

自补完全超紧图

周 尚 超

(基础课部)

摘 要

本文证明了有两类自补图是自补TSC图的核并给出了不是TSC图的自补图的构造。

一、引 言

本文采用文[1]中的记号和术语,除非另外说明。设 $a, b \in V(G)$, A 和 B 分别是与 a 和 b 邻接的顶点集。如果 $A - b = B - a$, 则称 a 与 b (在 G 中) 恒等, 记为 $a \equiv b$ 。如果图 G 中任何两点都不恒等, 则称 G 是完全超紧图, 简称为TSC图。设 G 是TSC图, $V(G^*) = \{u \in V(G) \mid G - u \text{ 是TSC图}\}$ 。我们称由 $V(G^*)$ 导出的 G 的子图 G^* 为 G 的核。

G. L. Chia和C. K. Lim在文[2]中提出6个关于完全超紧图的问题, 其中第五个问题是: 令 H 是自补图, 问是否存在自补TSC图 G , 使得 $H = G^*$ 。本文证明有两类自补图是自补TSC图的核并给出了不是TSC图的自补图的构造。

二、两类可作为自补TSC图的核的图

我们用 $\deg(a, G)$ 表示图 G 的顶点 a 的度。显然, 若 $a \equiv b$, 则 $\deg(a, G) = \deg(b, G)$ 。

引理1、设 $u \in V(G)$ 。若在 $G - u$ 中 $a \equiv b$, 则 $|\deg(a, G) - \deg(b, G)| = 1$ 。这里 G 是TSC图。

证明, 如果在图 G 中, a 和 b 都与 u 邻接 (或都与 u 不邻接), 则在图 G 中, $a \equiv b$ 。这与 G 是TSC图矛盾。因此在图 G 中, a 和 b 中有且仅有一个与 u 邻接, 即 $|\deg(a, G) - \deg(b, G)| = 1$ 。

定理1、设 H 是 $4n$ 阶自补图。若 H 是TSC图, 则存在自补TSC图 G , 使得 $G^* = H$ 。

本文于1987年10月10日收到

证明、设 a 是 H 的度为 d 的顶点,则 a 在 H 的补图 $\overline{H}$ 中的度为 $4n-d-1$ 。这说明 H 含有度为 d 的顶点当且仅当 H 含有度为 $4n-d-1$ 的顶点。因此我们可设 H 的顶点的不同的度数为 $d_1 < d_2 < \dots < d_K < D_K < D_{K-1} < \dots < D_2 < D_1$,其中 $d_i + D_i = 4n-1, i=1, 2, \dots, K, K \geq 1$ 。我们也用 $d_i(D_i)$ 表示 H 的度为 $d_i(D_i)$ 的顶点集。令

$$D = D_1 \cup d_2 \cup D_3 \cup d_4 \cup \dots \cup d_{K-1} \cup D_K (K \equiv 1 \pmod{2})$$

$$\overline{D} = D_1 \cup d_2 \cup D_3 \cup d_4 \cup \dots \cup D_{K-1} \cup d_K (K \equiv 0 \pmod{2})$$

用 $\overline{D}$ 表示点集 $V(H) - D$

设 $G^0 = 1, 2, 3, 4$ 是4阶自补图。将 G^0 与 H 按下述方式邻接而得到的图为 G (图1): $i(i =$

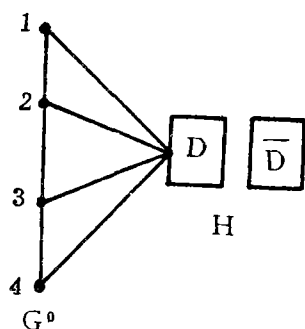


图1、图 G

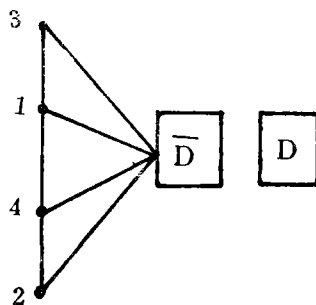


图2、图 $\overline{G}$

1、2、3、4)与 D 中所有的顶点都邻接。由图1和图2,易知 G 是自补图。

因为 H 是TSC图,因此 H 的任何两个点不恒等。根据 G 的作法, G 的任何两点都不恒等,所以 G 是TSC图。要证 $G^* = H$,只要证以下两点:1) $G-i (i=1, 2, 3, 4)$ 不是TSC图。2) $G-u (u \in D \cup \overline{D})$ 是TSC图。

