性系数, m 为质量。

微分方程的解, 即振动的规律为

$$x = A \sin(\omega_n t + \alpha) \dots\dots\dots (5)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}}, \quad \text{tg} \alpha = \frac{\omega_n x_0}{v_0} \dots\dots\dots (6)$$

式中, A 为振幅, α 为初相位, $\omega_n t + \alpha$ 为相位。

为了便于应用 BASIC 语言, 前述公式中的符号改写为:

$\omega_n \rightarrow WN$; $k \rightarrow K$; $m \rightarrow M$; $t \rightarrow T$; $\alpha \rightarrow G$

则 (1) 式写成 $D(DX/DT)/DT + (WN \uparrow 2) * X = 0$

(4) 式写成 $WN = \text{SQR}(K/M)$

(5) 式写成 $X = A * \text{SIN}(WN * T + G)$

(6) 式写成 $A = \text{SQR}(XO \uparrow 2 + VO \uparrow 2 / WN \uparrow 2)$, $G = \text{ATN}(WN * XO / VO)$

自由振动的程序如下:

```

10 LPRINTCHR(18), "C1, S1, A"
20 REM***PLOTTING MOTION CURVE OF FREE VIBRATION*
**
30 LPRINT"***PLOTTING MOTION CURVE OF FREE VIBRATION
**"
40 INPUT "M"; M; INPUT "K"; K; INPUT "XO"; XO; INPUT "VO";
VO
50 LPRINT "M="; M, "K="; K, "XO="; XO, "VO="; VO

```

```

6 0 LPRINT "EQUATION; D (DX/DT) /DT+ (WN↑2) * X=O"
7 0 WN=SQR (K/M) ; A=SQR (XO↑2+VO↑2/WN↑2) ; G=ATN (WN*X
O/O) V
8 0 LPRINT "X=ASIN (WNT+G) " ; LPRINT "WN=SQR (K/M) " ; WN
9 0 LPRINT "A=SQR (XO↑2+VO↑2/WN↑2) " ; A; LPRINT "G=ATN (W
N*XO/VO) " ; G
9 5 LPRINT "X=" ; A; "SIN (" ; WN; "T+" ; G; ")"
1 0 0 LPRINTCHR (18) , "CO, MO, - 2 0 0" ; LPRINT "IX1, 180, 2"
1 1 0 LPINT "M5, -15" ; LPRINT "PO" ; LPRINT "M185, -15" ; LPRINT
"P1"
1 2 0 LPRINT "M365, -15" ; LPRINT "PT (SEC) " ; LPRINT"HXO, 90, 2"
1 3 0 LPRINT "MO, 195" ; LPRINT "PX" ; LPRINT "M5, 180" ; LPRINT
"P+1"
1 4 0 LPRINT "M5, 90" ; LPRINT "P+0.5" ; LPINT "HXO, -90, 2"
1 5 0 LPRINT "MO,-90" ; LPRINT "P-0.5" ; LPRINT "MO,-185" ;
LPRINT "P-1"
1 6 0 LPRINT "HC3"
1 7 0 FOR T=OTO2STEPO 0 1: S=WN*T+G; X=INT(180*A*SIN(S))
1 8 0 LPRINT "D" ; 180*T; " , " ; X; NEXT T
1 9 0 LPRINT "HM90, -100" ; LPRINT "PX=ASIN (WNT+G) "
2 0 0 LPRINT "MO, -200" ; LPRINT "C1, S1, A"

```

以上程序语句简要说明如下:

第10句为采用制图模式,用蓝色笔(为了使色笔使用较均匀),一号字。

第20、30句为说明并打印出“绘制自由振动运动曲线”程序名称。

第40句为应输入的数句;第50句为将这些输入的数句打印。

第60句为采用的采用的公式 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n x^2 = 0$

第70—90句为计算式 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}}$; $\alpha = \arctg \frac{\omega_n x_0}{v_0}$, 并将这些

