

应力控制条件下, Bui—Quoc蠕变损伤 演变方程的探讨

张安哥

(建 工 系)

一、引言

在航空、电站、化工以及核动力工程中,有不少结构元件是在高温、周期加载条件下工作,受到蠕变、疲劳或两者的共同作用。某些元件由于受到重量和空间条件的限制,既要设计得轻巧,又不能允许它在指定的服役期限内失效。对此类元件则不能按照传统的设计观点要求其有较大的安全系数和无限寿命。允许结构元件在每一周期加载下有一定程度的弹塑性变形并按有限寿命进行设计(一般载荷循环次数 $N < 10^4$)的此类工程力学问题谓之低周疲劳(Low Cycle Fatigue简写成LCF)问题。对此类结构元件寿命估算有早期的参数关系法[1],如Coffin的频率修正法[2],Manson的应变变程区分法[3],Taira等人的线性寿命分数法[4],以及应变能划分法、延性耗损法等等。近几年来,逐渐兴起了对连续损伤方法的研究,其主要学派有:1,建立在宏观连续介质力学和不可逆热力学基础上的以法国学者Lemaitre和Cheboche为代表的损伤力学法[5, 6];2,以材料的力学性能劣化为基础的由加拿大学者等人创立的连续损伤法[9—15];3,用裂纹长度来表征损伤状态由美国学者Majumdar和Maiya建立的连续损伤法[7]。由于连续损伤方法较之早期的参数关系法更适用于不同加载的情况,尤其是疲劳和蠕变交互作用的情况,更能反映结构元件的实际寿命,因此日益受到国内外学者的重视。

本文在Lemaitre学派建立的损伤力学基础上,通过引入一个新的耗散势函数 Q^* ,导出了建立在材料力学性能劣化基础上的Bui—Quoc学派的纯蠕变、应力控制条件下的寿命计算公式、寿命分数比公式以及损伤演变方程,从而为将Bui—Quoc学派的连续损伤法纳入连续介质的不可逆热力学的框架中提供了途径。

二、损伤力学简介(8)

由热力学第一定律即能量守恒律的总体形式(即积分型):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 + e \right) \rho dv = \int_V \vec{f} \cdot \vec{V} dv + \int_A \vec{P} \cdot \vec{V} dA + \int_V r dv - \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA \quad (1)$$

本文于1986年12月26日收到

以及Clausius—Duhem不等式即热力学第二定律（积分型）：

$$\frac{D}{Dt} \int_V S \rho dv \geq \int_V \frac{r}{T} dv - \int_A \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \vec{n} dA \quad (2)$$

式中 $\frac{D}{Dt}$ 是物质导数， $\vec{V}$ 是速度场， e 是单位质量的内能， ρ 是密度， V 是体积， A 是表面积，

$\vec{f}$ 、 $\vec{P}$ 分别表示外体力及外表面力， r 是单位时间单位体积的热源， $\vec{q}$ 是单位时间单位表面的热流， S 是单位质量所含的熵， T 是绝对温度， $\vec{n}$ 是微面积 dA 的外法线矢量。

利用力学中的功能关系：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\vec{u}}^2 + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) dv = \int_V \vec{f} \cdot \dot{\vec{u}} dv + \int_A \vec{P} \cdot \dot{\vec{u}} dA \quad (3)$$

$$\text{以及} \quad \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA = \int_V \text{div} \vec{q} dv \quad (4)$$

式中 $\vec{u}$ 是位移场， $\dot{\vec{u}} = \frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{V}$ ， $\underline{\underline{\sigma}}$ 、 $\underline{\underline{\varepsilon}}$ 分别是Cauchy应力张量及Green应变张量。

$$\text{可得} \quad \rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + r - \text{div} \vec{q} \quad (5)$$

$$\text{以及} \quad \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho (\dot{e} - T \dot{S}) - \vec{q} \cdot \frac{\text{grad} T}{T} \geq 0 \quad (6)$$

$$\text{引入Helmholts自由能} \quad \psi = e - TS \quad (7)$$

$$\text{代入(5)、(6)得} \quad \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho (\dot{\psi} + S \dot{T}) - \rho T \dot{S} + r - \text{div} \vec{q} = 0 \quad (8)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho (\dot{\psi} + S \dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\text{grad} T}{T} \geq 0 \quad (9)$$

定义的状态变量有可测变量弹性应变张量 $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ 以及绝对温度 T （其相伴变量为 $\underline{\underline{\sigma}}$ 和 S ），此外

还有 k 个内变量 V_K （其相伴变量为 A_K ，且定义 $A_K = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_K}$ ， A_K 又谓之广义内摩擦力），

