

# 用虚单元法处理边界单元法中的面力不连续点问题

刘 平

(工程力学研究室)

## 摘 要

本文在面力不连续点处, 提出虚单元法, 解决了因不连续点而引起的误差。此方法不但精度高, 而且可直接应用于处理多连域问题。本文编制了一组二维弹性平面问题程序。并给出了算例。

## 一、引 言

边界单元法 (BEM) 又叫边界积分法, 它是将问题的控制方程转换成边界积分方程, 然后在边界上取  $N$  个直线单元进行边界离散, 形成  $2N$  个代数方程组, 求解  $2N$  个未知量。

在BEM的数值方法中, 边界上一般都采用线性或高次单元, 这意味着边界上的函数是连续的或协调的, 此特性固然很好但却又引起了不少的问题: (I) 在边界上几何不光滑点处, 外法线不确定, 但面力却又要有一个确定的法线; (II) 在边界面上, 面力或位移有不连续点(我们统称这些点为边界奇点); 由于这些奇点的存在, 会导致很大的误差, 目前已有几种处理方案, 但都很不理想, 下文将要对此作些讨论, 同时说明虚单元的应用方法及合理性。

## 二、 BEM的列式

设一弹性体, 受一外力系作用, 其基本方程可写为:

平衡方程  $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$  (1)

几何方程  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$  (2)

物理方程  $\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + 2G/(1-2\mu) \cdot \epsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$   
 $= 2G (U_{i,j} + U_{j,i}) / 2 + G/(1-2\mu) \epsilon_{kk} \delta_{ij}$  (3)

边界条件  $\begin{cases} P_i = \bar{P}_i & \in T_1 \\ \bar{U}_i = \mu & \in T_2 \end{cases}$  (4)

其中  $b_i$  为体力;  $G$  剪切模量;  $\mu$  泊松比;  $\delta_{ij}$  为 Dirac 函数;  $T_1$ 、 $T_2$  分别为力和位移边界。

控制方程(1)可以通过Betti互等定理转换成边界积分方程。设一弹性体受两组外力作用：

第一组对应的解为： $\sigma_{ij}$ 、 $\epsilon_{ij}$ 、 $U_i$ 、 $P_i$

第二组外力的解为： $\sigma_{ij}^*$ 、 $\epsilon_{ij}^*$ 、 $U_j^*$ 、 $P_j^*$

由互等定理：

$$\int_n \alpha_{ij} \epsilon_{ij}^* d_r = \int_n \alpha_{ij}^* \cdot \epsilon_{ij} d_r \quad (5)$$

若取第一组为实际外力系，第二组为Kelvin解，这时对上式进行分部积分得到：

$$C_{ij} u_j = \int_T u_{ij}^* \cdot p_j dT - \int_T p_{ji}^* u_j dT + \int_r u_{ij}^* b_j d_r \quad (6)$$

式中带“\*”号量为基本解——Kelvin解， $u_{ij}^*$ 、 $p_{ji}^*$ 分别为在s点i方向作用单位力在p点j方向产生的位移和面力； $C_{ij}$ 为边界几何参数，对域内点 $C_{ij} = 1$ 。将(6)式代入(3)式得到应力方程：

$$\sigma_{ij} = \int_T u_{ijk}^* \cdot p_k dT - \int_T p_{ijk}^* \cdot u_k dT + \int_r u_{ijk}^* \cdot b_k d_r \quad (7)$$

上列式中的基本解，详见〔1〕。

### 三、数值离散

设有一边界单元，其内部量用节点的值进行线性插值，采用Cartesian坐标，

$$\begin{aligned} \cdot & \{U(\xi)\} = [N] \{U^a\} \\ \cdot & \{P(\xi)\} = [N] \{P^a\} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $U^a$ 和 $P^a$ 为 $\xi = -1, 1$ 时的量