算式以及按输入的数据计算结果打印出来。

第95句将 $x = A \sin(\omega_n t + \alpha)$ 按算得的A、 ω_n 、 α 数字打印出来。

第100句为采用制图模式,用黑色笔,以上次画图的起点用(0, -200)为坐标原点。横轴以二段长为180(1mm长为5)的直线构成。

第110、120句为横轴以T(SEC)作单位,并定出0、1、2秒时的位置,又绘出二段长各为90的正纵轴。

第130、140句为以振动方程x为纵坐标及定出 $x = +1\text{cm}$, $+0.5\text{cm}$ 的位置,再画出以二段长为90的矢纵轴。

第150句标出 $x = -0.5\text{cm}$, -1cm 的位置。

第160句改用红色笔。

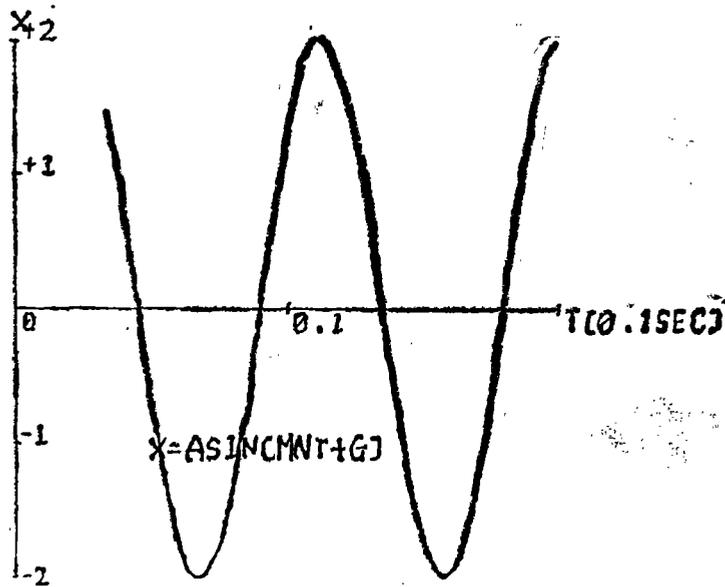
第170句指令横坐标由 $T=0$ 至2秒以0.01秒为步长，并采用 $S = \omega_n t + \alpha$ 以简化公式绘出 $x = \sin(S)$ 图，数值180为与纵轴 x 的数值相应，INT为采用整数。

第190句在运动曲线上打印出运动公式。

第200句将坐标原点改变到新的位置并规定色笔的颜色，字号的大小。

设计程序时为了精炼减少语句数，尽可能将几句语句合成一句；但其中第80、90句，第110—150句是按每句的最多字数分成二句或更多句。

现以 $m=0.5$ ， $k=112.5$ ， $x_0=1$ ， $V_0=10$ 输入，即可计算并将结果打印成： $WN = \text{SQ R}(K/M) 15$ ， $A = \text{SQR}(XO \uparrow 2 + VO \uparrow 2 / WN \uparrow 2) 1.20185$ ， $G = \text{ATN}(WN * XO / VO) .982794$ ， $X = 1.20185 \text{SIN}(15T + .982794)$ 并绘出运动曲线图如图1。输入不同数根可自动迅速计算并画出运动图。



三、“有阻尼的自由振动”的程序研究

振动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \dots \dots \dots * \dots (7)$$

其解为 $x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \alpha)$ 或 $x = Ae^{-nt} \sin(\omega_d t + \alpha) \dots \dots (8)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad n = \frac{c}{2m} \dots \dots \dots (9)$$

适用于 $U < \omega_n$ 即小阻尼情形时。

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + n x_0)^2}{\omega_n^2 - n^2}} \dots\dots\dots (10)$$

$$\alpha = \arctg x_0 \frac{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{V_0 + n x_0} \dots\dots\dots (11)$$

