

结构振动模态参数 的灵敏度分析及优化

余少华

刘瑞岩

(建 筑 工 程 系)

(国防科技大应用力学系)

摘 要

本文首先由自由振动方程及正则化条件直接导出了仅用模态参数计算复特征值及特征向量的灵敏度公式。提出了用原始结构的模态参数计算结构改变后的模态参数的灵敏度算法。建立了一种对结构进行多点动态修改的连续灵敏度优化分析方法——CSOA法。这种方法精度较高,易与各种优化方法结合,自动地寻找优化方向。最后以一个多自由度离散系统为例说明了方法的有效性和算法的正确性。

一、前 言

机械结构动态特性研究的最终目的是使结构的动态性能在满足一定约束条件下达到最优,而结构动态优化设计的基础是灵敏度分析。通过灵敏度分析可以确定结构的优化方向,预测结构动态特性的变化。

模态参数的灵敏度反映了设计变量对模态参数的影响程度。各种情况下的特征值及特征向量的微分灵敏度计算方法都已被相应提出〔1、2、3、4〕,但微分型灵敏度对于参数改变微小时才是准确的,当参数变化较大时会存在极大的误差,故不能用于结构的整体优化。文献〔5〕用“伴随结构”理论导出了仅用模态参数表示的一般粘性阻尼系统的微分灵敏度公式,并在此基础上推出了差分型灵敏度公式,放宽了参数的变化范围。但计算过程繁琐,且当参数变化到一定程度仍然偏离真实结果。文献〔6〕介绍了小参数连续摆动法,这种方法没有限制参数的变化范围,能较好地预测结构变化后的动态特性。缺点是人为地选择各结构参数改变量的大小,得不到结构改变的最优方向。因此,对于复杂结构同样不便于结构的整体优化。

本文在所推导的仅用完备模态参数表示的复特征值及特征向量的微分型灵敏度公式的基础上,针对以上问题,提出了一种连续进行灵敏度分析的优化方法。利用这种方法,即使结

· 本文于1987年9月28日收到

构参数变化到原结构参数的百分之几百，也能得到满意的结果，不但弥补了微分型灵敏度分析仅适用于小参数变化的不足，而且能够预测参数改变后的系统动态特性的变化。因此，它具有微分型灵敏度分析和连续扰动法的双重优点。可以很方便地用于复杂结构动态特性的整体优化设计。这种方法具有清晰的物理概念，可以用来验证用非完备模态参数计算特征向量导数时的稳定性。由于在计算中不需要知道系统的质量、阻尼和刚度，因此易于利用试验模态分析的测试结果。本文的最后部分把这种方法与优化方法结合，对结构进行了动态优化。

二、粘性阻尼系统的微分灵敏度

N 阶自由度线性粘性阻尼振动系统的自由振动方程为：

$$(S^2 [M] + S [C] + [K]) \{\phi\} = 0 \quad (1)$$

式中： $\{\phi\}$ ：模态位移向量。

$[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ ：分别为系统的质量、阻尼、刚度矩阵。

S ：Laplace算子

或写成状态向量的形式：

$$(S [A] + [B]) \{\phi\} = 0 \quad (2)$$

$$\text{式中：} [A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ S\{\phi\} \end{Bmatrix}$$

由(2)式可解出 $2N$ 个复频率 S_i 和复振型 $\{\phi_i\}$ ，即有

$$(S_i [A] + [B]) \{\phi_i\} = 0 \quad (3)$$

将振型归一化：

$$\{\phi_i\}^T [A] \{\phi_i\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (4)$$

(3) 式前乘 $\{\phi_i\}^T$ ，则有

$$\{\phi_i\}^T (S_i [A] + [B]) \{\phi_i\} = 0 \quad (5)$$

设 P_j 是设计变量 $\{P\}^T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 中第 j 个变量。

(5) 式对 P_j 求导：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\phi_i\}^T}{\partial P_j} (S_i [A] + [B]) \{\phi_i\} + \{\phi_i\}^T (S_i [A] + [B]) \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial P_j} \\ + \{\phi_i\}^T \frac{\partial (S_i [A] + [B])}{\partial P_j} \{\phi_i\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