图1  $[N] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \quad (9)$

将(8)、(9)两式代入(6)式：(将 $T = T_1 + T_2$ 分为 $N$ 个单元)

$$\begin{aligned} [C(S_j)] \cdot \{U(S_j)\} &= \sum_{j=1}^N \left( \int_{T_j} [U^*] \cdot [N] dT \right) \cdot \{P^a\} \\ &- \sum_{j=1}^N \left( \int_{T_j} [P^*] \cdot [N] dT \right) \cdot \{U^a\} \end{aligned} \quad (10)$$

上式未考虑体力项；对上式各项进行数值积分：

$$\begin{aligned} dT &= |J| d\xi \\ \int_{T_j} [P^*] \cdot [N] dT &= \int_{-1}^1 [P^*] \cdot [N] \cdot |J| \cdot d\xi = \sum_{k=1}^M |J| \cdot W_k \cdot \left( [P^*] \cdot [N] \right)_k \\ \int_{T_j} [U^*] \cdot [N] dT &= \int_{-1}^1 [U^*] \cdot [N] |J| d\xi = \sum_{k=1}^M |J| \cdot W_k \cdot \left( [U^*] \cdot [N] \right)_k \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $|J|$ 为雅可比矩阵， $M$ 为积分点数， $W_k$ 为加权系数，于是(10)式变为：

$$\begin{aligned} \left( [C] + [\hat{H}] \right) \cdot \{U\} &= [G] \cdot \{P\} \\ [H] \cdot \{U\} &= [G] \cdot \{P\} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $[C]$ 的求解见〔2〕、〔3〕、〔4〕，同样可得到应力式

$$\{\sigma\} = [G]' \cdot \{P\} - [H]' \cdot \{U\} \quad (13)$$

由于向量{U}、{P}中都含有已知和未知量,故在求解之前必须调整这些量,使未知的放在一边:

$$(12) \text{ 式对应: } [A] \cdot \{y\} = \{f\} \quad (14)$$

$$(13) \text{ 式对应: } \{\sigma\} = - [A]^{-1} \cdot \{y\} + \{f\}'$$

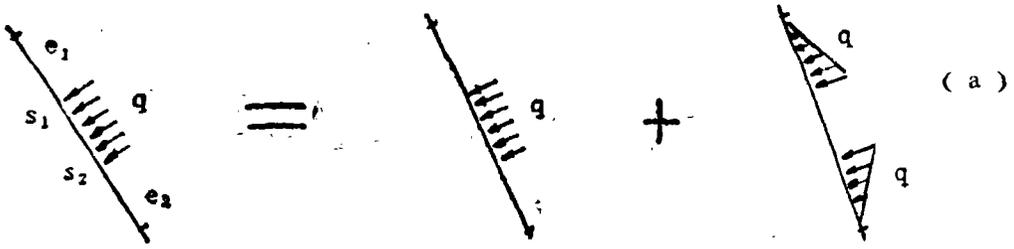
将第一式代入第二式得到:

$$\{\sigma\} = - [A]^{-1} \cdot [A]^{-1} \cdot \{f\} + \{f\}' \quad (15)$$

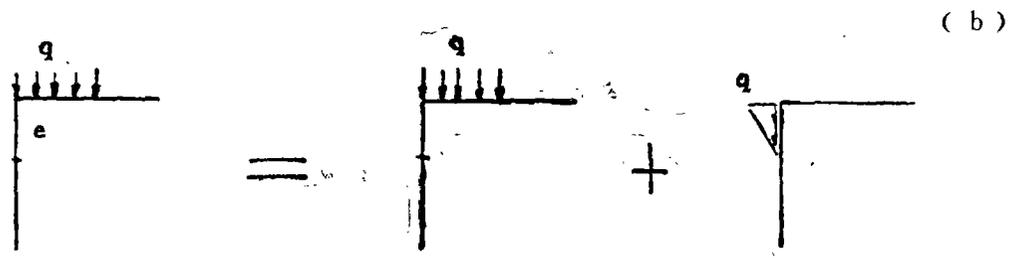
对域内任何一点的应力都可以因此式求解,

#### 四、虚单元的引进:

上面的推导是以(8)式的插值形式为基础,对于这种插值,当遇到不连续点时,就会因线性插值而引起多余的载荷,见下图示意。最右边的载荷就是多余,本来系统并不受它的作用,所以必须消去它。