其程序如下：

```

10 LPRINTCH (18) , "C2, S1, A"
20 REM***PLOTTING MOTION CURVE OF FREE d DAMPED
   FREE VIBRATION***
30 LPRINT "***PLOTTING MOTION CURVE OF FREE d DAMPED
   FREE VIBRATION**"
40 INPUT "M"; M; INPUT "K"; K; INPUT "XO"; ; XO; INPUT "TVO; "
   VO; INPUT "C"; C
50 LPRINT "M="; M, "K="; K, "XO="; X O, "VO="; V O, "C
   ="; C
60 LPRINT "EQUATION: D (DX/DT) /DT+2NDX/DT+WN↑2**=0"
70 WN=SQR (K/M); N=C/ (2*M); WD=SQR (WN↑2-N↑2)
75 A=SQR (XO↑2+ (VO+N*XO) ↑2/WD↑2; Q=ATN (XO * WD/(VO+
   N*XO) )
80 I (FN) >= WN THEN220
90 LPRINT "X=AEXP (-NT) SIN (WDT+Q) "
100 LPRINT "WN=SQR (K/M) "; WN, "N= C/2M"; N, WD= SQR (W
   N↑2-N↑2) "; WD
110 LPRINT "A=SQR (XO↑2+ (VO+NXO) ↑2/WD↑2) "; A
114 LPRINT "Q=ATN (XO*WD/ (VO+NXO) ";Q
118 LPRINT "X=" ;A; "EXP (-" ;N; "T) SIN (" Q;WD;"T +";Q; " ) "
120 GOSUB1000
130 FOR T=0 TO2STEP0.01; U=A*EXP (-N*T); X=INT(180*U)
140 LPRINT "D"; 180*T; ", " ; X; NEXT T
150 FOR T=0 TO2STEP0.01; V=-A*EXP (-N*T); X=INT (180
   *V)
160 LPRINT "D"; 180*T; ", " ; X; NEXT T; LPRINT "HC3"
170 FOR T=0 TO2STEP0.01; P=WD*T+Q; X=INT (180* A * EXP
   (-N*T) *SIN (P) )
180 LPRINT "D"; 180*T; ", " ; X; NEXT T

```

```

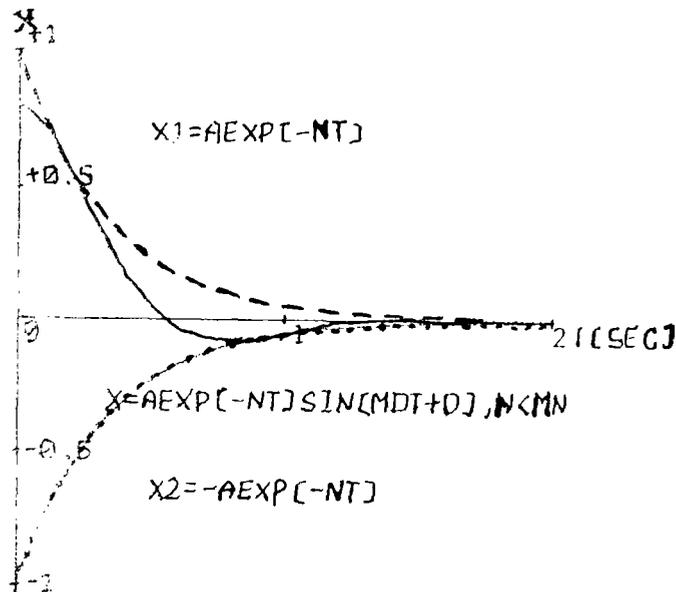
1 9 0  LPRINT "HM90, 120"; IPRINT " C1, PX1=AEXP (-NT) "
2 0 0  LPRINT "HM90, -120"; LPRINT "C2, PX2=AEXP (-NT) "; LPRINT
      "M60, -60"
2 1 0  LPRINT "C3, PX=AEXP (-NT) SIN (WDT+Q) , N<WN"
2 2 0  LPRINT "MO, -200"; LPRINT "C1, S1, A"
2 3 0  END
1 0 0 0 LPRINTCHR$ (18) , "CO, MO, -200"; LPRINT" 1X1, 1 80, 2"
1 0 1 0 LPRINT "M5, - 15"; LPRINT "P O"; LPRINT "M1 85, - 15"; L
      PRINT "P1"
1 0 2 0 LPRINT "M360, -15"; LPRINT "P2"; LPRINT" 365, 0"
1 0 3 0 LPRINT "PT (SEC) "; LPRINT "HXO, 90, 2"
1 0 4 0 LPRINT "MO, 195"; LPRINT "PX"; LPRINT "M5, 185"; LPRINT
      "P+1"
1 0 5 0 LPRINT, "M5, 90"; LPRINT "P + 0.5"; LPRINT "HXO, -
      90, 2"
1 0 6 0 LPRINT "M5, -95"; LPRINT "P-0.5"
1 0 7 0 LPRINT "M5, -185"; LPRINT "P-1"; LPRINT "P-1"; LPRINT
      "HC1"
1 0 8 0 RETURN

