

完全图同构的因子分解的对称群

周 尚 超

(基础课部)

提 要

本文得到了完全图 K_p 存在同构的因子分解且此分解的对称群是一个单轮换生成的循环群的充分必要条件。

文献[1]的第六部分提出这样一个问题: 给定固定的置换群 H , p 为何值时存在 K_p (p 个顶点的完全图)的一个同构的因子分解以 H 为对称群? 当 H 是一个单轮换生成的循环群时本文回答了这个问题, 即我们得到如下定理。

定理 K_p 存在同构的因子分解

$$K_p = G_1 U G_2 U \cdots U G_n \quad (*)$$

且此分解的对称群是 n 阶循环群 $\langle (G_1 G_2 \cdots G_n) \rangle$ 的充分必要条件是 $p > 3$ 且 $p \equiv 0$ 或 $1 \pmod{f(n)}$, 这里 $f(n) = n$, 当 $n \equiv 1 \pmod{2}$; $f(n) = 2n$, 当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 。

我们说 $(*)$ 是 K_p 的一个同构的因子分解, 如果下列条件满足: (1) G_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 是 K_p 的生成子图, (2) 对任意 i, j , G_i 与 G_j 同构, (3) 当 $i \neq j$ 时, G_i 与 G_j 没有公共边。图 G 的自同构群用 $\text{Aut } G$ 表示, G_i 到 G_j 的同构映射的集合用 $(G_i \rightarrow G_j)$ 表示。若 $\sigma \in \text{Aut } K_p = S_p$ (p 个文字的对称群), σ 诱导出集合 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 上的一个置换 $\bar{\sigma}$, 则所有的这样 σ 组成的群称为 K_p 同构的因子分解的完全对称群, 用 A 表示, 由 A 诱导出的 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ 的上的置换群称为 K_p 同构的因子分解的对称群, 用 $\bar{A}$ 表示, $\bar{A}$ 由 $\bar{\sigma}$ 生成的群用 $\langle \bar{\sigma} \rangle$ 表示。单轮换 $\bar{\sigma} = (G_1 G_2 \cdots G_n)$ 表示这样的置换: $\bar{\sigma}(G_i) = G_{i+1}$ ($1 \leq i < n$), $\bar{\sigma}(G_n) = G_1$ 。每个轮换总可以用不交轮换之积来表示。根据群论有如下引理。

引理 1, 设 A 是集合 V 上的置换群, $i \in V$, $A_i = \{\tau \mid \tau \in A, \tau(i) = i\}$, $i^A = \{\tau(i) \mid \tau \in A\}$, 则 $|A| = |A_i| \cdot |i^A|$ 。

本文于1987年3月31日收到

由引理 1 可得如下引理。

引理 2 设 A 和 $\bar{A}$ 分别是分解 $(*)$ 的完全对称群和对称群, $(G_1 G_2 \cdots G_n) \in \bar{A}$ 若由 $\tau \in A \cap \text{Aut} G_1$ 可推出 $\tau \in \text{Aut} G_i (i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $\bar{A} = \langle (G_1, G_2, \cdots, G_n) \rangle$ 。

例 1 图 1 给出分解 $K_5 = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_5$ 。设 $\sigma = (12345)$, 则 $\sigma \in (G_i \rightarrow G_{i+1})$, 即 $\bar{\sigma} = (G_1 G_2 \cdots G_5) \in \bar{A}$ 。若 $\tau \in A \cap \text{Aut} G_1$, 则 $\tau(2) = 2$, 因此 $\tau \in \text{Aut} G_2$ 或 $\tau \in (G_2 \rightarrow G_4)$ 。若 $\tau \in (G_2 \rightarrow G_4)$, 则 $\tau(5) = 4$, $\tau \notin \text{Aut} G_1$, 矛盾, 因此 $\tau \in \text{Aut} G_5$, 同理又可推出 $\tau \in \text{Aut} G_i (i=3, 4, 5)$, 根据引理 2, $\bar{A} = \langle \bar{\sigma} \rangle$ 。

