

振动的“实用稳定性”

刘 诗 俊
(数学教研室)

摘 要

本文对若干来自力学和其它方面的振动问题进行数学分析。主要是研究“实用稳定性”(此名是作者拟定的,它与数学上所说的稳定性不同),定义见下文。在技术实践中,这种稳定性的研究是十分重要的。本文用矩阵方法将振动问题分类,然后将振动函数直接求了出来,得到十几个表达式。再用这些表达式分析振动的“实用稳定性”,并将结果总结成两个表。最后所附例子,旨在说明对于实际振动问题,如何用本文的结果进行稳定性分析。

许多振动问题都归结为二阶线性常微分方程组。通常是将它化为一阶方程组,而一阶方程组的稳定性问题,已有相当完整的结果。但这些结果用于实际问题还不方便。而且工程技术界说到的稳定性,往往指解及其导数在非齐次项不恒为零时的有界性。数学界所说的稳定性,通常是指非齐次项恒为零时方程本身的平衡点的稳定性(见〔3〕)。

针对各种实际需要,本文讨论了如下Cauchy问题。

$$\textcircled{1} \begin{cases} \ddot{X}(t) = AX + F(t) \\ X(0) = X_0 \\ \dot{X}(0) = P_0 \end{cases} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix} \\ P_0 = \begin{pmatrix} p_{10} \\ \vdots \\ p_{n0} \end{pmatrix}$$

分析了它的“实用稳定性”。首先考虑了二维问题,在 $n=2$ 的情况下,将①的“等效解” $Y=B^{-1}X$ 直接求了出来,再讨论它在各种初始条件下的“实用稳定性”。用代数与分析的方法,对这种稳定性作了全面考察。所得结果可供研究实际振动问题者参考。其次,本文用同样的办法对阻尼振动、多维及高阶问题作了一些探讨,也得到一些初步结果。作者在读了吕

本文于1986年6月26日收到

绍棣同志的《落砂机基础的减振问题》一文后,才想到数学这个问题的。还有陈坚白同志对本文提了宝贵建议。特向他们致谢。

一、二阶线性常系数常微分方程组的解的实用稳定性

本文根据实际需要及叙述方便,提出如下定义:

定义1 对于问题①的解 $X(t)$,若有 $M>0$,使当 $t\in[0,+\infty)$ 时,它的模 $\|X(t)\|<M$ (注₁),则称此解 $X(t)$ 是“实用稳定的”。

还可下下述定义。

定义1' 对于①的解 $X(t)$,若有 $M>0$,使 $\|x(t)\|+\|\dot{x}(t)\|<M$ (当 $t\in[0,+\infty)$),则此解是“实用稳定的”。

为节省篇幅,本文仅使用定义1。并将“实用稳定的”一词简化为“稳定的”。

二、二维二阶线性常系数常微分方程组

Cauchy问题的直接积分

根据线性代数,对任何实 2×2 矩阵 A ,有满秩 2×2 矩阵 B ,使 A 相似变换为 $B^{-1}AB=\Lambda$ 。 Λ 可取如下三种类型之一

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \Lambda_2=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Lambda_3=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

λ, μ, a, b 均为实数。 $b\neq 0$ 。(注₂)

现在,取 $X=BY$,代入①,则

$$B\ddot{Y}=ABY+F$$

于是

$$\ddot{Y}=B^{-1}ABY+B^{-1}F$$

①化为等价问题②,即

$$\begin{cases} \ddot{Y}=\Lambda Y+G \\ Y(0)=Y_0 \\ \dot{Y}(0)=Q_0 \end{cases} \quad G=B^{-1}F \quad Y_0=B^{-1}x_0 \quad Q_0=B^{-1}p_0$$

定义2 将①的解 $X(t)$ 称为振动。若 $CX=Y$,其中 C 为满秩方阵,则称 $Y(t)$ 为与 $X(t)$ 等效的振动。这时 $X=C^{-1}Y$,所以当 $Y(t)$ 与 $X(t)$ 等效,则 $X(t)$ 也与 $Y(t)$ 也等效。

引理 若振动是稳定的,则它的等效振动也是稳定的。

证:若 $X(t)$ 稳定,也有 $M>0$,使当 $t\in[0,+\infty)$ 时, $\|X(t)\|<M$ 。又 $Y(t)$ 与 $X(t)$ 等

注₁: $\|X(t)\|=\left(\sum_{i=1}^n X_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为 $X(t)$ 的Euclid模