```

此程序将前面“自由振动”程序中第100—170句画坐标的语句用子程序1000—1080句代替，使程序较为简单，并为下一个更为复杂的“振动”程序作准备。

下面对某些语句作补充解释：

第80句说明当 $n \geq \omega_0$ 时为大阻尼或临界阻尼情形，不具有振荡性质，不进行计算及绘



图。第130—160句为将 $U = Ae^{-nt}$ 及 $V = -Ae^{-nt}$ 两渐近线分别用蓝色和绿色画出，并准备用红色画衰减曲线图。

当用 $m = 0.5$, $k = 112.5$, $x_0 = 1$, $V_0 = 10$, $C = 3$ 输入时，可算得并打印出 $\omega_n = 15$, $n = 3$, $\omega_d = 14.6969$, $A = 1.33507$, $\alpha = 0.84659$ 以及振动方程 $x = 1.33507e^{-3t} \sin(14.6969t + 0.84659)$ 并自动画出衰减曲线图如图2。

四、一般的“振动”程序研究

对单自由度系的“有阻尼受迫振动”，采用了比教科书更普遍的微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = h \sin(\omega t + \delta) \dots\dots\dots (12)$$

其通解为 $x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \alpha) + b \sin(\omega t + \delta - \epsilon) \dots\dots\dots (13)$

$$h = \frac{H}{m}, b = \frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \epsilon = \arctg \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \dots\dots\dots (14)$$

积分常数 A 和 α 可由运动的初始条件确定 $x' = -Ane^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \alpha) + Ae^{-nt}$

$$\sqrt{\omega_n^2 - n^2} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \alpha) + b\omega \cos(\omega t + \delta - \epsilon) \dots\dots\dots (15)$$

当 $t = 0$ 时, $x_0 = A \sin \alpha + b \sin(\delta - \epsilon)$, 即 $A \sin \alpha = x_0 - b \sin(\delta - \epsilon) \dots\dots (16)$

$$V_0 = -A n \sin \alpha + Ae^{-nt} \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \cos \alpha + b \omega \cos(\delta - \epsilon) \dots\dots\dots (17)$$

由(16)可得 $A = \frac{x_0 - b \sin(\delta - \epsilon)}{\sin \alpha} \dots\dots\dots (18)$

再由 $V_0 = -n x_0 + n b \sin(\delta - \epsilon) + A \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \cos \alpha + b \omega \cos(\delta - \epsilon)$

$$\text{得 } A = \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \cos \alpha = V_0 + n x_0 - n b \sin(\delta - \epsilon) - b \omega \cos(\delta - \epsilon)$$

$$A = \frac{V_0 + n x_0 - n b \sin(\delta - \epsilon) - b \omega \cos(\delta - \epsilon)}{\cos \frac{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{\omega_n^2 - n^2}}$$

$$\text{故得 } \text{tg} \alpha = \frac{[x_0 - b \sin(\delta - \epsilon)] \sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{n [x_0 - b \sin(\delta - \epsilon)] + V_0 - b \omega \cos(\delta - \epsilon)}$$

$$= \frac{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{\frac{V_0 - b\omega \cos(\delta - \varepsilon)}{x_0 - b\sin(\delta - \varepsilon)} + n} \dots\dots\dots (19)$$