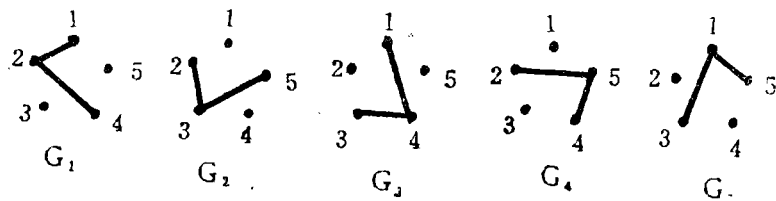


图 1 K_5 的一个分解

定理必要性的证明: 设 $\bar{A} = \langle (G_1 G_2 \cdots G_n) \rangle$, 则存在 $\sigma \in A$, $\sigma \in (G_i \rightarrow G_{i+1})$ $\sigma^a \in \text{Aut} G_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 。若 $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b$, $a \neq b$, 以 a, b 为顶点的边 $[a, b]$ 是 G_i 的一条边, 则 $\sigma[a, b] = [\sigma(a), \sigma(b)] = [a, b]$ 是 G_{i+1} 的边, G_i 与 G_{i+1} 有公共边, 矛盾。因此 σ 至多有一个不动点。令 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t$ 是 σ 不交的轮换分解, 则 σ 至多只有一个因子是 1 轮换。设 $\sigma_1 = (a_1 a_2 \cdots a_j) (j \neq 1)$, $K_j(\bar{G}_i)$ 是 $K_p(G_i)$ 的以 $\{a_1, a_2, \cdots, a_j\}$ 为顶点集的导出子图, 则 $K_j = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2 \cup \cdots \cup \bar{G}_n$ 是 K_j 的同构的因子分解, $\sigma^1 \in (\bar{G}_i \rightarrow \bar{G}_{i+1})$, $\sigma_1^a \in \bar{G}_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 设 $j = Cn + h (0 < h < n)$, 则 $\sigma_1^1 \in (\bar{G}_1 \rightarrow G_{1+h})$, 矛盾, 因此 $j \equiv 0 \pmod{n}$, 若 $n \equiv 0 \pmod{2}$, 因为 n 整除 K_j 的边的数目, 所以 $j \equiv 0 \pmod{2n}$ 。 σ 的每个不是 1 轮换的因子都有此结论。 K_3 的同构的因子分解是唯一的, 如图 2 所示, 这个分解的对称群 $\bar{A} = S_3$ 不是 3 阶循环群。

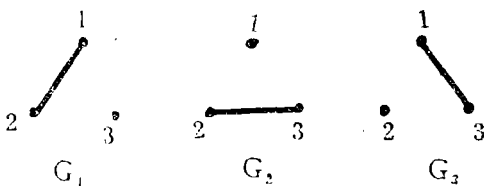


图 2 K_3 的分解

定理充分性的证明。若 $n=2$, 这属于自补图的情形, 由 [1] 第 6 部分知 $\bar{A} = S_2$ 也是 2 阶循环群。下面设 $n \geq 3$ 。令 $V = \{1, 2, \cdots, p\}$ 是 K_p 的顶点集, 我们把 $\min(|i-j|,$

$p - [i - j])$ 称为边 $[i, j]$ 的长度。设 $p \equiv 0 \pmod{n}$, $p = mn$, $\sigma = (12 \cdots p)$ 。
 令 E^* 是具有 $[p/2]$ 条边的集合, 这些边的长度分别为 $1, 2, \cdots, [p/2]$ 。令 G_1 的边集
 $E_1 = E^* \cup \sigma^n(E^*) \cup \sigma^{2n}(E^*) \cup \cdots \cup \sigma^{(m-1)n}(E^*)$ 。这里 $\sigma(E)$ 表示边集
 $\{\sigma(e) | e \in E\}$ 。令 $G_i = \sigma^{i-1}(G_1)$ 是 K_p 中以 $\sigma^{i-1}(E_1) = E_i$ ($i = 2, 3, \cdots, n$) 为
 边集的图, 则易知 $K_p = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$ 是一个同构的因子分解, 且 $\sigma \in A$, $\overline{\sigma} =$

$(G_1 G_2 \cdots G_n) \in \overline{A}$ 。设 $V_i = \{i, n+i, 2n+i, \cdots, (m-1)n+i\}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)。因为 $\sigma^n \in \text{Aut } G_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 因在 G_1 中 V_i 中任一顶点的度都相同, 这个度记为 d_i 。设 E^* 是这样选择的, 它使 d_i 满足下列条件 (**):

$$d_1 \nmid d_i \ (i \nmid 1), \ d_2 \nmid d_i \ (i \nmid 2) \quad (**)$$

若 $\tau \in A \cap \text{Aut } G_1$, 则 $\tau(V_1) = V_1$, $\tau(V_2) = V_2$ 。因为 V_2 是 G_2 的度为 d_1 的顶点集, V_2 不是 G_1 ($i \nmid 2$) 的度 d_1 的顶点集, 因此 $\tau \in \text{Aut } G_2$ 。 V_3 是 G_2 的度为 d_2 的顶点集, 因此 $\tau(V_3) = V_3$ 。 V_3 是 G_3 的度为 d_1 的顶点集, V_3 不是 G_1 ($i \nmid 3$) 的度为 d_1 的顶点集, 因此 $\tau \in \text{Aut } G_3$, 如此类推, 可得 $\tau \in \text{Aut } G_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 因此 $\overline{A} = \langle \overline{\sigma} \rangle$ (引理 2)
 当 $p \equiv 0 \pmod{2}$, $p > 6$, 或 $p \equiv 1 \pmod{2}$, $n > 3$, $p \geq 9$ 时, 令

$$E^* = \{[1, 2], [1, 3], \cdots, [1, \frac{p}{2}], [2, \frac{p}{2} + 2]\} \quad (1)$$