1) 在 $G-1$ 中, $2 \equiv 4$; 在 $G-2$ 中, $3 \equiv 4$; 在 $G-3$ 中, $1 \equiv 2$; 在 $G-4$ 中, $1 \equiv 3$ 。因此 $G-i (i=1, 2, 3, 4)$ 不是TSC图。(参看图1)。

2) 在图 $G-u (u \in D \cup \overline{D})$ 中,如果有两个顶点恒等: $a \equiv b$,则 a 和 b 都在 D 中或都在 $\overline{D}$ 中(参看图1)。根据引理1, $|\deg(a, G) - \deg(b, G)| = 1$ 。但是根据 D 的作法, $D(\overline{D})$ 中任何两点的度之差不为1。因此 $G-u$ 中任何两点不恒等, $G-u$ 是TSC图。

设 G 是自补图,则存在 $V(G)$ 上的置换 f ,使得 f 是 G 到 $\overline{G}$ (G 的补图)的同构映射。我们称 f 是 G 的自补置换。

引理2, [3] 设 f 是自补图 G 的自补置换。若将 f 表示为不交的轮换之积,则 f 除了至多有一个长为1的轮换外其余每个轮换的长 $\equiv 0 \pmod{4}$ 。特别地,如果 G 是奇数阶自补图,则 f 恰有一个长为1的轮换。

引理3、设 G 是 $4n+1$ 阶自补图,则存在 $u_0 \in V(G)$,使得 $G-u_0$ 是 $4n$ 阶自补图且 G 中与 u_0 邻接的顶点有 $2n$ 个。这里 u_0 是 G 的某个自补置换的不动点。

证明、根据引理2,设 f 是 G 的自补置换且 $f = f_0 f_1 f_2 \dots f_K$ 是 f 的不交的轮换分解。其中 f_0 且 $f_0 = (u_0)$ 是长为1的轮换。因为 f 是同构映射 $G \rightarrow \overline{G}$,因此 $f_1 f_2 \dots f_K$ 是同构映射 $G-u_0 \rightarrow \overline{G-u_0}$ 。因为 $\overline{G-u_0} = \overline{G} - u_0$,因此 $G-u_0$ 是自补图。设 $f_1 = (u_{i1} u_{i0} \dots u_{it_i}) (i=1, 2, \dots, K, t_i \equiv 0 \pmod{4})$ 。若 u_0 与 u_{i1} 在 G 中邻接,则 $f(u_0) = u_0$ 与 $f(u_{i1}) = u_{i2}$ 在 G 中邻

接, 即 u_0 与 u_{i_2} 在 G 中不邻接。若 u_0 与 u_{i_1} 在 G 中不邻接, 则 $f(u_{i_1}) = u_{i_2}$ 在 G 中不邻接, 即 u_0 与 u_{i_2} 在 G 中邻接。这说明 (u_{i_1}, u_{i_2}) 中有且仅有一个点与 u_0 在 G 中邻接。由此可推出, 若 u_0 与 u_{i_s} 邻接, 则 u_0 与 u_{i_t} 邻接当且仅当 $t \equiv s \pmod{2}$ 。因此 u_0 与 $(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_t})$ ($i = 1, 2, \dots, K$) 中的 $t_i/2$ 个顶点邻接, G 中与 u_0 邻接的顶点有 $2n$ 个。

定理 2、设 H 是 $4n+1$ 阶自补 TSC 图且 $H-u_0$ 是 $4n$ 阶自补图, 这里 u_0 是 H 的某个自补置换 f 的不动点。如果与 u_0 邻接的任何两个顶点的度之差不为 1, 则存在自补 TSC 图 G , 使得 $G^* = H$ 。

证明、设在图 H 中与 u_0 邻接的顶点集是 D , 与 u_0 不邻接的顶点集是 $\bar{D}$ 。根据引理 3 的证明, $f(D) = \{f(u) \mid u \in D\} = \bar{D}$ 。如果 a 是 D 中 H 的度为 d 的顶点, 则 $f(a)$ 是 $\bar{D}$ 的度为 d 的顶点, 因此 $f(a)$ 是 D 中 H 的度为 $4n-d$ 的顶点。因为 D 中任何两点的度之差不为 1, 所以 $\bar{D}$ 中任何两点的度之差也不为 1。仍设 $G^0 = 1234$ 是 4 阶自补图。令 G^0 与 H 按如下方式邻接而得的图为 G (图 3): i ($i = 1, 2, 3, 4$) 与 D 中所有顶点都邻接, u_0 与 2 和 3 都邻接。由图 3 和图 4, 易知 G 是自补图。因为 H 中任何两个点不恒等根据 G 的作法, G 的任何两点不恒等, G 是 TSC 图。要证 $G^* = H$, 只要证以下两点: 1) $G-i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 不是 TSC 图。2) $G-u$ ($u \in u_0 \cup D \cup \bar{D}$) 是 TSC 图。