注₂: A 必能也只能相似变换为 Λ_1, Λ_2 和 Λ_3 中的一个

效, 所以有满秩方阵C, 使 $Y(t) = CX(t)$, 于是

$$\|Y(t)\| = \|CX(t)\| \leq \|C\| \|X(t)\| < CM$$

所以 $Y(t)$ 稳定。

现在求②的解

1 当 $\lambda = \mu$ 时

这时②成为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

用Laplace变换法, 得

$$\textcircled{3} \quad y_1(t) = \begin{cases} y_{10} \cosh \sqrt{\lambda} t + \frac{q_{10}}{\sqrt{\lambda}} \sinh \sqrt{\lambda} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t g_1(\tau) \sinh \sqrt{\lambda} (t-\tau) d\tau & (\lambda > 0) \\ y_{10} + q_{10} t + \int_0^t g_1(\tau) (t-\tau) d\tau & (\lambda = 0) \\ y_{10} \cos \sqrt{-\lambda} t + \frac{q_{10}}{\sqrt{-\lambda}} \sin \sqrt{-\lambda} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t g_1(\tau) \sin \sqrt{-\lambda} (t-\tau) d\tau & (\lambda < 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad y_2(t) = \begin{cases} y_{20} \cosh \sqrt{\mu} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{\mu}} \sinh \sqrt{\mu} t + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^t g_2(\tau) \sinh \sqrt{\mu} (t-\tau) d\tau & (\mu > 0) \\ y_{20} + q_{20} t + \int_0^t g_2(\tau) (t-\tau) d\tau & (\mu = 0) \\ y_{20} \cos \sqrt{-\mu} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{-\mu}} \sin \sqrt{-\mu} t + \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \int_0^t g_2(\tau) \sin \sqrt{-\mu} (t-\tau) d\tau & (\mu < 0) \end{cases}$$

若①中的 $F(t)$ 为

$$\textcircled{5} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ C_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

这相当于对某系统施加周期性外力。这时, ②中的矩阵G成为

$$\begin{aligned} G = B^{-1}F &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ C_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ H_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

利用③、④, 得到②的解如表1所示

	$\lambda > 0$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0$
$\mu > 0$	$\begin{cases} ⑥ \\ ⑦ \end{cases}$	$\begin{cases} ⑧ \\ ⑦ \end{cases}$	$\begin{cases} \text{当 } \omega \neq \sqrt{-\lambda} & \begin{cases} ⑩ \\ ⑦ \end{cases} \\ \text{当 } \omega = \sqrt{-\lambda} & \begin{cases} ⑪ \\ ⑦ \end{cases} \end{cases}$
$\mu = 0$	$\begin{cases} ⑥ \\ ⑨ \end{cases}$	$\begin{cases} ⑧ \\ ⑨ \end{cases}$	$\begin{cases} \text{当 } \omega \neq \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑩ \\ ⑨ \end{cases} \\ \text{当 } \omega = \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑪ \\ ⑨ \end{cases} \end{cases}$
$\mu < 0$	$\begin{cases} \text{当 } \omega \neq \sqrt{-\lambda} & \begin{cases} ⑥ \\ ⑫ \end{cases} \\ \text{当 } \omega = \sqrt{-\lambda} & \begin{cases} ⑥ \\ ⑬ \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{当 } \omega \neq \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑧ \\ ⑫ \end{cases} \\ \text{当 } \omega = \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑧ \\ ⑬ \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{当 } \omega = \sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑪ \\ ⑬ \end{cases} \\ \text{当 } \omega = \sqrt{-\lambda} \neq \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑪ \\ ⑫ \end{cases} \\ \text{当 } \omega = \sqrt{-\mu} \neq \sqrt{-\lambda} & \begin{cases} ⑩ \\ ⑬ \end{cases} \\ \text{当 } \omega \neq \sqrt{-\lambda} \text{ 且 } \omega \neq \sqrt{-\mu} & \begin{cases} ⑩ \\ ⑫ \end{cases} \end{cases}$

表 1

在此表中的各式为

$$⑥ \quad y_1(t) = y_{10} \text{Ch} \sqrt{\lambda} t + \frac{q_{10}}{\sqrt{\lambda}} \text{Sh} \sqrt{\lambda} t - \frac{H_1}{\sqrt{\lambda}} \text{Sh} \sqrt{\lambda} t \times \text{Sin} \varphi_1$$

$$⑦ \quad y_2(t) = y_{20} \text{Ch} \sqrt{\mu} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{\mu}} \text{Sh} \sqrt{\mu} t - \frac{H_2}{\sqrt{\mu}} \text{Sh} \sqrt{\mu} t \times \text{Sin} \varphi_2$$

$$⑧ \quad y_1(t) = y_{10} + q_{10} t + \frac{H_1}{\omega} t \text{Cos} \varphi_1 + \frac{\text{Sin} \varphi_1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \text{Sin} (\omega t + \varphi_1)$$

