

从相对论原理论述电磁场的统一性

杨 志 华

(物理教研室)

提 要

由狭义相对论力的变换公式、电荷量在不同惯性系中不变性,推证出磁现象是运动电荷的相对论效应,磁作用是电作用必然的结果,进一步把磁学和电学放在相同的实验定律——库仑定律的基础上,导出安培定律,毕——沙定律和法拉第电磁感应定律,从而确立电磁现象的统一性。

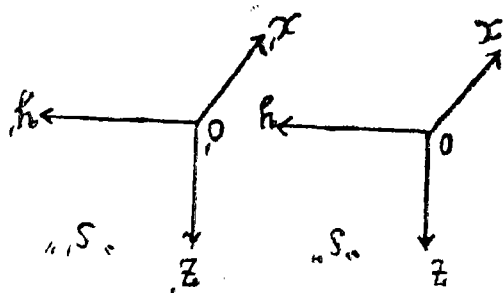
电磁场是一个统一的客体,虽然在不同参考系中观测得到的电场或磁场的场量不同,但通过洛伦兹变换可以统一起来。现以点电荷的电场和磁场为例,基于库仑定律,得到电场强度 $\vec{E}$ 的表述式,而且当磁作用被看作是运动电荷的相对论效应时,可以推出磁感应强度 $\vec{B}$ 的表述式,再从库仑定律进一步导出磁学中的三个实验定律——安培定律、毕——沙定律和法拉第电磁感应定律。

一、磁作用是电作用的必然结果

如图所示的坐标系中研究两个点电荷 q 与 q_0 ,电荷 q 在 $X'Y'Z'$ 坐标系静止,而 q_0 相对于 XYZ 以速度 $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$ 运动。在 $X'Y'Z'$ 坐标系,静电荷 q 作用在电荷 q_0 上仅有库仑力 $F' = (F'_x; F'_y; F'_z)$,并且

$$\vec{F}' = q_0 \vec{E}', \quad (1)$$

在 X 、 Y 、 Z 系,电荷 q 作用在电荷 q_0 的力 $\vec{F}$,则根据相对论的力的变换式来求。



$$\begin{aligned} F_x &= F'_x + \frac{vu'_y}{c^2 + u'_x v} F'_y + \frac{vu'_z}{c^2 + u'_x v} F'_z \\ &= F'_x + \frac{u'_y}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2} \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} F'_y + \frac{u'_z}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2} \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} F'_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_x' + u_y \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_y' + u_z \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z' \\
&= F_x' + (u_y Q_z - u_z Q_y) \\
\therefore Q_z &= \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad Q_y = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z' \\
F_y &= \frac{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}{c^2 + u_x' v} F_y' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{c^2 (1-\beta^2)}{c^2 + u_x' v} F_y' \\
&= \frac{F_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{u_x' + v}{c^2} \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_y' = \frac{F_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} - u_x \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_y' \\
&= \frac{F_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} + (u_z Q_x - u_x Q_z) \\
\therefore Q_x &= 0 \quad Q_z = \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_y' \\
F_z &= \frac{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}{c^2 + u_x' v} F_z' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{c^2 (1-\beta^2)}{c^2 + u_x' v} F_z' \\
&= \frac{F_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{u_x' + v}{c^2} \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z' = \frac{F_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} - u_x \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z' \\
&= \frac{F_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} + (u_y Q_z - u_z Q_y) \\
\therefore Q_x &= 0 \quad Q_y = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z'
\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{u} \times \vec{Q} \\
&= q_0 \frac{\vec{F}}{q_0} + q_0 \left[\vec{u} \times \frac{\vec{Q}}{q_0} \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (F_x', F_y' / \sqrt{1-\beta^2}, F_z' / \sqrt{1-\beta^2}) \\
\vec{Q} &= (0, -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_z', \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F_y') \quad (3)
\end{aligned}$$

现阐述 $\frac{\vec{F}_1}{q_0}$ 和 $\frac{\vec{Q}}{q_0}$ 的意义。考虑公式 (3) 和 (1)，则 $\frac{\vec{F}_1}{q_0}$ 可以这样写为

$$\frac{\vec{F}_1}{q_0} = \left(\frac{F_x'}{q_0}, \frac{F_y'}{q_0 \sqrt{1-\beta^2}}, \frac{F_z'}{q_0 \sqrt{1-\beta^2}} \right) = \left(E_x', \frac{E_y'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{E_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