V_K 可以是累积塑性应变 P 或损伤变量 D 等， A_K 则相应为屈服面半径增量 R 或损伤应变能释放率 r 等。

$$\text{故有} \quad \psi = \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, T, V_K) \quad (10)$$

$$\text{或} \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_K} \dot{V}_K \quad (11)$$

代入(8)、(9)式,且由 $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e$ 及 T 的任意性,可得本构关系如下:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad \text{及} \quad S = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (12)$$

$$\text{以及} \quad \text{div} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \frac{\partial \psi}{\partial V_K} \dot{V}_K + r - \rho T \dot{S} \quad (13)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_K} \dot{V}_K - \underline{\underline{q}} \cdot \frac{\underline{\underline{\text{grad}}} T}{T} \geq 0 \quad (14)$$

式中 $\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^e$ 为塑性应变张量。

当力与热无耦合作用时:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_K} \dot{V}_K = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - A_K \dot{V}_K \geq 0 \quad (15)$$

$$- \underline{\underline{q}} \cdot \frac{\underline{\underline{\text{grad}}} T}{T} \geq 0 \quad (16)$$

当塑性应变耗散与损伤耗散无耦合时:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - R \dot{P} \geq 0 \quad (17)$$

$$-Y : \dot{D} \geq 0 \quad (18)$$

(15)~(18)式即热力学第二定律所要求的状态变量、内变量及其相伴变量所必需满足的关系。

设有耗散势函数存在,则其Legendre变换形式为

$$Q^* = Q_*(\underline{\underline{\sigma}}, A_K, \underline{\underline{g}}) \quad (19)$$

其中 $\underline{\underline{g}} = - \frac{\underline{\underline{\text{grad}}} T}{T}$,可得损伤演变方程:

$$\dot{D} = -\frac{\partial Q^*}{\partial Y} \quad (20)$$

三、蠕变损伤演变方程

在等温情况下，且设蠕变损伤与塑性应变损伤无耦合，若给定耗散势 Q^* 的形式如下：

$$Q^* = A_1^2 (-Y) + 4A_1 B_1 (-Y)^{1/2} + B_1^2 \ln(-Y) \quad (21)$$

式中 A_1, B_1 是应力张量的标量函数。在应力控制的蠕变损伤情况下， A_1, B_1 是以应力张量 σ 为参量的待定系数。

由(20)式，可得损伤变量 D 的演变方程

$$\dot{D} = -\frac{\partial Q^*}{\partial Y} = [A_1 + B_1 (-Y)^{-1/2}]^2 \quad (22)$$

由应变等效性假设，对各向同性损伤导出的损伤应变能释放率 Y 的三维形式如下[6]：

$$-Y = \frac{\sigma^*}{2E(1-D)^2} \quad (23)$$

$$\text{式中} \quad \sigma^* = \sigma_{\text{eq}} \left[\frac{2}{3} (1+\gamma) + 3 (1-2\gamma) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{\text{eq}}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (24)$$

谓之“损伤等效应力 (Damage equivalent stress)”。

$$\sigma_{\text{eq}} = [3/2 (\underbrace{\sigma - \sigma_H \mathbf{I}}_{\sim}) : (\underbrace{\sigma - \sigma_H \mathbf{I}}_{\sim})]^{1/2} \quad (25)$$

即“米塞斯等效应力”， $\sigma_H = 1/3 \text{tr} \underbrace{\sigma}_{\sim}$ 即应力张量 $\underbrace{\sigma}_{\sim}$ 的静水分量， $\mathbf{I}$ 为二阶单位张量， γ 为泊松比。

在单轴应力条件下 $\sigma^* = \sigma$

$$(23) \text{ 式成为: } -Y = \frac{\sigma}{2E(1-D)^2} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{代入 (22) 式, 得: } \dot{D} &= \left(A_1 + B_1 \frac{\sqrt{2E} (1-D)}{\sigma} \right)^2 \\ &= (A_2 + B_2 D)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

式中 A_2, B_2 与 σ 相关连。

$$\begin{aligned} \text{考虑边界条件, 当 } t=0 \text{ 时 } D=0 \\ t=t_c \text{ 时 } D=1 \end{aligned} \quad (28)$$

t_c 为断裂时间(或失效时间)。积分(27)式, 注意在应力控制的条件下, σ 不变, 有

$$t = \frac{1}{B_2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_2 + B_2 D} \right) \quad (29)$$

$$t_c = \frac{1}{B_2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_2 + B_2} \right) \quad (30)$$