$$⑨ \quad y_2(t) = y_{20} + q_{20} t + \frac{H_2}{\omega} t \text{Cos} \varphi_2 + \frac{\text{Sin} \varphi_2}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \text{Sin} (\omega t + \varphi_2)$$

$$⑩ \quad y_1(t) = y_{10} \text{Cos} \sqrt{-\lambda} t + \frac{q_{10}}{\sqrt{-\lambda}} \text{Sin} \sqrt{-\lambda} t + \\ + \frac{H_1}{2\sqrt{-\lambda}} \left[\frac{-2\sqrt{-\lambda}}{\omega^2 + \lambda} \text{Sin} (\omega t + \varphi_1) + \frac{\text{Sin} (\varphi_1 + \sqrt{-\lambda} t)}{\omega - \sqrt{-\lambda}} - \frac{\text{Sin} (\varphi_1 - \sqrt{-\lambda} t)}{\omega + \sqrt{-\lambda}} \right]$$

$$\textcircled{11} \quad y_1(t) = y_{10} \cos \sqrt{-\lambda} t + \frac{q_{10}}{\sqrt{-\lambda}} \sin \sqrt{-\lambda} t + \frac{H_1}{2\omega^2} \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 - \frac{H_1 t}{2\omega} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\textcircled{12} \quad y_2(t) = y_{20} \cos \sqrt{-\mu} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{-\mu}} \sin \sqrt{-\mu} t + \frac{H_2}{2\sqrt{-\mu}} \left[\frac{-2\sqrt{-\mu}}{\omega^2 + \mu} \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{\sin(\varphi_2 + \sqrt{-\mu} t)}{\omega - \sqrt{-\mu}} - \frac{\sin(\varphi_2 - \sqrt{-\mu} t)}{\omega + \sqrt{-\mu}} \right]$$

$$\textcircled{13} \quad y_2(t) = y_{20} \cos \sqrt{-\mu} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{-\mu}} \sin \sqrt{-\mu} t + \frac{H_2}{2\omega^2} \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 - \frac{H_2}{2\omega} t \cos(\omega t + \varphi_2)$$

2 当 $\Lambda = \Lambda_2$

这时, 问题②取如下形式

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{pmatrix} \end{cases}$$

我们得到

当 $\lambda \neq 0$ 时

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{10} \left(\frac{\exp(\sqrt{\lambda} t) + \exp(-\sqrt{\lambda} t)}{2} \right) + \frac{q_{10}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\exp(\sqrt{\lambda} t) - \exp(-\sqrt{\lambda} t)}{2} \right) + \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t g_1(\tau) \left(\frac{\exp(\sqrt{\lambda}(t-\tau)) - \exp(-\sqrt{\lambda}(t-\tau))}{2} \right) d\tau \\ y_2(t) = y_{20} \left(\frac{\exp(\sqrt{\lambda} t) + \exp(-\sqrt{\lambda} t)}{2} \right) + \frac{q_{10}}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\exp(\sqrt{\lambda} t) - \exp(-\sqrt{\lambda} t)}{2} \right) + \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t (g_2(\tau) + y_1(\tau)) \left(\frac{\exp(\sqrt{\lambda}(t-\tau)) - \exp(-\sqrt{\lambda}(t-\tau))}{2} \right) d\tau \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{10} + q_{10} t + \int_0^t g_1(\tau) (t - \tau) d\tau \\ y_2(t) &= y_{20} + q_{20} t + \int_0^t g_2(\tau) (t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

再对周期性外力的情况作一分析。设⑤成立, 我们得到②的解如表 2

$\lambda > 0$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0$
$\begin{cases} \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \end{cases}$	$\begin{cases} \textcircled{8} \\ \textcircled{18} \end{cases}$	$\begin{aligned} &\text{当 } \omega \neq \sqrt{-\lambda} \quad \begin{cases} \textcircled{10} \\ \textcircled{16} \end{cases} \\ &\text{当 } \omega = \sqrt{-\lambda} \quad \begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{16} \end{cases} \end{aligned}$

表 2

在表2中新出现的各式为

$$\textcircled{16} \quad y_2(t) = y_{20} \cos \sqrt{-\lambda} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{-\lambda}} \sin \sqrt{-\lambda} t + \int_0^t [g_2(\tau) + y_1(\tau)] \sin \sqrt{-\lambda} (t-\tau) d\tau$$

$$\textcircled{17} \quad y_2(t) = y_{20} \operatorname{Ch} \sqrt{\lambda} t + \frac{q_{20}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t + \int_0^t [g_2(\tau) + y_1(\tau)] \operatorname{Sh} \sqrt{\lambda} (t-\tau) d\tau$$

$$\textcircled{18} \quad y_2(t) = y_{20} + q_{20} t + \int_0^t [g_2(\tau) + y_1(\tau)] (t-\tau) d\tau$$

