关于运用最小余能原理的一点注记

雷晓燕 吕绍棣

(建 筑 工 程 系)

摘 要

本文论述了在对最小余能原理变分中, $\delta\sigma_{ij}$ 是非完全独立的重要性, 提出了正确推导和理解由最小余能原理推导欧拉方程的办法及应避免的错误。

虽然近年来有关变分原理的论著和文章已经不少, 但仍有不少同志对如何正确推导和理解由最小余能原理推导欧拉方程的方法还不十分清楚, 认为是凑出来的, 因而常常产生一些错误的概念, 得出错误的结论, 为此, 本文将对这一问题进行详细的论述。

最小余能原理是指, 在所有静力许可的应力场中, 真实的应力场使物体的总余能 Π_c 取极值, 即:

$$\delta \Pi_c = \delta \left(\int_{\Omega} B(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j ds \right) = 0 \quad (1)$$

其中: $B(\sigma_{ij})$ 为余应变能密度函数。

对 (1) 式进行变分有

$$\delta \Pi_c = \int_{\Omega} \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta \sigma_{ij} n_j ds = 0 \quad (2)$$

应注意 (2) 式中的 $\delta\sigma_{ij}$ 并不是完全独立的, 它必须是静力许可的, 即必须满足

$$\begin{cases} \delta\sigma_{ij, j} = 0 & (\text{in } \Omega) \\ \delta\sigma_{ij} n_j = 0 & (\text{on } S_T) \end{cases} \quad (3)$$

关于 (2) 中 $\delta\sigma_{ij}$ 不是完全独立的, 这点曾在我们同学之间发生过一些争论, 有的同学认为, 尽管 $\delta\sigma_{ij}$ 必须在域内满足 (3) 式, 但 (3) 式是关于 $\delta\sigma_{ij}$ 偏导数的约束方程, 至于 $\delta\sigma_{ij}$ 本身并没有给出约束条件。他们指出, 如果选取

本文于1987年12月3日收到

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{xx} &= f_1(y, z) & \delta\sigma_{yy} &= f_2(x, z) & \delta\sigma_{zz} &= f_3(x, y) \\ \delta\sigma_{xy} &= f_4(z) & \delta\sigma_{yz} &= f_5(x) & \delta\sigma_{zx} &= f_6(y) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $f_1, f_2, \dots, f_6$ 是任意函数,且在边界 S_T 上为零。显然这样选取的 $\delta\sigma_{ij}$ 是满足(3)式的。由于 $f_1, f_2, \dots, f_6$ 是六个任意函数,因此 $\delta\sigma_{ij}$ 也将是任意函数,即是完全相互独立的。

这种分析粗看似乎有些道理,但我们只要仔细一分析,就会发现这种推理是不成立的。我们将(2)式改写成如下的形式

$$\int_{\Omega} \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{S_n} \bar{u}_i \delta T_i ds = 0$$

对于线弹性力学问题, $\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$ 代入上式

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{S_n} \bar{u}_i \delta T_i ds = 0 \quad (5)$$

容易看出,上式即为虚功方程,其中 $\delta\sigma_{ij}$ 是真实应力场附近,且满足静力许可条件的任意微小应力变化,而按(4)式所给的 $\delta\sigma_{ij}$,只允许 $\delta\sigma_{xx}$ 在 y, z 方向, $\delta\sigma_{yy}$ 在 x, z 方向, $\delta\sigma_{zz}$ 在 x, y 方向, $\delta\sigma_{xy}$ 在 z 方向, $\delta\sigma_{yz}$ 在 x 方向, $\delta\sigma_{zx}$ 在 y 方向有变化,而在其它方向则是不变的,这与 $\delta\sigma_{ij}$ 是任意微小改变是相矛盾的,因此 $\delta\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 的各个分量一般都应是 x, y, z 的函数,代入(3)中第一式,得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_5}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_6}{\partial x} + \frac{\partial f_5}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

因此 $f_1, f_2, \dots, f_6$ 不可能是完全独立的,

明白了这点,可以帮助我们更好地理解 and 运用最小余能原理,及避免出现差错。

例如在某教材中,作者用加权余量法推导虚应力原理是这样进行的。

“考虑几何方程和边界条件

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) & (\text{in } \Omega) \\ u_i &= \bar{u}_i & (\text{on } S_u) \end{aligned}$$

权函数取真实应力的变分 $\delta\sigma_{ij}$ 及其相应的边界值 δT_i , $\delta T_i = \delta\sigma_{ij}n_j$,在边界 S_T 上有 $\delta T_i = 0$,

这样构成的等效积分提法是

$$\int_{\Omega} \delta \sigma_{ij} [\varepsilon_{ij} - 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})] d\Omega + \int_{S_u} \delta T_i (u_i - \bar{u}_i) ds = 0$$

经分部积分后可得

$$\int_{\Omega} (\delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + u_i \delta \sigma_{ij,i}) d\Omega - \int_S \delta \sigma_{ij} n_j u_i ds + \int_{S_u} \delta T_i (u_i - \bar{u}_i) ds = 0$$

因为在域内应力仍满足平衡，因此 $\delta \sigma_{ij,i} = 0$ ，在边界上 $\delta T_i = \delta \sigma_{ij} n_j$ ，而在给定力的边界 S_T 上 $\delta T_i = 0$ ，所以上式可简化为

$$\int_{\Omega} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{S_u} \delta T_i \bar{u}_i ds = 0$$