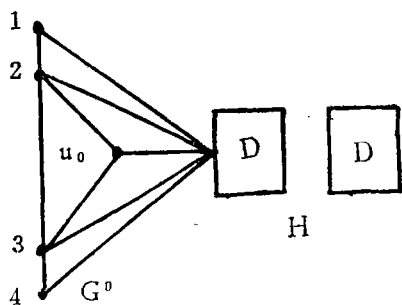


图 3、图 G

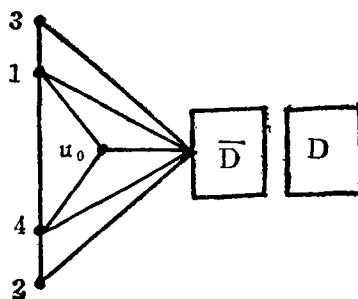


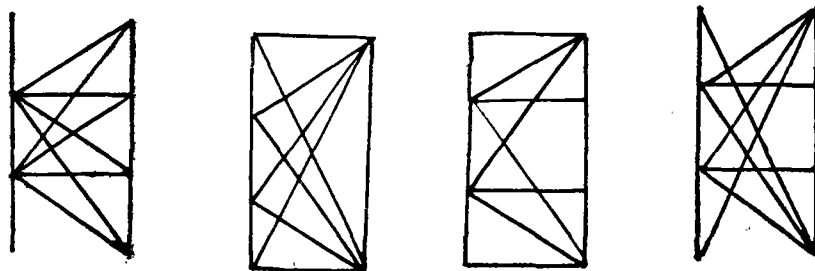
图 4、图 $\bar{G}$

1) 在 $G-1$ 中, $2=u_0$; 在 $G-2$ 中, $4=u_0$; 在 $G-3$ 中, $1=u_0$; 在 $G-4$ 中, $3=u_0$ 。(参看图 3)。因此 $G-i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 不是 TSC 图。

2) 注意到 D ($\bar{D}$) 中任何两点的度之差不为 1, 类似定理 1 的证明, 易证 $G-u$ 是 TSC 图。这里 $u \in u_0 \cup D \cup \bar{D}$ 。

证毕

根据 Read [4], 4 阶自补图只有一个, 5 阶自补图只有两个。由定理 1 和 2, 这 3 个图中的每一个图都是某个自补 TSC 图的核。8 阶自补图一共有 10 个 [4]。图 5 给出 8 个 8



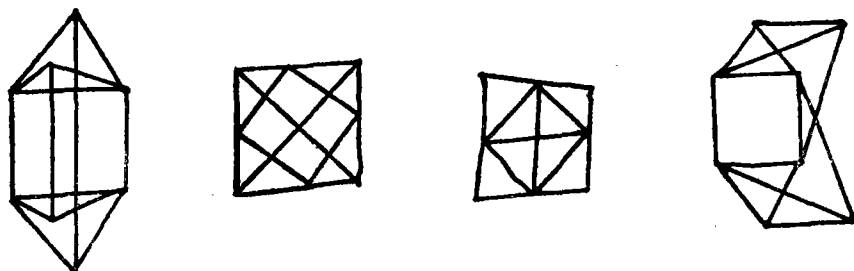


图 5 8个8阶自补图

阶自补图。它们都是TSC图,因而都可作为自补TSC图的核。另外两个8阶自补图是 $H_i - u_0$ ($i = 1, 2$) (图6)。

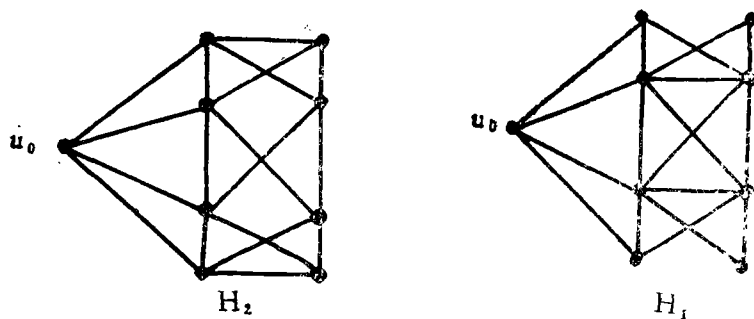


图 6

$H_i - u_0$ 不是TSC图,但是 $H_i^* = H_i - u_0$ 。综合上面所述,如果H是顶点数不大于8的自补G图,则H是某个自补TSC图的核。