3 当 $\Lambda = \Lambda_3$

这时问题②取如下形式

$$\textcircled{19} \quad \begin{pmatrix} \ddots \\ y_1 \\ \ddots \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

(初始条件略)

当 $a \cdot d \neq 1$ 时, 我们得到

$$\begin{aligned} \textcircled{20} \quad y_1(t) = & y_{10} \sum_{k=1}^4 \frac{S_k^2 \exp(s_k t)}{4(S_k^2 - a)} + q_{10} \sum_{k=1}^4 \frac{S_k \exp(S_k t)}{4(S_k^2 - a)} \\ & - (ay_{10} + by_{20}) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k t)}{4(S_k^2 - a)} - (aq_{10} - bq_{20}) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k t)}{4S_k(S_k^2 - a)} \\ & - b \int_0^t g_2(\tau) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k(t-\tau))}{4S_k(S_k^2 - a)} d\tau + \int_0^t g_1(\tau) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k t)}{4S_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{21} \quad y_2(t) = & y_{20} \sum_{k=1}^4 \frac{S_k^2 \exp(S_k t)}{4(S_k^2 - a)} + q_{20} \sum_{k=1}^4 \frac{S_k \exp(S_k t)}{4(S_k^2 - a)} \\ & - (ay_{20} - by_{10}) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k t)}{4(S_k^2 - a)} - (aq_{20} - bq_{10}) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k t)}{4S_k(S_k^2 - a)} \end{aligned}$$

$$+ b \int_0^t g_1(\tau) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k(t-\tau))}{4S_k(S_k^2-a)} d\tau + \int_0^t g_2(\tau) \sum_{k=1}^4 \frac{\exp(S_k(t-\tau))}{4S_k} d\tau$$

$$\text{在此, } S_1 = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \exp(i\frac{\theta_1}{2}) \quad S_2 = -\sqrt{a^2+b^2} \cdot \exp(i\frac{\theta_1}{2})$$

$$S_3 = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \exp(i\frac{\theta_2}{2}) \quad S_4 = -\sqrt{a^2+b^2} \cdot \exp(i\frac{\theta_2}{2})$$

$$\theta_i = \arctg \frac{(-1)^{i-1}|b|}{a} \quad (i=1,2)$$

当 $a \cdot b = 0$ 时, 也得到 $y_1(t)$ 及 $y_2(t)$ 的表达式。但这些公式都不便于应用, 故略。

三、稳定性分析

作为范例, 仅仅考虑⑤式成立时, ②的解的稳定性。分以下几种情形:

I 矩阵 A 的特征值为实数 λ 和 μ

I $\lambda < 0, \mu < 0$ 且 $\lambda \neq \mu$, 这时 A 可对角化, $\Lambda = \Lambda_1$

a) 若 $\omega \neq \sqrt{-\lambda}$ 且 $\omega \neq \sqrt{-\mu}$

由 $\begin{cases} \textcircled{10} \\ \textcircled{12} \end{cases}$ (见表1) 可知, 对任何初值的解均稳定。

b) 若 $\omega = \sqrt{-\lambda}$

由 $\begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{12} \end{cases}$ 可知, 若 $H_1 \neq 0$, 则 $y_1(t)$ 不稳定, 于是②的解不稳定 (由⑪可知, 由于外

力的频率与系统的固有频率一致, 产生共振, 出现了“长期项” $\frac{-H_1}{2\omega} t \cos(\omega t + \varphi_1)$ 造成不稳定。

若 $H_1 = 0$, 这时②的解稳定。

c) 若 $H_1 = \sqrt{-\mu}$

由 $\begin{cases} \textcircled{10} \\ \textcircled{13} \end{cases}$ 可知, 若 $H_2 = 0$, 则②的解不稳定 (共振)。若 $H_2 = 0$, 则②的解稳定。

II $\lambda < 0, \mu > 0$ 且 $\lambda = \mu$, 这时 A 究竟化为 Λ_1 还是 Λ_2 , 要根据 A 的初级因子来判断 (参看下文中的例3)。

a) 若 $\Lambda = \Lambda_1$, 即 A 可对角化。这时

如果 $\omega \neq \sqrt{-\lambda}$, 由 $\begin{cases} \textcircled{10} \\ \textcircled{12} \end{cases}$ 可知对任何初值②的解均稳定。