(29), (30)又不妨写成如下形式:

$$t = C_3 \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_3 + B_3 D} \right) \quad (31)$$

$$t_c = C_3 \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_3 + B_3} \right) \quad (32)$$

$$\text{可得寿命函数: } B = \frac{t}{t_c} = \frac{D(A_3 + B_3)}{A_3 + B_3 D} \quad (33)$$

$$\text{以及损伤演变方程: } D = \frac{B}{1 + (1-B) \left(\frac{B_3}{A_3} \right)} \quad (34)$$

式中 C_3 , A_3 , B_3 与 σ 相关连。

$$\text{当 } A_3 = \theta^d - \theta_p, B_3 = \theta - \theta^d, C_3 = -K/\theta^b \text{ 时} \quad (35)$$

式中 $\theta = \sigma/\sigma_u$ 为无量纲应力

$\theta_p = \sigma_p/\sigma_u$ 为无量纲蠕变持久限

σ_u , σ_p 分别为无损材料的短时拉伸强极限与蠕变持久限。

d , b , k 是材料常数。

由(32)~(34)式, 即可导出建立在材料性能劣化基础上的Bui—Quoc学派的寿命计算公式, 寿命分数比公式及损伤演变方程[9]:

$$t_c = -\frac{K}{\theta^b} \left(\frac{1}{\theta^d - \theta_p} - \frac{1}{\theta - \theta_p} \right) \quad (36)$$

$$B = \frac{D \left(\frac{\theta - \theta_p}{\theta^d - \theta_p} \right)}{1 + D \left(\frac{\theta - \theta^d}{\theta^d - \theta_p} \right)} \quad (37)$$

$$D = \frac{B}{B + (1-B) \left(\frac{\theta - \theta_p}{\theta_a - \theta_p} \right)} \quad (38)$$

按损伤力学定义, $D = \frac{S - \bar{S}}{S}$, 其中 S 为材料原面积, $\bar{S}$ 为由于材料受损伤(如微裂纹、空隙、缺陷等的增长)而减少后的有效面积, 故 D 表示减少的面积与原面积之比。

按Bui—Quoc学派的定义, $dD = -\mu d\sigma_s$, 其中 σ_s 为受损态的瞬时蠕变强度, μ 为比例系数, 即损伤增量与材料的瞬时蠕变强度的减少成正比。结合两者定义, 并从以上推导可以看出, 材料瞬时蠕变强度 σ_s 的减少实际上是正比于面积的减少的。

参 考 文 献

- [1] 孙训方, 蠕变与疲劳共同作用下结构元件的寿命估算, 西南交大, 1986
- [2] Coffin, L.F., Fatigue at high temperature, ASTMSTP520, 1973
- [3] Manson, S.S., Creep—fatigue analysis by strain range partitioning
Symp on Design for Elevated Temperature Environment ASME, 1971
- [4] Taira, S. and Ohnami, M., In Joint Inter. Conf. on creep and
fatigue, Hold on Institute of mech. engineers, 1963
- [5] Lemaitre, J., and Chaboche, J.L., Aspect phenomenologie de la
rupture par endommagement, J. Mécanique Appl. 2, 1978
- [6] Lemaitre, J., How to use damage mechanics, Nuclear Eng. &
Design 80, 1984
- [7] Majumdar, S., and Maiya, P.S., A mechanistic model for time
dependent fatigue, J. Eng. Mater. Technology 102, 1980
- [8] Lemaitre, J., Damage modelling for prediction of plastic or creep
fatigue failure in structures, Tran. of the 5th Inter. Conf. on
Structural Mech. in Reactor technology, 1979
- [9] Bui—Quoc, T., An engineering approach for cumulative damage in
Metals under creep loading, Trans. ASME, J. of Eng. Mat. &
Techn. vol. 101, 1979
- [10] Bui—Quoc, T., and Biron, A., Cumulative fatigue damage under
stress controlled conditions, Trans, ASME, J. of Bas. Eng., vol.
93, 1971
- [11] Bui—Quoc, T., A simplified model for cumulative fatigue damage
with interaction effect, Proc. Joint Conf. on Exp. Mech., 1982
- [12] Bui—Quoc, T., High temperature life estimation: extension of a

- unified theory, Exp.Mech., vol.15, 1975
- [13] Bui—Quoc, T., Recent development of continuous damage approaches for the analysis of material behavior under fatigue—creep loading 1982
- [14] Bui—Quoc, T., A damage approach for analysing the combined effect under creep—fatigue loading, Proc. Int. Conf. ASME 1983
- [15] Bui—Quoc, T., High temperature creep—fatigue damage evaluations, 5th Int. Conf. on Exp. Mech. SESA Montred, 1984