在设计程序时，考虑到一般性，即可将运算及绘图程序可同时适用于“自由振动”、“有阻尼自由振动”及“受迫振动”的可能性。对于受迫振动，还设计了绘制共振曲线的程序，其有关公式是：

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \beta = \frac{b}{b_0}, \quad \xi = \frac{n}{\omega_n} \dots\dots\dots (20)$$

$$b_0 = \frac{h}{\omega_n^2}, \quad \beta = \frac{b}{b_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2 \lambda^2}} \dots\dots\dots (21)$$

采用的程序为

```

1 0 LPRINTCHR$(18), "C2, S1, A"
2 0 REM***PLOTING MOTION CURVE OF VIBRATION***
3 0 LPRINT "***PLOTING MOTION CURVE OF VIBRATION**"
4 0 INPUT "M"; M; INPUT "K"; K; INPUT "XO"; XO; INPUT "VO";
VO; INPUT "C"; C
4 5 INPUT "H"; H; INPUT "W"; W; INPUT "D"; D
5 0 LPRINT "M="; M, "K="; K, "XO="; XO, "VO="; VO, "C="
: C, "H="; H, "W="; W
5 5 LPRINT "D="; D
6 0 LPRINT "EQUATION: D (DX/DT) /DT + 2NDX/DT + WN↑ 2 * X = HFSIN
(WT + D) "
7 0 WN = SQR (K/M); N = C / (2 * M); WD = SQR (WN↑ 2 - N↑ 2); FH = H
/M
7 2 E = ATN (2 * N * W / (WN↑ 2 - W↑ 2)); B = HT / SQR ((WN↑ 2 - W↑ 2)
↑ 2 + (2 * N * W) ↑ 2)
7 4 Q = ATN (WD / ((VO - B * W * COS (D - E)) / (XO - B * SIN (D - E))
+ N))
7 6 A = (XO - B * SIN (-E)) / SIN (Q)
8 0 IF N >= WN THEN 400
9 0 LPRINT "X = AEXP (-NT) SIN (WDT + Q) + BSIN (WT + D - E) "
9 2 LPRINT "WN = SQR (K/M) "; WN, "N = C/2M"; N, "WD = SQR (WN
↑ 2 - N↑ 2) "; WD
9 4 LPRINT "HF = H/M"; HF, "E = ATN (2NW / (WN↑ 2 - W↑ 2)) "; E
9 6 LPRINT "B = HF / SQR ((WN↑ 2 - W↑ 2) ↑ 2 + (2WN) ↑ 2) "; B
9 7 LPRINT "A = (XO - BSIN (D - E)) / SIN (Q) "; A
9 8 LPRINT "Q = ATN (WD / ((VO - BWCOS (D - E)) / (XO - BS