显然作者在推导过程中是运用了 $\delta \sigma_{ij,i} = 0$ 这个条件的，因而 $\delta \sigma_{ij}$ 是不完全独立的。但加权余量法则要求权函数是相互独立的，否则将不是与几何方程及位移边界条件相等效的积分“弱”形式。所以上述推导是矛盾的。

此外，知道了 $\delta \sigma_{ij}$ 是不完全独立的，我们在从最小余能原理推导欧拉方程时，就可以对 $\delta \sigma_{ij}$ 进行不同的处理，以解除约束条件 $\delta \sigma_{ij,i} = 0$ ，从而得到不同的欧拉方程。

例如要求从最小余能原理推导几何方程，我们从(2)式出发，有

$$\delta \Pi_c = \int_{\Omega} \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta \sigma_{ij} n_j ds = 0$$

因 $\delta \sigma_{ij}$ 在域内并不完全独立，不能直接对上式变分。为此引入拉氏乘子 λ_i ，将约束条件 $\delta \sigma_{ij,i} = 0$ 解除，即

$$\delta \Pi_c^* = \int_{\Omega} \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_i \delta \sigma_{ij,i} d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i \delta \sigma_{ij} n_j ds = 0$$

经变分得

$$\delta \Pi_c^* = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} - 1/2 (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} d\Omega + \int_{S_u} (\lambda_i - \bar{u}_i) \delta \sigma_{ij} n_j ds = 0$$

因此

$$\begin{cases} \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = 1/2 (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) & (\text{in } \Omega) \\ \lambda_i = \bar{u}_i & (\text{on } \Omega) \end{cases} \quad (7)$$

与弹性力学基本方程类比, 知 λ_i 的力学意义为位移 u_i , 同时对线弹性力学问题,

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

因此式 (7) 即为几何方程及位移边界条件。

又比如我们要求从最小余能原理推导线弹性力学的变形协调条件, 由 (2)

$$\delta \Pi_c = \delta \left(\int_{\Omega} B(\sigma_{ij}) d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j ds \right) = 0$$

其中 $B(\sigma_{ij}) = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\mu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij}$, 代入上式, 则有

$$\delta \Pi_c = \int_{\Omega} \left[\frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} - \frac{\mu}{E} \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} \right] d\Omega - \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i ds = 0 \quad (8)$$

同样, 由于 $\delta \sigma_{ij}$ 不是独立的变分, 不能直接对上式变分, 为此引进应力函数 Φ_{ij} , 定义

$$\sigma_{ij} = e_{ik} e_{jl} \Phi_{kl, st} \quad (9)$$

其中, e_{ik} 为置换符号

如此定义的 σ_{ij} 是满足无体积力平衡微分方程的, 即满足 $\sigma_{ij, i} = 0$

仿此, 引进 $\delta \Phi_{ij}$, 则

$$\delta \sigma_{ij} = e_{ik} e_{jl} \delta \Phi_{kl, st} \quad (10)$$

这时 $\delta \sigma_{ij, j} = 0$ 自然满足, 已经不成为变分的约束条件。而 $\delta \Phi_{ij}$ 有六个互相独立的变分。

将 (10) 式代入 (8) 中, 变分得

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c &= \int_{\Omega} \left[\frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} e_{ik} e_{jl} \delta \Phi_{kl, st} - \frac{\mu}{E} \sigma_{ij} e_{ik} e_{jl} \delta \Phi_{kl, st} \right] d\Omega - \\ &\quad \int_{S_u} e_{ik} e_{jl} \delta \Phi_{kl, st} n_j \bar{u}_i ds \\ &= \int_{\Omega} \frac{1+\mu}{E} \left[e_{ik} e_{jl} \sigma_{ij, st} - \frac{\mu}{1+\mu} e_{ik} e_{jl} \sigma_{ij, st} \right] \delta \Phi_{kl} d\Omega + \\ &\quad \int_S \frac{1+\mu}{E} \left[e_{ik} e_{jl} \sigma_{ij} - \frac{\mu}{1+\mu} e_{ik} e_{jl} \sigma_{ij} \right] \delta \Phi_{kl, st} ds - \\ &\quad \int_S \frac{1+\mu}{E} \left[e_{ik} e_{jl} \sigma_{ij, t} - \frac{\mu}{1+\mu} e_{ik} e_{jl} \sigma_{ij, t} \right] \delta \Phi_{kl, st} ds - \\ &\quad \int_{S_u} e_{ik} e_{jl} \delta \Phi_{kl, st} n_j \bar{u}_i ds = 0 \end{aligned}$$

式中边界积分仅影响边界条件，由 $\delta\phi_{k1}$ 的任意性，可得欧拉方程

$$e_{ik} e_{jlt} \sigma_{ij, st} - \frac{\mu}{1+\mu} e_{ik} e_{ilt} \sigma_{ij, st} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

此方程即为用应力表示的协调方程。在这里的一般情况下推导相应的边界条件比较复杂但在经过冗长的推导后也可以得到相当于给定位移边界处的变形协调关系的自然边界条件。

因此最小余能原理对应的欧拉方程可以是几何方程，也可以是变形协调方程，视所选择的独立变分函数而异。

作者在完成本文的过程中，曾与清华大学力学系黄平同志进行过多次讨论，颇有启发，在此表示谢意。

参 考 文 献

- [1] 杜庆华等 《弹性理论》 科学出版社 1986
- [2] 熊祝华 《弹性力学的变分原理》 江西省力学学会印 1985
- [3] 清华大学力学系固体力学教研室 《计算固体力学》讲义
- [4] Fung, Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice—Hall (1965)