如果 $\omega = \sqrt{-\lambda}$, 由 $\begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{13} \end{cases}$ 可知当 H_1 及 H_2 之一不为零, 则②的解不稳定 (共振态)。

若 $H_1 = 0 = H_2$, 则②的解稳定。

b) 若 $\Lambda = \Lambda_2$, 即 A 不可对角化。这时如果 $\omega \neq \sqrt{-\lambda}$, 由 $\begin{cases} \textcircled{10} \\ \textcircled{16} \end{cases}$ 及⑤可知, 当 $y_{10} = 0$

q_{10} 及 H_1 三数之一不为零时, $y_2(t)$ 不稳定, 于是②的解不稳定。当 $y_{10}=0=q_{10}=H_1$ 时, ②的解稳定。

如果 $\omega = \sqrt{-\lambda}$, 由 $\begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{16} \end{cases}$ 可知, $y_1(t)$ 当 $t \in [0, +\infty)$ 有界的充要条件是 $H_1=0$ 。又

除非初始条件很特殊(这种特殊条件由 $\begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{16} \end{cases}$ 可立即看出, 不赘述), 否则 $y_1(t)$ ($t \in [0, +\infty)$)无界。所以, 在 $\omega = \sqrt{-\lambda}$ 条件下, 一般说来, ②的解大都是不稳定的。

Ⅲ $\lambda > 0, \mu > 0$ 且 $\lambda \neq \mu$, 这时A可对角化, $\Lambda = \Lambda_1$ 。由 $\begin{cases} \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \end{cases}$ 可知, 当下述条件之一成立时, $y_1(t)$ 稳定。

$$1) \quad y_{10}=0=q_{10}=H_1$$

$$2) \quad y_{10}=0=p_{10}-H_1 \sin \varphi_1$$

同理 当下述条件之一成立时, $y_2(t)$ 稳定。

$$3) \quad y_{20}=0=q_{20}=H_2$$

$$4) \quad y_{20}=0=p_{20}-H_2 \sin \varphi_2$$

所以, 当条件1)、3)或1)、4)或2)、3)或2)、4)成立时, ②的解稳定。

其余情况, 读者可用 $\begin{cases} \textcircled{6} \\ \textcircled{7} \end{cases}$ 自行分析。

Ⅳ $\lambda > 0, \mu > 0$ 且 $\lambda = \mu$ 。这时A究竟化为 Λ_1 还是 Λ_2 仍由其初级因子来判断。

a) 若 $\Lambda = \Lambda_1$, 即A可对角化, 稳定性分析与Ⅲ同。

b) 若 $\Lambda = \Lambda_2$, 即A不可对角化, 用 $\begin{cases} \textcircled{6} \\ \textcircled{17} \end{cases}$ 可判断稳定与否。如根据

$$\int_0^t \sin(\omega \tau + \varphi_2) \cdot \text{Sh} \sqrt{\lambda} (t - \tau) d\tau \\ = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \omega^2} \left(\sin(\omega t + \varphi_2) - \sin \varphi_2 \text{Ch} \sqrt{\lambda} t \right) + \frac{\omega}{\lambda + \omega^2} \cos \varphi_2 \cdot \text{Sh} \sqrt{\lambda} t$$

可知, 当 $H_2 \neq 0$, 则 $y_2(t)$ 不稳定, 于是②的解不稳定。其余情况, 均可用此法导出结论。因条款太多, 故略。

Ⅴ $\lambda > 0, \mu < 0$, 这时可对角化, $\Lambda = \Lambda_1$ 。

a) $\omega \neq \sqrt{-\mu}$, 由 $\begin{cases} \textcircled{7} \\ \textcircled{12} \end{cases}$ 可知, 仅仅在特殊的初始条件(如 $y_{10}=0=q_{10}-H_1 \sin \varphi_1$)

下, ②的解才稳定。

b) $\omega = \sqrt{-\mu}$, 由 $\begin{cases} \textcircled{7} \\ \textcircled{13} \end{cases}$ 可知, 仅仅在特殊初始条件下, ②的解才稳定。

Ⅵ $\lambda = 0, \mu > 0$, 这时 $\Lambda = \Lambda_1$, 由 $\begin{cases} \textcircled{8} \\ \textcircled{7} \end{cases}$ 可知 $y_1(t)$ 稳定的充要条件是:

$$q_{10} + \frac{H_1}{\omega} \cos \varphi_1 = 0$$

$$\text{VII} \quad \lambda = 0 = \mu$$

a) 若 $\Lambda = \Lambda_1$, 由 $\begin{cases} \textcircled{8} \\ \textcircled{9} \end{cases}$ 可知, $y_i(t)$ 稳定的充要条件是:

$$q_{i0} + \frac{H_i}{\omega} \cos \varphi_i = 0 \quad (i=1,2)$$

b) 若 $\Lambda = \Lambda_2$, 由 $\begin{cases} \textcircled{8} \\ \textcircled{18} \end{cases}$ 可知, 仅仅在特殊初始条件下, ②的解才稳定。