```

```

IN (D-E) +N) ” ; Q
1 0 0 LPRINT “X1=” ; A, “EXP (-” ; N, “T)” SIN C” ; WD, “T+ ” ;
Q, “)”
1 1 0 IF H=OTHN230; IF C=OTHEN230
1 2 0 LPRINT “X2=” ; B, “SIN C” ; W, “T+” ; D, “-” ; E, “)”
1 3 0 L=W/WN; Y=N/WN; R=1/SQR ((1-L↑2) ↑2+4*Y↑2*L↑2)
1 4 0 LPRINT “L=W/WN” ; L, “Y=N/WN” ; Y, “R=1/SQR ((1-L↑2)
) ↑2+4*Y↑2*L↑2) ” ; R
1 5 0 LPRINT CHR$(18) , “CO, MO, -250” ; LPRINT “IX1, 120, 3”
1 6 0 LPRINT “M5, -15” ; LPRINT “PO” ; LPRINT “M125, -15” ; LPRINT
“P1”
1 7 0 LPRINT “M245, -15” ; LPRINT “P2” ; LPRINT “M360, -15” ; LPRINT
“P3”
1 8 0 LPRINT “M365, 0” LPRINT “PL=W/WN” ; LPRINT “HXO, 30, 8”
1 8 5 LPRINT “MO, 250” ; LPRINT “PR=B/BO”
1 9 0 FOR I=1TO8; S=30*I; LPRINT “M5, ” ; S; LPRINT “P” ; I; NEXT
I; LPRINT “HC1”
2 0 0 FOR T=0TO3STEP0.01; L=1*T; R=INT (30*1/SQR ((1-L↑2)
↑2+4*Y↑2*L↑2) )
2 1 0 LPRINT “D” ; 120*T; “,” ; R, NEXT T
2 2 0 LPRINT “HM200, 120” ; LPRINT “PY=N/WN” ; LPRINT “C1, S1,
A”
2 3 0 GOSUB1000
2 4 0 LPRINT “HC1”
2 5 0 FOR T=0TO2STEP0.01; P=WD*T+Q; X1=INT(180*A*EXP (-
N*T)*SIN (P) )
2 6 0 LPRINT “D” ; 180*T; “,” ; X1; NEXT T
2 7 0 LPRINT “M200, -60” ; LPRINT “PXI=AEXP (-NT) SIN (WD T+Q)
)”
2 8 0 IF H=0 THEN400
2 9 0 LPRINT “HC2”
3 0 0 FOR T=0TO2STEP0.01; U=W*T+D-E; X2=INT(180*B*SIN (
U) )
3 1 0 LPRINT “D” ; 180*T; “,” ; X2; NEXT T
3 2 0 LPRINT “M200, 90” ; LPRINT “PX2=BSIN (WT+D-E) ” ; LPRINT
“HC3”
3 3 0 FOR T=0TO2STEP0.01
3 3 5 X=INT (180* (A*EXP (-N*T) *SIN (WD*T+Q) +B*SIN (W*
T+D-E) ) ,

```

```

3 4 0 LPRINT "D" ; 180 * T ; " , " ; X ; NEXT T
3 5 0 LPRINT "M200, 130" " LPRINT "PX = X1 + X2"
4 0 0 LPRINT "MO, -200" ; LPRINT "C1, S1, A"
4 1 0 END
1 0 0 0 LPRINTCHR$(18) , "CO, MO, -350" ; LPRINT" IX1, 180, 2"
1 0 1 0 LPRINT "M5, -15" ; LPRINT "PO" ; LPRINT "M185, -15" ; LPR
INT "P1"
1 0 2 0 LPRINT "M360, -15" ; LPRINT "P2" ; LPRINT" M365, 0"
1 0 3 0 LPRINT "PT (SEC) " ; LPRINT "HXO, 90, 2"
1 0 4 0 LPRINT "MO, 205" ; LPRINT "PX" ; LPRINT "M5, 185" ; LPRIN
T "P+1"
1 0 5 0 LPRINT "M5, 90" ; LPRINT "P+0.5" ; LPRINT "HXO, -90, 2"
1 0 6 0 LPRINT "M5, -95" ; LPRINT "P-0.5"
1 0 7 0 LPRINT "M5, -185" ; LPRINT "P-1" ; LPRINT "HC1"
1 0 8 0 RETURN

```

以上程序中

第80句当 $n \geq \omega_n$ 时为临界阻尼和过阻尼情形，无振荡，不进行计算和绘图。

第110句当 $H=0, C=0$ 即自由振动时。进入230句，直接用子程序作坐标轴绘出自由振动运动图。

第280句当 $H=0$ 时为有阻尼自由振动并由此作出衰减曲线图。当 $H \neq 0, C \neq 0$ 时即为有阻尼受迫振动情形（如 $H \neq 0, C=0$ 无阻尼受迫振动也同样适用），可由130—220句绘出

$$S = \frac{n}{\omega_n} \text{ 时, 以 } \beta = \frac{b}{b_0} = \sqrt{\frac{1}{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}} \text{ 为纵轴, 以 } \lambda = \frac{\omega}{\omega_n} \text{ 为横轴的共振}$$

曲线，可看出 β 值的变化规律并可从而看出在 $\omega \approx \omega_n$ 即 $\lambda=1$ 共振时的最大振幅比，可用以检验所给数据的振动是否有共振的可能性，以便采取相应的防振措施。