顶点数大于8时情况又如何呢?图7给出9阶自补图H, H是TSC图。如果按照定理2

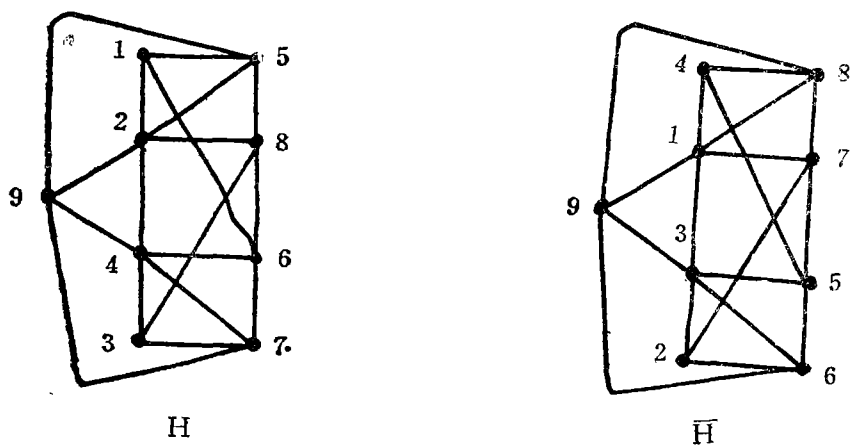


图 7

证明中所述的方式来构造G,则 $G^* \cong H$ 。因为在 $G - 3$ 中,与1和8邻接的顶点集都是{2、5、6、},即在 $G - 3$ 中, $1 = 8$ 。因此,在定理2中,“与 u_0 邻接的任何两个点的度差不为1”这个条件(对于定理2中所述的构造方法)是不可少的。

三、不是TSC图的自补图

前面的两个定理证明了有两类自补图是自补TSC图的核,这两类都是TSC图。如果自补图(其阶数大于8)不是TSC图,它是否自补TSC图的核呢?下面我们讨论这种图的构造。

引理4、设 $A \subseteq V(G)$ 。G的以A为顶点集的导出子图也用A表示。如果在图G中,A的任何两个顶点都恒等,则A是完全图或完全图的补图。

证明、设 $u_1, u_2 \in A$ 且 u_1 与 u_2 邻接。又设 u_3, u_4 是A的任意两点。因为 $u_1 = u_3$ 且 u_1 度与 u_2 邻接所以 u_2 与 u_3 邻接。同理, u_4 与 u_3 邻接。因此A中任意两点都邻接,A是完全图。

引理5、设 $A_i \subseteq V(G)$, $i = 1, 2$, A_i 中任何两点都恒等。若 A_1 中有一点与 A_2 中一点邻接,则 A_1 中任意顶点与 A_2 中所有顶点都邻接。

我们说 A_1 与 A_2 完全邻接,如果 A_1 中任意顶点与 A_2 中所有顶点都邻接。如果 $A \subseteq V(G)$ 且A中任意两点都恒等,则称A是(G的)一个恒等点集。若 $|A| = 1$,也称A是一个恒等点集。

例1、图8给出一个不是TSC图的自补图。它是这样一个图:它有 $4n+4$ 个顶点。 $K_n, \overline{K_n}, K_n, \overline{K_n}$ 是它的4个导出子图。图中的线表示它们是完全邻接的。例如一条线把1与一个 K_n 邻接,它表示1与 K_n 完全邻接(这里 K_n 是n阶完全图)。如果把 $K_n, \overline{K_n}, K_n, \overline{K_n}$ 等同为一个顶点,则得到一个8阶自补图,这个8阶自补图与图6中的 $H_1 - u_0$ 同构。如果将 $H_1 - u_0$ 中恒等的点等同,则得到4阶自补图。

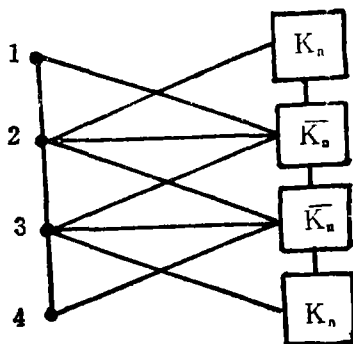


图 8

定理3、设G是自补图, $A_i \subseteq V(G)$ ($i = 1, 2, \dots, p$)是G的恒等点集且 A_i 中点与 A_j ($i \neq j$)中点不恒等。若将 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)中的点等同为一个点,则得到的仍是一个自补图。这里 $\bigcup_{i=1}^p A_i = V(G)$ 。