则可算出 $d_1 = [\frac{mn}{2}] + [\frac{m-1}{2}] - 1 > d_2 = 2 + [\frac{m-1}{2}] > d_i$ ($i > 2$)。当 $p \equiv 1 \pmod{2}$

$n = 3$ 时, 令

$$E^* = \{[1, 2], [1, 3], \cdots, [1, \frac{p+1}{2}]\} \quad (2)$$

则 $d_1 = \frac{mn-1}{2} + \frac{m-1}{2} > d_2 = 1 + \frac{m-1}{2} > d_3 = \frac{m-1}{2}$ 。因此当 $p \equiv 0 \pmod{n}$ 时, 条件

(**) 是可以满足的, 这和情况下的充分性已证毕。设 $K_p = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$ 是
 $p \equiv 0 \pmod{n}$ 时取 E^* 为 (1) 或 (2) 所得的分解。增加一个顶点 V_0 , 令 V_0 与 G_i 中
 V_i 的所有顶点都邻接而得到的图仍记为 G_i , 则 $K_{p+1} = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$ 是一个同构的因
 子分解, $\sigma = (V_0)(12 \cdots p) \in A$, $\overline{\sigma} = (G_1 G_2 \cdots G_n) \in \overline{A}$ 。顶点 V_0 在任一
 因子 G_i 中的度都是 m 。当 $m \nmid 1$ 时, $d_1 + 1 > m \geq d_2$, 在任意一个因子 G_i 中, V_0 是与所有度
 为 $d_1 + 1$ 的顶点邻接的唯一顶点, 因此对任意 $\tau \in A$, 都有 $\tau(V_0) = V_0$ 。若 $\tau \in A \cap \text{Aut } G_1$ 则 $\tau(V_1)$
 $= V_1$, $\tau(V_2) = V_2$, 类似前面可证 $\overline{A} = \langle \overline{\sigma} \rangle$ 。当 $m = 1$ 时, $p \geq 9$, 则 $d_1 > d_2 > d_i$ ($i \nmid 1, 2$)

$\overline{A} = \langle \overline{\sigma} \rangle$ 。因此除了 $p = 4, 5, 6, 7$ 外, 定理的充分性已证明。 K_4 的分解如图 3 所示。

$\overline{A} = \langle \overline{\sigma} \rangle$, $\sigma = (0)(123)$, $\overline{\sigma} = (G_1 G_2 G_3)$ 。

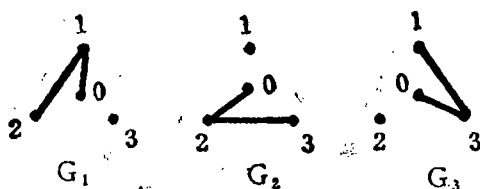


图3 K_4 的分解

例1给出 $p=5$ 的情形。根据例1中 K_5 的分解作 $K_6 = K_5 + 1$ 的分解, 可证此分解的群 $\overline{A} = \langle G_1 G_2 \dots G_5 \rangle$ 。令 E^* 为 (1) 式作 K_6 的分解如图4所示 K_6 的3个因子的自同构群都相同, 因此 $\overline{A} = \langle (G_1 G_2 G_3) \rangle$ 。

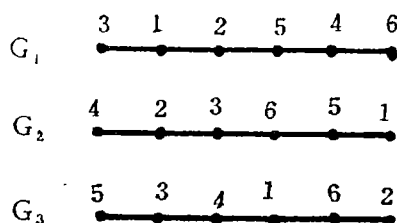


图4 K_6 的分解

由 K_6 的分解作 $K_7 = K_6 + 1$ 的分解, 可证 $\overline{A} = \langle (G_1 G_2 G_3) \rangle$ 。按照 E^* 为 (1) 式作 K_7 的分解, 类似例1可证 $\overline{A} = \langle (G_1 G_2 \dots G_7) \rangle$, 由 K_7 的这个分解作 $K_8 = K_7 + 1$ 的分解, 易证 $\overline{A} = \langle (G_1 G_2 \dots G_7) \rangle$ 。

参 考 文 献

- [1] F. Harary and R. W. Robinson, Isomorphic factorizations X
Unsolved problems. J, Graph Theory, Vol, 9 No, 1 (1985) 67—86.

The Symmetry Groups of Isomorphic Factorizations of Complete Graphs

Zhou Shangchao

East China Jiaotong University, Nanchang

Abstract

Given a fixed permutation group H , for which p is there an isomorphic factorization of K_p such that H is its symmetry group? This problem was posed in Ref. [1]. For the cyclic group $H = \langle (G_1 G_2 \dots G_n) \rangle$, We give an answer of the problem.