因为 $(S_i [A] + [B])$ 是对称矩阵，故有：

$$\{\phi_i\}^T (S_i [A] + [B]) = 0 \quad (7)$$

$$\text{故 (6) 式变为：} \{\phi_i\}^T \frac{\partial (S_i [A] + [B])}{\partial P_j} \{\phi_i\} = 0$$

$$\text{即: } \frac{\partial S_i}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle^T [A] \langle \phi_i \rangle + \langle \phi_i \rangle^T \left(S_i \frac{\partial [A]}{\partial P_j} + \frac{\partial [B]}{\partial P_j} \right) \langle \phi_i \rangle = 0$$

考虑到 (4) 式, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial P_j} &= - \langle \phi_i \rangle^T \left(S_i \frac{\partial [A]}{\partial P_j} + \frac{\partial [B]}{\partial P_j} \right) \langle \phi_i \rangle \\ &= - \langle \phi_i \rangle^T \left(S_i^2 \frac{\partial [M]}{\partial P_j} + S_i \frac{\partial [C]}{\partial P_j} + \frac{\partial [K]}{\partial P_j} \right) \langle \phi_i \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

由 (8) 式可见, 复频率的导数仅与本阶的模式参数有关。

下面推导复模态向量的导数:

$$\text{令: } [D(S_i)] = S_i [A] + [B] \quad (9)$$

对 (3) 式求导:

$$\frac{\partial [D(S_i)]}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle + [D(S_i)] \frac{\partial \langle \phi_i \rangle}{\partial P_j} = 0$$

对 (4) 式求导:

$$\langle \phi_i \rangle^T \frac{\partial [A]}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle + 2 \langle \phi_i \rangle^T [A] \frac{\partial \langle \phi_i \rangle}{\partial P_j} = 0$$

因此有:

$$\begin{Bmatrix} [D(S_i)] \\ \langle \phi_i \rangle^T [A] \end{Bmatrix} \frac{\partial \langle \phi_i \rangle}{\partial P_j} = \begin{Bmatrix} - \frac{\partial [D(S_i)]}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle \\ - \langle \phi_i \rangle^T \frac{\partial [A]}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle / 2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{上式前乘} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\langle \phi_r \rangle \langle \phi_r \rangle^T}{S_i - S_r} \langle \phi_i \rangle \right), \text{ 得:}$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\langle \phi_r \rangle \langle \phi_r \rangle^T}{S_i - S_r} [D(S_i)] + \langle \phi_i \rangle \langle \phi_i \rangle^T [A] \right) \frac{\partial \langle \phi_i \rangle}{\partial P_j} \\ &= - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\langle \phi_r \rangle \langle \phi_r \rangle^T}{S_i - S_r} \frac{\partial [D(S_i)]}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle \\ & \quad - \langle \phi_i \rangle \langle \phi_i \rangle^T \frac{\partial [A]}{\partial P_j} \langle \phi_i \rangle / 2 \end{aligned} \quad (11)$$

根据 (7) 式, 有如下推导:

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\langle \phi_r \rangle \langle \phi_r \rangle^T}{S_i - S_r} [D(S_i)] = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \left(\frac{\langle \phi_r \rangle \langle \phi_r \rangle^T}{S_i - S_r} (S_i [A] \right.$$

$$\left. + [B] + S_r [A] - S_r [A] \right) = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \{ \phi_r \} \{ \phi_r \}^T [A] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{而: } & \sum_{r=1}^{2N} \{ \phi_r \} \{ \phi_r \}^T [A] [\{ \phi_1 \}, \{ \phi_2 \}, \dots, \{ \phi_{2N} \}] \\ &= [\{ \phi_1 \}, \{ \phi_2 \}, \dots, \{ \phi_{2N} \}] \end{aligned}$$

$$\text{故: } \sum_{r=1}^{2N} \{ \phi_r \} \{ \phi_r \}^T [A] = [\{ \phi_1 \}, \{ \phi_2 \}, \dots, \{ \phi_{2N} \}]^{-1}$$