(a)



(b)

图 2

目前对这种奇异点的处理还很不成熟, [5] 中介绍了两种方法: 对于(b)种情况, 改变角点两单元为一个常量元, 同时撤去角点(S点)。这虽然消掉了多余载荷, 但改变了结构的几何形状, 而且对(a)种情况也无能为力; 第二种是改变面力不连续点处的相邻单元长度, 当e很小时, 那么多余载荷边就很小, 理论上当  $e \rightarrow 0$  时, 多余载荷不存在, 但此时, 因  $e = 0$ , 代数方程会变得奇异性, 以致无法求解。这两种方法是不能令人满意的, 肯定还会给结果带来误差的。在 C. Pattersdu(b) 的一篇文章中, 给出了一种可以完全消去多余载荷的方法, 其方法, 是单元内的插值不用结点的值, 而且  $\xi = \pm \frac{1}{2}$  两个点, 见下图, 这样虽然可以消去多余外载, 但最后的代数方程数由 2N 变到 4N, 本来BEM中代数方程是满阵求解很费时间, 这样一翻倍, 就很不经济, 有可能体现不了BEM的优越性。

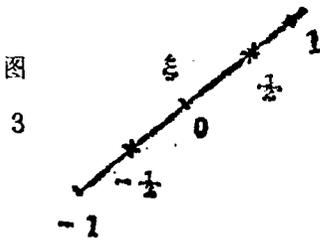


图 3

位 移				力 面				点号
数 值 解		解 析 解		数 值 解		解 析 解		
x	y	x	y	x	y	x	y	
-0.12E-0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	-14.87	0.0	0.0	1
0.0	0.12E-05	0.0	0.0	-14.87	0.0	-15.0	0.0	22
0.298E+02	0.0		0.0	0.0	-14.93	0.0	-15.0	7
0.298E+02	-0.745E-05		0.0	-15.00	0.0	-15.0	0.0	8

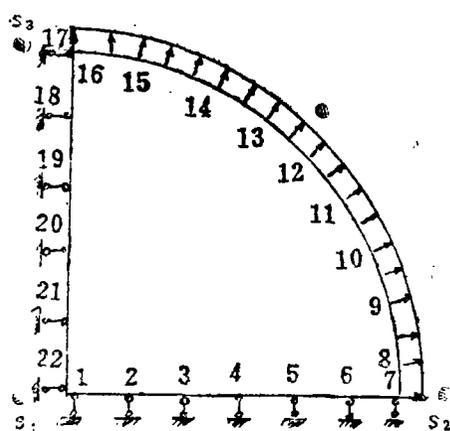


图 4 受均布外载的圆盘

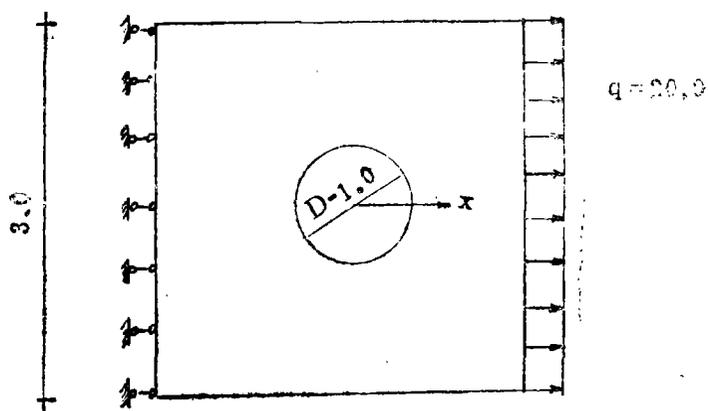


图 5 拉孔板

基于上述情况，本文提出虚单元法，其形式类似于上面提到的第二种方法，此时取  $e = 0$ ，那么就无多余载荷了，这似乎会给代数方程带来奇异性，但只要程序中，对单元循环时，此处不作单元考虑就可以了。另外，角点处的外载荷按下式给出：

$$0 = e_1 \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix} \cdot (x_1, y_1) \quad \left\{ \begin{matrix} P_x \\ P_y \end{matrix} \right\}_s = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ q \end{matrix} \right\} \in e_1; \quad \left\{ \begin{matrix} P_x \\ P_y \end{matrix} \right\}_{s'} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \in e_2$$