其余情况就不讨论了。

2 矩阵 Λ 的特征值是一对共轭复数

$$\text{即 } \lambda = a + ib, \mu = a - ib \quad (b \neq 0)$$

这时 $\Lambda = \Lambda_3$ 。

我们仅仅得到如下结果: 如果 $F(t) \equiv 0$, (从而 $G(t) \equiv 0$), 且 $a > 0$, 又

$y_{10}q_{10} + y_{20}q_{20} > 0$ 时, 必有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = +\infty$$

$t \rightarrow +\infty$

事实上, 令 $\rho(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t) = \|Y(t)\|^2$, 在此, $y_i(t)$ ($i=1,2$) 是⑨的解 (注意这时 $g_i \equiv 0$ $i=1,2$)

$$\begin{aligned} \text{于是 } \ddot{\rho}(t) &= 2(\ddot{y}_1 y_2 + \ddot{y}_2 y_1) + 2(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= 2a\rho + 2(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{但 } a > 0 \text{ 时, } \ddot{\rho}(t) \geq 0 \quad \therefore \dot{\rho}(t) \uparrow \quad (\text{当 } t \uparrow)$$

$$\text{所以 } \dot{\rho}(t) \geq \dot{\rho}(0) = 2(y_{10}q_{10} + y_{20}q_{20}) = 2s_0 > 0$$

可见当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\|Y(t)\|^2 \rightarrow +\infty$, 于是 $\|Y(t)\| \rightarrow +\infty$

它的力学意义是: 即使无外力作用, 只要初值满足 $y_{10}q_{10} + y_{20}q_{20} > 0$, 系统也会失去稳定性。此结果值得从力学上进一步探讨。

四、阻尼振动的稳定性

系统的阻尼线性振动, 归结为如下 Cauchy 问题。

$$\textcircled{22} \begin{cases} \ddot{X}(t) = AX + B\dot{X} + F \\ X(0) = X_0 \quad \dot{X}(0) = P_0 \end{cases}$$

现在设 A 和 R 都是实对称的 2×2 矩阵, 且

$$AR = RA$$

(即它们是可交换的)。有正交矩阵 B 存在, 使

$$\begin{aligned} B^{-1}AB &= \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ B^{-1}RB &= \Lambda' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

取 $X=BY$, 得

$$\textcircled{23} \begin{cases} \ddot{Y} = \Lambda Y + \Lambda' \dot{Y} + G \\ Y(0) = Y_0, \quad \dot{Y}(0) = Q_0 \end{cases}$$

在此, $G = B^{-1}F$, $Y_0 = B^{-1}X_0$, $Q_0 = B^{-1}P_0$ 问题 $\textcircled{23}$ 相当于 $\begin{cases} \textcircled{24} \\ \textcircled{25} \end{cases}$

即

$$\textcircled{24} \begin{cases} \ddot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + \mu_1 \dot{y}_1 + g_1 \\ y_1(0) = y_{10} \\ \dot{y}_1(0) = q_{10} \end{cases}$$

$$\textcircled{25} \begin{cases} \ddot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + \mu_2 \dot{y}_2 + g_2 \\ y_2(0) = y_{20} \\ \dot{y}_2(0) = q_{20} \end{cases}$$

现在来解 $\textcircled{23}$ 。令

$$\mu_i^2 + 4\lambda_i = \Delta_i \quad (i=1, 2)$$

$$S_1 = \frac{\mu_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2}$$

$$S_2 = \frac{\mu_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2}$$

$$P_1 = \frac{\mu_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$P_2 = \frac{\mu_2 - \sqrt{\Delta_2}}{2}$$

我们得到如下结果:

若 $\Delta_1 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} y_1(t) = & (q_{10} - y_{10}\mu_1) \sum_{k=1}^2 \frac{\exp(S_k t)}{2S_k - \mu_1} + y_{10} \sum_{k=1}^2 \frac{S_k \exp(S_k t)}{2S_k - \mu_1} \\ & + \int_0^t g_1(\tau) \sum_{k=1}^2 \frac{\exp(S_k(t-\tau))}{2S_k - \mu_1} d\tau \end{aligned} \quad (26)$$