$$[\{ \phi_1 \}, \{ \phi_2 \}, \dots, \{ \phi_{2N} \}]^{-1} = [I] \quad (13)$$

其中 $[I]$ 为单位矩阵,从(11)~(13)式,可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{ \phi_i \}}{\partial P_i} = & - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\{ \phi_r \} \{ \phi_r \}^T}{S_i - S_r} \frac{\partial [D(S_i)]}{\partial P_i} \{ \phi_i \} \\ & - \{ \phi_i \} \{ \phi_i \}^T \frac{\partial [A]}{\partial P_i} \{ \phi_i \} / 2 = - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\{ \phi_r \} \{ \phi_r \}^T}{S_i - S_r} \left(S_i \frac{\partial [A]}{\partial P_i} \right. \\ & \left. + \frac{\partial [B]}{\partial P_i} \right) \{ \phi_i \} - \{ \phi_i \} \{ \phi_i \}^T \frac{\partial [A]}{\partial P_i} \{ \phi_i \} / 2 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\text{而 } \frac{\partial \{ \phi_i \}}{\partial P_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \{ \phi_i \}}{\partial P_i} \\ \frac{\partial (S_i \{ \phi_i \})}{\partial P_i} \end{array} \right\}$$

取其上半部:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{ \phi_i \}}{\partial P_i} = & - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\{ \phi_r \} \{ \phi_r \}^T}{S_i - S_r} \left(S_i^2 \frac{\partial [M]}{\partial P_i} + S_i \frac{\partial [C]}{\partial P_i} \right. \\ & \left. + \frac{\partial [K]}{\partial P_i} \right) \{ \phi_i \} - \{ \phi_i \} \{ \phi_i \}^T \left[2 S_i \frac{\partial [M]}{\partial P_i} + \frac{\partial [C]}{\partial P_i} \right] \{ \phi_i \} / 2 \quad (15) \end{aligned}$$

可见,复模态向量的导数计算需要完备的模态参数。而在实际应用中,可能测到的模态数目是有限的,总少于测点数,更少于系统自由度数。但在计算时只要考虑到主要的低阶模态及与所求模态相邻的密模态,即可保证模态向量灵敏度计算的有效性。

三、连续灵敏度分析法——CSOA法

通过一阶微分灵敏度分析,可以获得模态参数对结构参数最有效修改的位置和方向。在灵敏度分析的基础上再进行结构修改,只需要模态参数作为初始数据,而模态参数可以由试

验模态分析得到,也可以由有限元分析获得。当利用试验模态分析时,可以避免建立动力学模型及确定结构物理参数所存在的困难。

应该指出,一阶微分灵敏度分析仅适用于小参数修改的情况。当参数变化较大时,如果仍按其指定的方向修改,会出现很大的误差。

本文在对结构进行灵敏度分析时,利用连续寻优的方法,推出了用原始结构的模态参数计算结构改变后的模态参数及其导数的递推公式,突破了微分灵敏度分析时小参数变动的限制,使灵敏度分析更加实用。

不管变量 P_i 是什么形式,对于大多数问题,总可以假设变量 P_i 是矩阵 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 中的元素或其元素是 P_i 的线性函数。

当变量从 $\{P\}^\circ$ 变到 $\{P\}' = \{P\}^\circ + \{\Delta P\}'$ 时, $[M^\circ(\{P\}^\circ)]$ 、 $[C^\circ(\{P\}^\circ)]$ 、 $[K^\circ(\{P\}^\circ)]$ 分别变为 $[M'(\{P\}')]$ 、 $[C'(\{P\}')]$ 、 $[K'(\{P\}')]$, S_i° 和 $\{\phi_i\}^\circ$ 分别变为 S_i' 和 $\{\phi_i'\}$ 。根据线性假设则有:

$$\frac{\partial [M^\circ]}{\partial P_i} = \frac{\partial [M']}{\partial P_i'} \quad \frac{\partial [C^\circ]}{\partial P_i} = \frac{\partial [C']}{\partial P_i'} \quad \frac{\partial [K^\circ]}{\partial P_i} = \frac{\partial [K']}{\partial P_i'} \quad (16)$$

利用Taloy展开式,当 $\{\nabla P\}^\circ$ 较小时,近似取:

$$\begin{cases} S_i' = S_i^\circ + [\nabla S_i^\circ] \{\nabla P\}^\circ \\ \{\phi_i'\} = \{\phi_i^\circ\} + [\nabla \{\phi_i^\circ\}] \{\nabla P\}^\circ \end{cases} \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (17)$$