在BEM中，边界的分段线性插值离散，意味着代数方程的独立，所以两个相邻单元在公共点处的物理量允许不连续，故虚单元的提出是有理论依据的，在实际应用中也是很方便的，不但精度较高而且可以直接用于多连域问题中。在一般BEM中，对多连域问题，要专门处理，所以虚单元的引进有很广泛的实用性。

### 五、数值结果分析

本文利用了上述处理‘角点’的方法，编制了一组计算程序，为了对此方法正确性的校核，文中给出了一些具有代表性的算例。

图4是一个受外压的1/4圆盘，数值结果和解析值都列在表1里，从表中可见，本方法计算精度是比较高的，在面力方面其最大误差小于0.78%；在位移方面，虽然在‘角点’处位移有不连续现象，但可以认为这是计算误差引起的，于方法本身无关，因为它与一般位移值相差达六、七个数量级以上，故可不予考虑。另外，本文还按〔5〕的方法计算了此例在(3.0, 3.0)处的应力值， $\sigma_x = \sigma_y = 14.2633$ ，其误差为4.91%，而本方法的结果是14.90，误差为0.67%。同样，对单边正方形拉板(图9)也作过类似的计算比较，本方法误差是0.008%，

〔5〕的误差为7.92%，通过这些比较，可见本方法的合理性和正确性。〔5〕之所以会引起如此大的误差，还是对‘角点’处理不当的结果。

在考察多连域问题方面，本文直接用了上述程序，考证了一个正方拉孔板的算例(图5)，数值结果见图6，并且与解析解作了比较，结果也比较令人满意。只是靠近孔边稍有偏差，这主要是由于应力集中而引起的，若在孔边上单元给密些，预计可消除这种偏差。利用给出的处理‘角点’的方法直接应用到计算多连域问题，从数值结果可见，不会因此而引起任何不良的结果。相反，它用起来方便，原始数据准备简单，不需要作任何特殊处理，就象对待单连域问题一样。

另外，本文还考虑了另一类的算例——受弯悬臂梁(图7)，数值结果如图8，其BEM的应力分布曲线和解析的曲线几乎完全吻合。通过此例，从而进一步说明了本方法具有广泛的适用性。