同样, 若 $\Delta_2 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} y_2(t) = & (q_{20} - y_{20}\mu_2) \sum_{k=1}^2 \frac{\exp(P_k t)}{2P_k - \mu_2} + y_{20} \sum_{k=1}^2 \frac{P_k (\exp(P_k t))}{2P_k - \mu_2} \\ & + \int_0^t g_2(\tau) \sum_{k=1}^2 \frac{\exp(P_k(t-\tau))}{2P_k - \mu_2} d\tau \end{aligned} \quad (27)$$

若 $\Delta_i = 0$, 则

$$y_i(t) = \exp\left(\frac{\mu_i}{2}\right) \left[v_{i0} + \left(q_{i0} - \frac{1}{2} y_{i0} \mu_i\right) t \right] + \int_0^t g_i(\tau) (t - \tau) \exp\left(\frac{\mu_i}{2} (t - \tau)\right) d\tau$$

$$(i = 1, 2) \quad (28) \quad (i = 1)$$

$$(i = 1, 2) \quad (29) \quad (i = 2)$$

用这些式子可判定阻尼振动是否稳定。用判别式 $\Delta_i (i = 1, 2)$ 的符号, 可将阻尼振动分类, 并逐类分析其稳定性。有了(26)~(29)式, 这些工作容易作出, 故从略。

五、应用举例

例1 落砂机的栅床和基础的振动, 可用如下方程描述

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - k_1^2 x_1 - k_2^2 x_2 = q \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 - k_{12}^2 x_1 + k_2^2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{见 [1]})$$

现在用本文第二、三节的结果分析振动的稳定性。我们研究如下Cauchy问题

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1^2 & k_2^2 \\ k_{12}^2 & -k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ X(0) = X_0, \quad \dot{X}(0) = P_0 \end{cases}$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} -k_1^2 & k_2^2 \\ k_{12}^2 & -k_2^2 \end{pmatrix}$$

由 $|A - \lambda I| = \lambda^2 + (k_1^2 + k_2^2) \lambda + k_2^2 (k_1^2 - k_{12}^2)$ 可见A的特征值为

$$\lambda = \frac{-(k_1^2 + k_2^2) \pm \sqrt{(k_1^2 + k_2^2)^2 - 4k_2^2 (k_1^2 - k_{12}^2)}}{2}$$

但 $k_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$, $k_{12}^2 = \frac{K_1}{m_2}$ (均见 [1])

由 $m_2 > m_1$, 可知 $k_1^2 > k_{12}^2$, 所以A的特征值均为负数且不相等。查表1, 可知其等效振动

$Y = BX$ 用 $\begin{cases} (10) \\ (12) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} (11) \\ (12) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} (10) \\ (13) \end{cases}$ 表示。其稳定性分析的详情见本文第三节中的1(I)。

由这些分析可以看出, 当外力产生共振时, 落砂机的振动会失去稳定性。而落砂机振动的非共振态都是稳定的。

例2 有阻尼动力减振器与主系统的振动可用方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = p \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_2 x_1 + K_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

来描述 (参看 [2])

化为矩阵形式, 研究如下Cauchy问题

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = AX(t) + R\dot{X}(t) + F(t) \\ X(0) \quad \dot{X}(0) = P_0 \end{cases}$$

式中

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{K_1+K_2}{m_1} & \frac{K_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_1} & -\frac{K_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

A为实对称矩阵。当 $m_1 = m_2$ 时, R也实对称。

又

$$AR - RA = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{K_1 c_2}{m_1^2} \\ -\frac{K_1 c_2}{m_1^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{当 } m_1 = m_2)$$

可见

1) 当 $K_1 = 0$ 时, $AR = RA$

2) 当 $K_1 \ll \frac{m_1^2}{c_2}$ 时, $AR \approx RA$

现在, 在 $K_1 = 0$ 且 $m_1 = m_2$ 条件下, 讨论振动的稳定性。

由

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + \frac{K_1 + 2K_2}{m_1^2} \lambda + \frac{K_1 K_2}{m_1^2} = 0$$

得A的特征值

$$\lambda_1 = -\frac{2K_2}{m_1^2} = \lambda_2 \quad (\text{当 } K_1 = 0)$$

又由

$$|R - \mu I| = \mu^2 + \frac{2c_2}{m_1^2} \mu + \frac{c_2^2}{m_1^2} = 0$$

得R的特征值

$$\mu_1 = -\frac{c_2}{m_1}$$

又 $G = B^{-1}F$ 。令

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

于是

$$G = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} P \sin \omega t \\ T_{21} P \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \mu_1^2 + 4\lambda_1 = \frac{c_2^2 - 8K_2}{m_1^2} = \Delta_2 = \mu_2^2 + 4\lambda_2$$