利用(15)式可得 $\frac{\partial S_i'}{\partial P_i'}$ 、 $\frac{\partial \{\phi_i'\}}{\partial P_i'}$ ($i=1, \dots, 2N$)

如此迭代,即可由第 $(K-1)$ 次的复频率和复振型求得第 K 次的结果:

$$\begin{cases} S_i^K = S_i^{K-1} + [\nabla S_i^{K-1}] \{\nabla P^{K-1}\} \\ \{\phi_i^K\} = \{\phi_i^{K-1}\} + [\nabla \{\phi_i^{K-1}\}] \{\nabla P^{K-1}\} \end{cases} \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (18)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S_i^K}{\partial P_i^K} = -\{\phi_i^K\} \left[(S_i^K)^2 \frac{\partial [M^\circ]}{\partial P_i} + S_i^K \frac{\partial [C^\circ]}{\partial P_i} + \frac{\partial [K^\circ]}{\partial P_i} \right] \{\phi_i^K\} \\ \frac{\partial \{\phi_i^K\}}{\partial P_i^K} = - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{2N} \frac{\{\phi_r^K\} \{\phi_r^K\}^T}{S_i^K - S_r^K} \left[(S_i^K)^2 \frac{\partial [M^\circ]}{\partial P_i} + S_i^K \frac{\partial [C^\circ]}{\partial P_i} + \frac{\partial [K^\circ]}{\partial P_i} \right] \{\phi_i^K\} / 2 \\ + \frac{\partial [K^\circ]}{\partial P_i} \{\phi_i^K\} - \{\phi_i^K\} \{\phi_i^K\}^T \left[2 S_i^K \frac{\partial [M^\circ]}{\partial P_i} + \frac{\partial [C^\circ]}{\partial P_i} \right] \{\phi_i^K\} / 2 \end{cases} \quad (19)$$

其中 S_i^K 、 $\{\phi_i^K\}$ 表示第 K 次迭代运算的结果。

由于每次计算只需要前次的模态参数,故可得到总修改量 $\{\Delta^K\} = \{\Delta P^\circ\} + \{\Delta P'\} + \dots + \{\Delta P^{K-1}\}$ 时的模态参数及其灵敏度。由此就能够预测变量改变到 $\{P^\circ\} + \{\Delta^K\}$ 后结构动态特性的变化,这正是进行优化设计的基础。当进行优化的目标函数选定后,可根据第 K 次迭代计算的灵敏度,利用各种优化方法选择下一次参数的改变量 $\{\Delta P^K\}$,得到一个点列 $\{P^\circ\}$, $\{P^1\}$, $\dots$, $\{P^K\}$, $\dots$, 在一定的约束条件下,使其收敛于目标函数的极值点,达到优化的目的。这个过程,可用下面的框图1表示