当 $V \gg C$ 时, β^2 可以忽略, 即在经典情况下 $\frac{\vec{F}}{q_0}$ 值 $\left(\frac{F_x'}{q_0}, \frac{F_y'}{q_0}, \frac{F_z'}{q_0} \right)$ 与电荷 q 在 $X'Y'Z'$ 系

的电场强度一致。因此很自然将 $\frac{\vec{F}_1}{q_0}$ 用 $\vec{E}_q$ 表示, 称为电荷 q 在 XOY 系的电场强度, 它相对于 XOY 系以速度 $\vec{U}$ ($U; 0; 0$) 运动。

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} = (E_x'; \frac{E_y'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \frac{E_z'}{\sqrt{1-\beta^2}}) \quad (4)$$

关系式 (2) 中, 力 $\vec{F}$ 的第二部分 $\frac{\vec{Q}}{q_0}$ 很显然是某另一种场的动力特征, 它仅作用在运动

电荷上, 这个场叫磁场。象静电学引入 $\vec{E}_q$ 的方法一样, 来引入 $\vec{B}_q$

$$\vec{B}_q = \frac{\vec{Q}}{q_0} = (0; -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} E_z'; \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} E_y') \quad (5)$$

容易看出, $\vec{B}_q$ 垂直于 $\vec{U}$ 和 $\vec{E}_q'$, 因此 $\vec{B}_q$ 可以写成如下形式:

$$\vec{B}_q = a [\vec{v} \times \vec{E}_q'] = -a U E_z' \vec{j} + a U E_y' \vec{k} \quad (5a)$$

式 (5) 和式比较得

$$a = \frac{1}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$$

将 a 的值代入 (5a) 式

$$\vec{B}_q = \frac{1}{C^2 \sqrt{1-\beta^2}} [\vec{V} \times \vec{E}_q'] \quad (6)$$

又将相对于 $X'Y'Z'$ 坐标系静止的 q 的产生的场强值

$$\vec{E}_q' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \vec{r}' \quad \text{代入 (6) 式得}$$

$$\vec{B}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 C^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q}{r'^3} [\vec{V} \times \vec{r}'] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q}{r'^3} [\vec{V} \times \vec{r}'] \quad (7)$$

因此, 运动的电荷 q 同时产生电场和磁场, 它们的 $\vec{E}_q$ 和 $\vec{B}_q$ 分别由公式 (4) 和 (7) 确定。

从以上讨论看到:

1、在 s' 系中观察不到 q 电荷的磁效应, 而在 s 系中可观察到 q 电荷的磁效应。也就是与电荷相对静止的参照系中测不到该电荷的磁效应, 而与电荷相对运动的参考系中可测到该电荷的电磁效应, 并且磁效应是电作用的必然结果, 但不能说一个是另一个的原因, 因为也可以从磁作用导出电作用来, 二者地位平等, 无主次之分。

2、电场和磁场是一个完整的统一体。由电荷 q 在静止的参考系所激发的场仅是库仑电场 $\vec{E}'$, 但不激发磁场。而电荷 q 相对 s 系 (即运动的电荷 q) 激发的电场决非库仑电场, 它是

$$\vec{E} = (E_x'; \frac{E_y'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \frac{E_z'}{\sqrt{1-\beta^2}}), \text{ 磁场 } \vec{B} \text{ 并不等于 } \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v} \times \vec{r}']}{r'^3}, \text{ 它是}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v} \times \vec{r}']}{r'^3} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \text{ 低当低速运动电荷 } \frac{v}{C} \ll 1, \text{ 此时由相对论得出的 } \vec{E}, \vec{B} \text{ 退}$$

$$\text{化为 } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

二、从库仑定律导出磁学三个实验定律

从库仑定律出发, 根据力的变换, 所得到的公式(2), 再将所定义 $\vec{E}_q$ 和 $\vec{B}_q$ 代入可获得

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}_q + q_0 [\vec{u} \times \vec{B}_q] \quad (8)$$

实验证明, 假如电场和磁场不是由一个电荷而是一些电荷所产生时, 那么根据迭加原理, 公式

(8) 中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 则分别为总电场强度和总磁场强度矢量, $\vec{F}$ 即为洛仑兹力。

$$\text{若 } \vec{E} = 0, \quad \text{则 } \vec{F} = q_0 \vec{u} \times \vec{B} \quad (9)$$

考虑载直流导线, 它与具有平均速度 $\langle \vec{V} \rangle$ 是常数值的一些定向运动电荷相当。虽每一个运动电荷产生电场和磁场, 而在整个导线电呈中性, 故 $\vec{E} = 0$, 这样相对于坐标系静止的载流导线(电荷相对坐标系则是运动)仅产生磁场 $\vec{B}$ 。