若 $c_2^2 = 8K_2$, 这时 $\Delta_1 = 0 = \Delta_2$ 用⑳式, 得到

$$y_1(t) = \exp\left(\frac{\mu_1}{2} t\right) \left[\left(q_{10} - \frac{1}{2} y_{10} \mu_1 \right) t + y_{10} \right] + \frac{4T_{11}P}{(\mu_1^2 + 4\omega^2)^2} \left[(\mu_1^2 - 4\omega^2) \sin \omega t + 4\omega \mu_1 \cos \omega t + \omega \exp \frac{\mu_1}{2} t \left((\mu_1 + 4\omega^2) t - 4\mu_1 \right) \right]$$

$$y_2(t) = \exp\left(\frac{\mu_2}{2} t\right) \left[\left(q_{20} - \frac{1}{2} y_{20} \mu_2 \right) t + y_{20} \right] + \frac{4T_{21}P}{(\mu_2^2 + 4\omega^2)^2} \left[(\mu_2^2 - 4\omega^2) \sin \omega t + 4\omega \mu_2 \cos \omega t + \omega \exp \frac{\mu_2}{2} t \left((\mu_2^2 + 4\omega^2) t - 4\mu_2 \right) \right]$$

(注意: 现在 $\mu_1 = \mu_2$)

由此可见

I) 当 $\Delta_1 = 0$ 且 $\mu_1 < 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0$, 故 $Y(t)$ 稳定。

II) 若 $\Delta_1 = 0$ 且 $\mu_1 > 0$ 时, 因为 B^{-1} 为满秩矩阵, 所以 T_{11} 及 T_{21} 不会同时为零, 于是 $T_{11}P$ 及 $T_{21}P$ 不同时为零。由㉑可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = +\infty$, 这时不稳定。

III) 当 $\Delta_1 = 0$ 且 $\mu_1 = 0$, 这时㉑式化为

$$\begin{cases} y_1(t) = y_{10} + q_{10}t + \frac{T_{11}P}{\omega_2} (-\sin \omega t + \omega t) \\ y_2(t) = y_{20} + q_{20}t + \frac{T_{21}P}{\omega_2} (-\sin \omega t + \omega t) \end{cases}$$

值得注意的是式中出现了“长期项”, 可见 $Y(t)$ 不稳定。

当 $\Delta_1 \neq 0$, 用 $\begin{cases} \text{㉒} \\ \text{㉓} \end{cases}$ 可判断 $Y(t)$ 是否稳定, 在此不讨论了。

例3 设某系统振动由如下的Cauchy问题描述

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

试分析其稳定性。

这是㉒的一特例, 取

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

A的特征值是 $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$ 。A的初级因子为:

$$\varphi_1(\lambda) = 1, \varphi_2(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

所以A为“非减次矩阵”。由此可知A可相似变换为:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

查表2, 知道系统的振动用 $\begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{16} \end{cases}$ 由 $B^{-1}AB = \Lambda_2$ 求出变换矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 于是 } B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}F = \begin{pmatrix} H_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ H_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = H_2, \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega = 1 = \sqrt{-\lambda}$$

$$Y_0 = B^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

$$Q_0 = B^{-1}P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{pmatrix}$$

于是, 由 $\begin{cases} \textcircled{11} \\ \textcircled{16} \end{cases}$, 得

$$y_1(t) = \cos t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{\sqrt{2}}{4} t \cos(t - \frac{\pi}{4})$$

$$y_2(t) = \sin t + \int_0^t \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\tau + \frac{\pi}{4}) + y_1(\tau) \right] \sin(t - \tau) d\tau$$

可见此系统不稳定。

我们对高维和高阶的振动作了类似的探讨, 特别对于3维问题, 得到异于具体结果。但件款更多, 兹从略。我们认为, 运用矩阵分析, 将振动分类进行研究, 是一种最自然的方法。

参 考 文 献

- 〔1〕 吕绍棣, 落砂机基础的减振问题, 华东交大学报第1期 1986
- 〔2〕 徐耀信, 有阻尼动力减振器设计中的应用中的几个理论问题的研究, 华东交大学报, 总第2期, 1985
- 〔3〕 张锦炎, 常微分方程几何理论与分支问题, 北京大学出版社, 1981

Prctical Stability of Oscillation

Liu Shijun

(Basic course department)

Abstract

In this paper we consider the practical stability of Oscillation. Vsing the matrix method, We classify second order stabilities into three cases. Almost all Oscillation functions were obtained in this paper. Wealso discussed some applications to Mechanics.