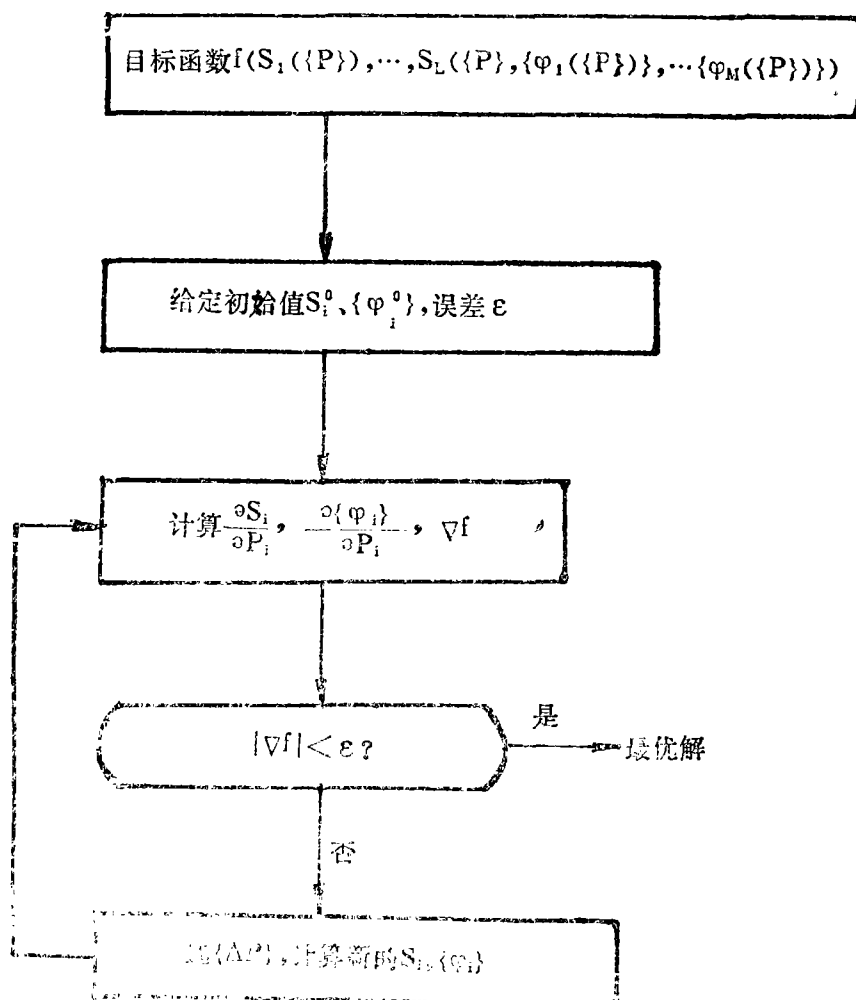


图 1

四、力学模型

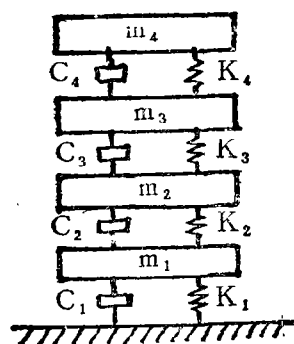


图 2

现以图 2 所示的四自由度线性粘性阻尼系统为例进行计算考察。

$$m_1 = 4.0 \text{ kg} \quad C_1 = 400 \text{ N} \cdot \text{S/m} \quad K_1 = 1.5 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$m_2 = 8.0 \text{ kg} \quad C_2 = 450 \text{ N} \cdot \text{S/m} \quad K_2 = 2.0 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$m_3 = 10 \text{ kg} \quad C_3 = 500 \text{ N} \cdot \text{S/m} \quad K_3 = 7.5 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$m_4 = 8.5 \text{ kg} \quad C_4 = 320 \text{ N} \cdot \text{S/m} \quad K_4 = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}$$

为了说明利用非完备模态参数的有效性, 现仅取前三阶模态参数, 它们是图 2 所示系统的理论计算结果。

$$\text{复频率: } S_1 = -3.321 + j163.512 \quad S_2 = -28.041 + j425.437$$

$$S_3 = -97.186 + j931.600$$

正则化复振型:

$$\begin{aligned} \{\phi_1\} &= \begin{Bmatrix} 3.742 - j3.765 \\ 6.368 - j6.369 \\ 6.899 - j6.868 \\ 8.897 - j8.919 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} & \{\phi_2\} &= \begin{Bmatrix} -2.775 + j2.749 \\ -3.848 + j3.810 \\ -3.333 + j3.414 \\ 6.206 - j6.183 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \\ \{\phi_3\} &= \begin{Bmatrix} 7.461 - j7.707 \\ 0.261 + j0.266 \\ -2.170 + j1.810 \\ 0.369 - j0.247 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \end{aligned}$$

1、当修改结构参数时, 计算修改后结构的模态参数:

例如, 在 m_1 与基座之间加一刚度, 取 $\Delta K_1 = 3 \times 10^6 \text{ N/m}$, $\left| \frac{\Delta K_1}{K_1} \right| = 200\%$, 这时修改后的理论值

$$S_1 = -3.971 + j200.354 \quad S_2 = -29.238 + j449.870$$

$$S_3 = -73.736 + j1215.805$$

$$\begin{aligned} \{\phi_1\} &= \begin{Bmatrix} 1.668 - j1.591 \\ 5.187 - j5.141 \\ 5.928 - j5.843 \\ 8.881 - j8.979 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} & \{\phi_2\} &= \begin{Bmatrix} -1.524 + j1.387 \\ -4.119 + j4.165 \\ -3.382 + j4.043 \\ 5.534 - j5.382 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \\ \{\phi_3\} &= \begin{Bmatrix} 5.379 - 6.322j \\ 2.100 - 1.475j \\ -2.447 + 1.857j \\ 0.260 - 0.100j \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \end{aligned}$$