现计算载流 I 的导线元 $d\vec{l}$ 的产生的磁感应强度 $d\vec{B}$, 从具有平均速度 $\langle \vec{V} \rangle$ 基元 $d\vec{l}$ 中每一个电荷产生的磁场, 磁感强度平均值, 根据公式(7)等于

$$\langle \vec{B}_q \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{q [\langle \vec{V} \rangle \times \vec{r}']}{r'^3}$$

在导线里电流的负荷者平均速度值远小于光速 C , 因此: 1) 值 $\beta^2 \ll 1$, 它可以忽略;

2) 当无限小的元 $d\vec{l}$, 在两个系统 XYZ 与 $X'Y'Z'$ 中被研究的点矢径认为相同, 即 $\vec{r}' = \vec{r}$ 。考虑到这些因素, 则

$$\langle \vec{B}_q \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\langle \vec{V} \rangle \times \vec{r}]}{r^3}$$

在元 $d\vec{l}$ 具有 dn 个运动电荷, 因而所有电荷产生的磁感应强度将是 dn 倍, 也就是

$$d\vec{B} = \langle \vec{B}_q \rangle dn = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\langle \vec{V} \rangle \times \vec{r}]}{r^3} dn$$

因为 $d\vec{l}$ 无限小, 这里矢量值 $\vec{r}$ 对于所有电荷相同, 而 $qdn \langle \vec{V} \rangle = I d\vec{l}$, 故得到毕—沙定律。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (10)$$

随之计算作用在处于具有磁感应强度 $\vec{B}$ 的磁场里载直流 I 的无限小导线元 $d\vec{l}$ 上的力 $d\vec{F}$ 。

因为在导线的直流电与具有某恒定平均速度 $\langle \vec{V} \rangle$ 的定向运动电荷相当, 所以作用在导线里每一个运动电荷的洛仑兹力, 它的平均值等于

$$\langle \vec{F} \rangle = q_0 \langle \vec{V} \rangle \times \vec{B}$$

在元 $d\vec{l}$ 具有 dn 个运动电荷, 因而作用在载流元上的力, 将是 $\langle \vec{F} \rangle$ 的 dn 倍, 即

$$d\vec{F} = \langle \vec{F} \rangle dn = q_0 dn \langle \vec{V} \rangle \times \vec{B}$$

由于被研究的矢量 $d\vec{l}$ ，具有长度 dl 和沿着电流方向，很显然 $q_0 dn = dq$ ，而 $\langle \vec{V} \rangle = \pm \frac{d\vec{l}}{dt}$ ，

这里的正负号分别属于正电荷和负电荷所产生的电流，这样

$$q_0 dn \langle \vec{V} \rangle = \pm dq \frac{d\vec{l}}{dt} = \pm \frac{dq}{dt} d\vec{l} = I d\vec{l}$$

故获得安培定律。

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (11)$$

再从库仑定律导出法拉第电磁感应定律。我们已导出 $\vec{F} = q_0 \vec{E}_q + q_0 \vec{u} \times \vec{B}_q$ ，此式即为电荷 q_0 在电磁场中受的洛伦兹力。因为在XOY系中测得运动电荷 q 所产生的电场 $\vec{E}$ 为式(4)所述，它随时间而变化，是非库仑电场；它产生的磁场 $\vec{B}$ 如式(7)所述，也随时间而变化。这就是说，在XOY系中观测相对于它以速度 $\vec{u}$ 运动的电荷 q_0 所受的 $\vec{F}$ 为非静电力，根据电动势的定义

$$\varepsilon = \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{l}}{P_0} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_L (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

如果电荷 q_0 为导体中的带电粒子，且导体以速度 $\vec{u}$ 相对XOY系观察者在运动，则这一闭合导体在变化的电磁场中产生的电动势即为(12)式。根据磁场变化和回路运动两个使磁通量变化的因素同时存在时，二者之间并无相互影响，总的感应电动势是感生和动生电动势之和。则认为式(12)右端前项为变化电场(即感应电场，由变化磁场产生)提供了一种非静电力，这部分电动势叫感生电动势；式(12)右端后项由导体运动受洛伦兹力提供了一种非静电力，这部分电动势叫动生电动势。因此、式(12)即为法拉第电磁感应定律。

通过以上推导，说明磁学中的毕—沙定律，安培定律和法拉第电磁感应定律亦和静电学一样可建立在相同的实验定律——库仑定律的基础上，这就清楚的表明电现象和磁现象之间的相互联系，电磁现象具有统一性。