证明：设f是G的自补置换。 $f(A)$ 表示点集 $\{f(a) \mid a \in A\}$ 。显然 $f(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, p$)是G的p个恒等点集且 $f(A_i)$ 也是G的恒等点集。因此 $f(A_i)$ 就是某个 A_i 。将 A_i 看作一个点,则f诱导出点集 $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 上的一个置换,这个置换仍用f表示。

如果将 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)中点等同为一个点(此点仍用 A_i 表示),则得p个点的图

H。若 A_i 与 A_j 在H中邻接,则 A_i 与 A_j 在G中完全邻接,因此 $f(A_i)$ 与 $f(A_j)$ 在G中不邻接。这说明 $f(A_i)$ 与 $f(A_j)$ 在 $\overline{H}$ 中邻接, f 是H到 $\overline{H}$ 的同构映射, $\overline{H}$ 是自补图。

定理4、设G是自补图, $A_i (i=1, 2, \dots, t)$ 是G的恒等点集。如果存在G的自补置换 f ,使得 $f(A_i) = A_{i+1} (i, j=1, 2, \dots, t)$,则将 $A_i (j=1, 2, \dots, t)$ 等同为一个顶点后,得的仍是一个自补图。

例2,图9中的G是12阶自补图。 $f = (1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6\ 7\ 8)\ (9, 10, 11, 12)$ 是G的自补同构。如果将一个点集等同为一个顶点称为收缩,那么如果按定理3中所述的方式进行收缩,则G收缩为4阶自补图。设 $A_1 = \{5, 9\}$, $A_2 = \{6, 10\}$, $A_3 = \{7, 11\}$, $A_4 = \{8, 12\}$,则 $f(A_i) = A_{i+1}, (i=1, 2, 3, 4)$ (A 的下标按模4运算)。按定理4所述的方式收缩(即将 $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ 收缩),得到8阶自补图。

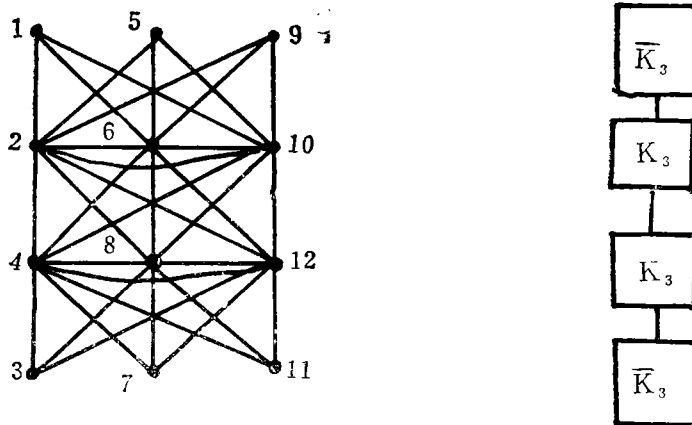


图9图G及其示意图

定理5、设G是自补图。若G不是TSC图,则可按定理3或定理4中所述的方式,经过若干收缩后成为自补TSC图。

定理6、设H是自补图,则存在自补图G,使得H是由G按定理4所述的方式收缩而成的。

证明、设 f 是H的一个自补置换, $f = f_1 f_2 \dots f_k$ 是 f 的不交的轮换分解。设 $f_1 = (u_1 u_2 \dots u_{4t})$ 。记 $f = f_1 \overline{f_1}$,这里 $\overline{f_1} = f_2 f_3 \dots f_k$ 。设 $A_1, A_3, \dots, A_{4t-1}$ 是 $2t$ 个 x 阶完全图 $K_x (x > 1)$, $A_2, A_4, \dots, A_{4t}$ 是 $2t$ 个与 $\overline{K_x}$ 同构的图。我们用图 A_i 求代潜H的顶点 $u_i (i=1, 2, \dots, 4t)$,如果在H中, u_i 与 V 邻接,则在新图中, A_i 与 V 完全邻接,这样得到的图用G表示。设 f 是 $D = \bigcup_{i=1}^{4t} (A_i)$ 上的置换,这个置换满足条件: $f(A_i) = A_{i+1} (i < 4t), f(A_{4t}) = A_1$ 。