利用前面所推的 (18)、(19) 式计算, 当每次修改量定为 $\Delta K_1^K = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$, 得计算结果

$$\begin{aligned} \{\phi_1\} &= \begin{Bmatrix} 1.685 - j1.602 \\ 5.080 - j5.043 \\ 5.983 - j5.893 \\ 8.880 - j8.977 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} & \{\phi_2\} &= \begin{Bmatrix} -1.547 + j1.398 \\ -4.025 + j4.091 \\ -3.958 + j4.103 \\ 5.530 - j5.377 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \\ \{\phi_3\} &= \begin{Bmatrix} 6.696 - j6.974 \\ 0.708 - j0.236 \\ -1.527 + j0.962 \\ 0.181 - j0.059 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$S_1 = -4.021 + 200.733j \quad S_2 = -29.333 + j450.191 \quad S_3 = -83.906 + j1241.674$$

复频率虚部（即有阻尼自由振动前三阶频率）的相对误差分别为： $\epsilon_1 = 0.19\%$
 $\epsilon_2 = 0.07\%$ $\epsilon_3 = 2.13\%$

如果每次修改量增大10倍，即 $\Delta K_1^K = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$ ，则前三阶复频率虚部的相对误差分别为

$$\epsilon_1 = 0.27\% \quad \epsilon_2 = 0.1\% \quad \epsilon_3 = 2.08\%$$

上面第Ⅲ阶模态参数与理论解的相对误差稍大，这是忽略了第Ⅳ阶模态参数的缘故。第Ⅰ、Ⅱ阶振型值分别与其理论解重合较好，可见截断误差主要来源于相邻阶模态参数的影响。

2、根据所要求的系统频率，进行结构参数的修改。

例如，使第Ⅰ阶有阻尼频率 $\omega_d(1)$ 从163.512(1/S)改变到208(1/S)，考察系统质量的变化。

第一阶复频率对质量 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 的灵敏度分别为：

$$\frac{\partial S_1}{\partial m_1} = 0.0261 - j0.7532 \quad \frac{\partial S_1}{\partial m_2} = 0.0878 - j2.1675$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial m_3} = 0.1140 - j2.5321 \quad \frac{\partial S_1}{\partial m_4} = 0.1617 - j4.2416$$

可见改变 m_4 对有阻尼频率的影响最大。但如果仅改变 m_4 ，即使 $m_4 \rightarrow 0$ 也达不到要求。故必须进行多点修改。本文利用最速下降法寻找优化方向，即：

$$m_1^K = m_1^{K-1} + \lambda_{K-1} \frac{\partial \omega_d^{K-1}(1)}{\partial m_1^{K-1}}, \text{ 式中 } \lambda_{K-1} \text{ 是第 } (k-1) \text{ 次的迭代步长, 取 } \lambda_K = 0.002,$$

迭代390次后得到 $\omega_d(1) = 208.129(1/S)$

各点质量的改变量为：

$$\Delta m_1 = -0.0839 \text{ kg} \quad \Delta m_2 = -2.398 \text{ kg} \quad \Delta m_3 = -2.787 \text{ kg} \quad \Delta m_4 = -4.421 \text{ kg}$$

修改后系统有阻尼频率的理论值为：

$$\omega_d(1) = 208.129(1/S), \text{ 迭代结果与理论值之间的相对误差 } \epsilon = 0.03\%.$$

3、根据所要求的振型进行结构参数修改

在结构设计和实际系统应用中，常常需要使某些部位的振动最小，或使两点间的相对振动最小，这可以通过改变各点振型的比值来实现。从上面的振型数值知道，第3点和第4点的Ⅱ阶振型反向，为使其间的相对振动最小，现建立如下的目标函数以及约束条件

$$\begin{cases} \min f = \min |\phi(3,2) - \phi(4,2)|^2 \\ m_i > 0, C_i > 0, K_i > 0 \\ C_4 = \text{常量}, K_4 = \text{常量 (不修改 3、4 点间的阻尼和刚度)} \\ m_i < 8m_i^0, C_i < 3C_i^0 \text{ (限制修改量。在此 } m_i^0, C_i^0 \text{ 是初始的质量和阻尼参数)} \end{cases}$$