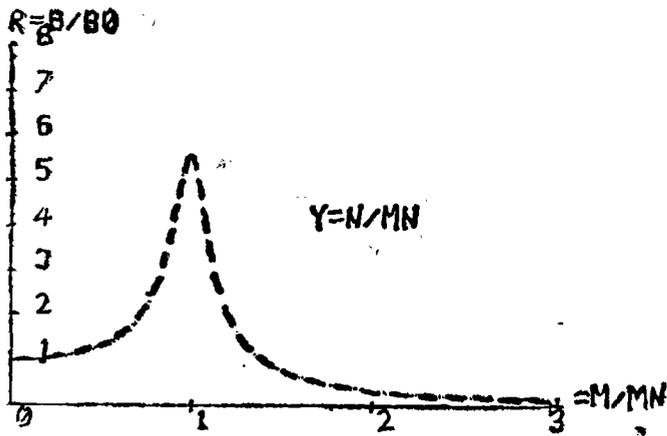
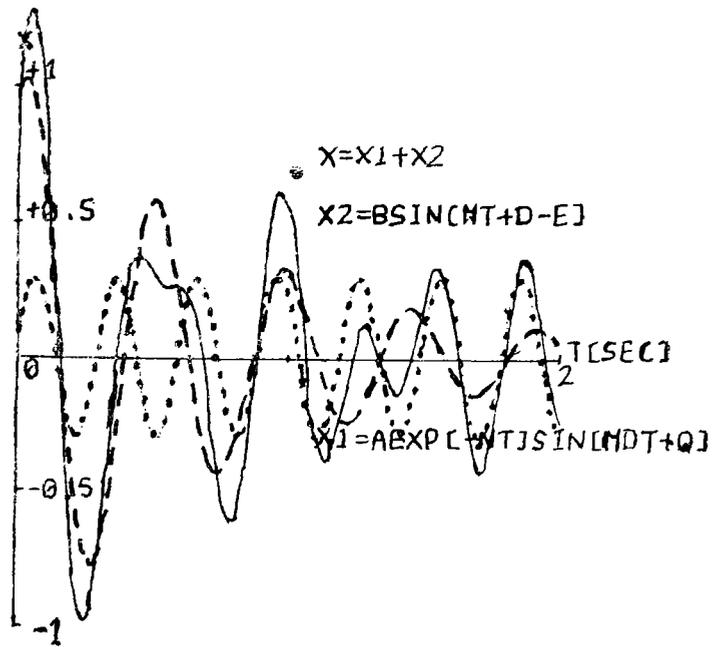
由250—400句为用蓝色绘出衰减振动以 X_1 ，用绿色绘出受迫振动曲线 X_2 及用红色绘出其合成曲线 $X=X_1+X_2$ 。从这三条曲线可以清楚而生动地看出在受迫振动中过渡过程及以后的稳定过程，比其他实验手段或单纯用分析方法更为直观并引起学者的研究兴趣。

当以数据 $m=0.5, k=112.5, x_0=1, V_0=10, C=3, H=40, \omega=10, \delta=3$ 输入时，可得 $\omega_n=15, n=3, \omega_d=14.6969, h=80, \varepsilon=0.44752, b=0.576974, \alpha=0.535344, A=1.33184$ ，方程为 $x=1.33184e^{-3t}(\sin(14.6969t+0.535344)+0.576974\sin(10t+3-0.44752))$

并绘出共振曲线和振动曲线如图3。

从共振曲线及其相应数值 $\lambda=0.666667, \xi=0.2$ 时 $\beta=1.62274$ ，但更重要的是当 $\lambda=1$ 时可得 $\beta=2.5$ ，这对共振研究更有重大意义。

在上述数据中如令 $H=0, \omega=0, \delta=0$ 即可得衰减曲线；如再令 $C=0$ ，则可得自由振动曲线。



参 考 文 献

- [1] 《理论力学》 哈尔滨工业大学理论力学教研室编 人民教育出版社
- [2] 《BASIC语言》 吴良占编著 浙江科技出版社
- [3] 《LASER310使用说明书》
- [4] 《LASER—PP40绘图籍使用说明书》