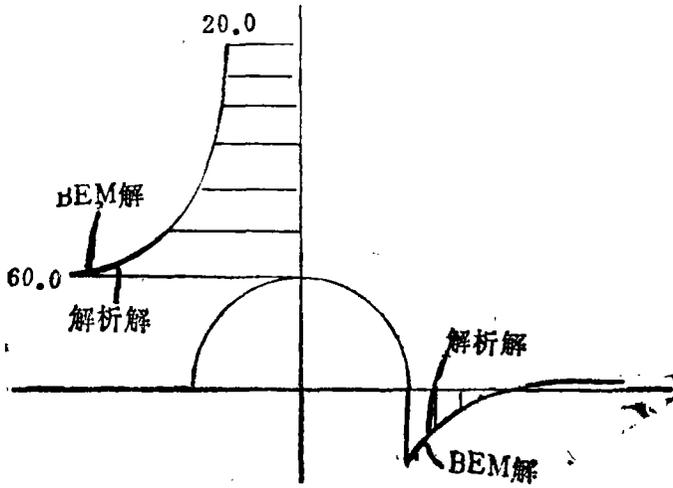


图6 应力分布

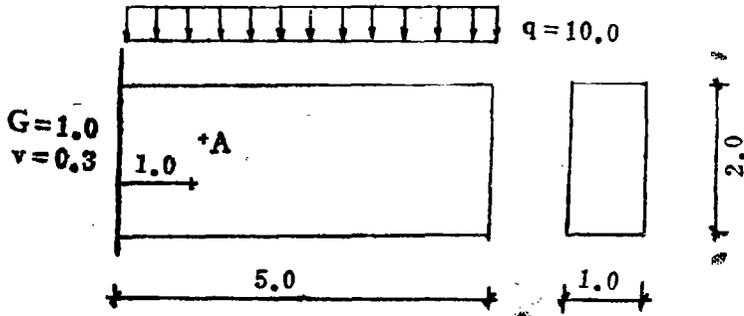


图7 受均布载荷的悬臂梁

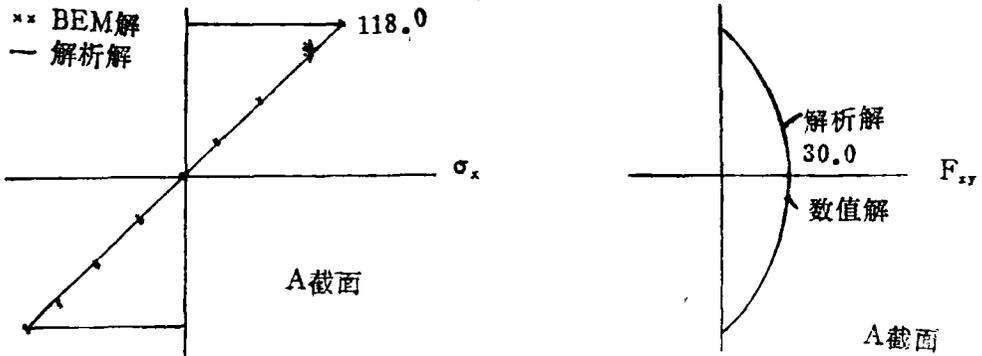
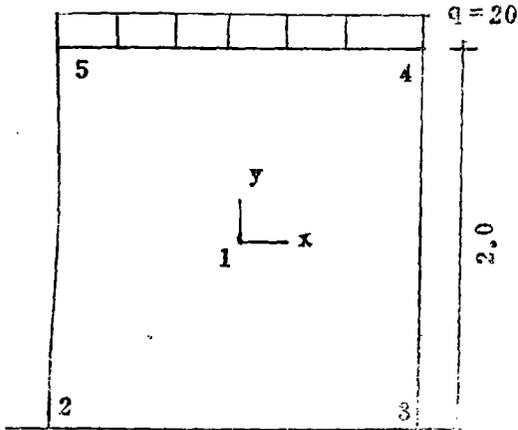


图8 梁的应力分布图



正方形拉板

19.7265	19.7265
$2.3 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$
0.0	0.0
	19.3984
	-0.6244
	$1.63 \times 10^{-2}$
19.7265	19.7265
$2.3 \times 10^{-2}$	$2.3 \times 10^{-2}$
$3.5 \times 10^{-7}$	0.0

BEM计算结果

图 9

## 六 结 论

- 1、本文提出的处理面力连续点的方法，简单实用。由于在程序中作了适应的处理，不会因两点坐标相同而引起奇异解。
- 2、本方法不但精度较高，而且可直接应用到多连域问题中，因此它具有广泛的实用性。
- 3、在处理材质不均匀以及BEM与FEM耦合问题中，也有“角点”的问题，本方法也可直接应用到这里来，这为BEM的应用推广也起到了一定的作用。

## 参 考 文 献

- [1] 刘平用边界单元法分析飞机发动机涡轮盘高温蠕变问题。西南交大硕士毕业论文 1985
- [2] Genmay, W., Computing The C-Matrix in Non-Smooth Boundary Points Friedel Hartmann, Uni. of Dortmund
- [3] Brebbia, C. A., Progress in Boundary Element Methods, Vol.
- [4] Brebbia, C. A., the Boundary Element Method for Engineers
- [5] 沈家荫等，弹塑性耦合法及其水利工程中的应用，第一届工程中的BEM会议文集。
- [9] Patterson, C., Non-Conforming Boundary Element for Stress Analysis «Boundary Element Method», Proceedings of the 3rd International Seminar, 1983.