利用Rosen投影梯度法寻找优化方向，即 $m_1^{K+1} = m_1^K - \lambda_1^K \frac{\partial f^K}{\partial m_1^K}$

$$C_i^{K+1} = C_i^K - \lambda_2^K \frac{\partial f^K}{\partial C_i^K} \quad K_i^{K+1} = K_i^K - \lambda_3^K \frac{\partial f^K}{\partial K_i^K}$$

当迭代点达到约束区域的边界上而且负梯度方向指向可行区域的外部时,则沿着负梯度在边界上的投影方向前进,一直到求得最优解。值得注意的是迭代步长 λ_1^K 、 λ_2^K 、 λ_3^K 应根据函数对质量、阻尼、刚度的导数的大小酌情选取。

用初始参数计算 $f^0 = 1.83 \times 10^{-4}$,当各变量的修改量为:

$$\begin{aligned} \Delta m_1 &= 16.584 \text{ kg}, & \Delta m_2 &= 4.073 \text{ kg}, & \Delta m_3 &= -0.001 \text{ kg}, & \Delta m_4 &= 26.011 \text{ kg} \\ \Delta C_1 &= 577.987 \text{ N} \cdot \text{S/m}, & \Delta C_2 &= -0.512 \text{ N} \cdot \text{S/m}, & \Delta C_3 &= 748.442 \text{ N} \cdot \text{S/m}, & \Delta C_4 &= 0 \\ \Delta K_1 &= 5.444 \times 10^6 \text{ N/m}, & \Delta K_2 &= 7.854 \times 10^6 \text{ N/m}, & \Delta K_3 &= -844 \text{ N/m}, & \Delta K_4 &= 0 \end{aligned}$$

连续优化的结果 $f = 4.83 \times 10^{-5}$

修改后 f 的理论值 $f = 5.55 \times 10^{-5}$

迭代结果与理论值之间的相对误差 $\varepsilon = 13\%$

由上面的分析可知,利用本文所提出的连续灵敏度分析法对结构进行动态修改,当采用非完备模态参数集进行计算,精度仍然很高,因此是一种切实可行的方法。本文作者曾用此法完成了某一机床的试验振动模态分析和结构动态修改,限于篇幅,本文不再叙述。

五、结束语

本文所提出的CSOA法是一种连续对结构进行灵敏度分析的方法。该方法的优点是:

1) 可将各种优化设计方法方便地用于结构动力学修改。在灵敏度分析的基础上,逐次同时对结构进行多点优化,这样做不仅加速了结构修改的过程,而且还可以克服仅修改某一结构参数而达不到要求的弊端。

2) 可以直接利用试验模态分析所得的非完备模态参数集进行初始迭代,便于应用于大型复杂结构系统的动态优化设计。

3) 物理意义明确,编程简单,易于在计算机上实现。

参 考 文 献

- [1] Fox, R. L., Kapoor, M. P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA-J, Vol. 6, No. 12, 1968
- [2] Rudisill, C. S., "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix", AIAA-J, Vol. 12, NO. 5, 1974
- [3] Yuan-Fang Chou, Jeng-Shyong Chen, "Structural Dynamics Modification Via Sensitivity Analysis", Proc. 3th IMAC, 1985
- [4] J. A. Brandon "Derivation and Significance of Second-Order Modal Design Sensitivities" AIAA-J, Vol. 22, NO. 5, 1984
- [5] Vanhonacker, P., "Sensitivity Analysis of Mechanical Structures Based on Experimentally Determined Modal Parameters", Proc. 1st IMAC, 1982
- [6] Shi-Lin Huang, Ji-Fang Tian, "The Sensitivity Analysis and Large-Change Modification of the Dynamics Behaviour of Mechanical Structures" Proc. 5th IMAC 1987
- [7] 彭泽民, 宋健伟, "相对灵敏度总和不变量定理及基于高阶灵敏度的结构修改", 第四届全国机械阻抗与模态参数识别会议交流论文, 1985。