下面我们只要证明G是自补图就行了。我们证明,如果 V_1 与 V_2 在G中邻接,则 $\overline{f_1} \overline{f_1} (V_1)$ 与 $\overline{f_1} \overline{f_1} (V_2)$ 在 $\overline{G}$ 中邻接。

设 V_1 与 V_2 在G中邻接。

若 $V_1, V_2 \in A_i$,则 A_i 是 K_x , A_{i+1} 是 $\overline{K_x}$,因此 $\overline{f_1} \overline{f_1} (V_1) (\in A_{i+1})$ 与 $\overline{f_1} \overline{f_1} (V_2)$ 在G中

不邻接, 即 $\overline{f f_1}(V_1)$ 与 $\overline{f f_1}N_2$ 在 $\overline{G}$ 中邻接。

若 $V_1 \in A_i$, $V_2 \in A_j$ ($i \neq j$), 则在 H 中, u_i 与 u_j 邻, $f(u_i)$ 与 $f(u_j)$ ($\in A_{i+j}$) 在 H 中不邻接, 因此 A_{i+j} 与 A_{i+j} 在 G 中不邻接, $\overline{f f_1}V_1$ ($\in A_{i+1}$) 与 $\overline{f f_1}(V_2)$ ($\in A_{i+1}$) 在 $\overline{G}$ 中不邻接, 即它们在 $\overline{G}$ 中邻接。

若 $V_1 \in A_i$, $V_2 \in D$, 则在 H 中, u_i 与 V_2 邻接, 在 H 中 $f(u_i) \in A_{i+1}$ 与 $f(V_2)$ 不邻接, 因此在 G 中 A_{i+1} 与 $f(V_2)$ 不邻接, 因此在 $\overline{G}$ 中 A_{i+1} 与 $f(V_2)$ 不邻接。这说明在 $\overline{G}$ 中 $\overline{f f_1}(V_1)$ ($\in A_{i+1}$) 与 $\overline{f f_1}(V_2)$ 邻接。

若 $V_1, V_2 \in D$, 则 $\overline{f f_1}(V_1) =$ 与 $\overline{f f_1}(V_2) = f(V_2)$ 在 $\overline{G}$ 中邻接。

参 考 文 献

- [1] F. Harary, Graph Theory, Addison—Wesley, Reading, Mass, 1969, 中译本, 图论, 李慰萱译, 上海科学技术出版社, 1980年。
- [2] G.L. Chia and C.K. Lim, Totally Supercompact Graphs, in: Graph Theory Proceedings of the Southeast Asian Graph Theory Colloquium 1983, (K.M. Koh and H.P. Yap, ed) Springer, Berlin 1984, 324—326
- [3] G. Ringel, Selbstkomplementäre Graphen, Arch. Math. 14(1963), 354—358.
- [4] R.C. Read, On the number of self complementary graphs and digraphs. J. London Math. Soc. 38(1963), 99—104

Self-complementary Totally supercompact Graph

Zhou Shangchao

East China Jiaotong University, Nanchang

Abstract

Let u be a vertex in a graph G . Then the neighborhood of u in G is

$$A = \{v \in V(G) \mid u \text{ adj } v\}$$

The closed neighborhood of u in G is $A \cup u$

A graph is said to be totally supercompact if and only if distinct adjacent vertices have distinct closed neighborhoods and distinct non-adjacent vertices have distinct neighborhood.

If G is a totally supercompact graph, we let

$G^* = \{x \in V(G) \mid G - x \text{ is totally supercompact}\}$ we shall use G^* to represent the graph induced by G^* .

Let H be a self-complementary graph. Does there exist a self-complementary supercompact graph G such that $G^* = H$?

This problem was proposed in Ref [2] by G L. Chia and C.K.Lim.

The main results of this paper are 1 and theorem 2.

Theorem 1. Let H be a self-complementary totally supercompact graph of order $4n$. Then there exists a self-complementary totally supercompact graph G of order $4n + 4$ such that $G^* = H$.

Theorem 2. Let H be a self-complementary totally supercompact graph of order $4n + 1$ and $H - u$ be a self-complementary graph. Define $D = \{v \in V(H) \mid v \text{ adj } u\}$. If $|\text{degree } v_1 - \text{degree } v_2| \neq 1$ for any two vertices v_1 and v_2 in D , then there exists a self-complementary totally supercompact graph G of order $4n + 5$ such that $G^* = H$.