天然河流中综合横向扩散系数的探讨

陈 文 英

（建 工 系）

摘 要

本文论述了污染物排放入河中后的扩散问题，着重讨论了综合横向扩散系数的表达式。

一、引 言

天然河流在横断面上各点的水深和流速的不同对污染物排入天然河流中所发生的横向扩散现象有显著的影响。根据实测资料表明，污染物浓度在天然河流横断面上的分布一般不呈现高斯正态分布[1]，但Yotsukura等人于１９７２年以累积流量为横坐标取代横向几何坐标来整理河流横断面上污染物浓度分布，则呈现正态分布规律。而且Yotsukura还提出扩散因素的概念[2]。但Yotsukura对累积流量坐标扩散方程的物理意义未作详细说明，其扩散因素的表达式也还有商榷探讨的余地。本文评述了污染物排入河中后所形成的浓度分布的二维扩散方程，并着重讨论了综合横向扩散系数（即所谓扩散因素）的表达式，以便更准确地归纳整理实测资料。

二、二维扩散方程

如在河水水流中任取一dx dy dz的微小体积（图１），根据质量守恒原理，并忽略分子扩散作用，即考虑紊动扩散是主要的扩散作用，可写出非生化降解保守污染物浓度分布的微分方程：

本文于1988年１月25日收到

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+w\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_X\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_Y\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_Z\frac{\partial c}{\partial z}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中c为污染物的浓度；u、v、w为在坐标x、y、z方向上的速度分量；E_X、E_Y、E_Z为在坐标x、y、z方向上的紊动扩散系数。

注意到：

（1）如果污染物为恒定连续排放，则河中污染物浓度不随时间而变，即$\frac{\partial c}{\partial t}=0$。

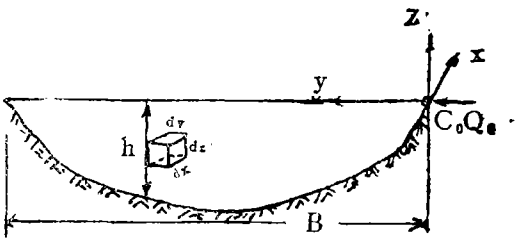

图 1

（2）在天然河流的顺直河段，过水断面积大小变化较小的情况下，$v\simeq 0$，$w\simeq 0$，$u=u(y,z)$。

（3）由于天然河流的宽度比深度要大得多，宽深比通常在30以上，因之污染物沿深度的扩散要比沿宽度上的扩散快得多，可认为浓度在深度上很快形成均匀分布，从而认为

$$\frac{\partial c}{\partial z}=0.$$

（4）纵向的扩散项$\frac{\partial}{\partial x}\left(E_X\frac{\partial c}{\partial x}\right)$比迁移项$u\frac{\partial c}{\partial z}$小得多，从而$\frac{\partial}{\partial x}\left(E_X\frac{\partial c}{\partial x}\right)$可以忽略。

于是（1）式变为

$$u\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(E_Y\frac{\partial c}{\partial y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

将式（2）沿z方向积分，得

$$\int_{-h}^{0}u\frac{\partial c}{\partial x}dz=\int_{-h}^{0}\frac{\partial}{\partial y}\left(E_Y\frac{\partial c}{\partial y}\right)dz$$

即 $$\overline{u}h\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(E_Yh\frac{\partial c}{\partial y}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式中$\overline{u}$——沿水深h的平均流速。

E_Y——沿水深h的横向(y方向)平均紊动扩散系数。

式（3）中，$\overline{u}$，h均为坐标y的函数，而$u\overline{h}$则为在坐标y处的单宽流量q′。为消去（3）式左边的$\overline{u}h$，可采用累积流量q[2]为横坐标来替代y，即定义河中某点到岸边范围的流量为

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

累积流量，

$$q=\int_0^y q'dy=\int_0^y \overline{u}\,h dy$$

于是 $$\frac{\partial q}{\partial y}=\overline{u}\,h$$

而 $$\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}=\overline{u}\,h\frac{\partial c}{\partial q}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(E_y h\frac{\partial c}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(E_y h^2\overline{u}\frac{\partial c}{\partial q}\right)\overline{u}\,h \quad\cdots\cdots(4)$$

以（4）式代入（3）式，得

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial q}\left(E_y h^2\overline{u}\frac{\partial c}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(D_i\frac{\partial c}{eq}\right)\quad\cdots\cdots(5)$$

式中$D_i=E_y h^2\overline{u}$。Yotsukura称D_i为扩散因素（Diffusion factor）。笔者认为该D_i实际上仍是扩散方程中的一种横向扩散系数，只不过这一扩散方程中的横向坐标为q，它替代了实际的几何横向坐标y，故可称为沿累积流量坐标q的扩散系数或综合横合扩散系数。Yotsnkura提出按下式计算D_i的平均值：

$$\overline{D_i}=\frac{1}{Q}\int_0^Q E_Y h^2\overline{u}\,dq\quad\cdots\cdots(6)$$

然后把式（5）写成下式进行求解

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\overline{D_i}\frac{\partial^2 c}{\partial q^2}\quad\cdots\cdots(7)$$

但笔者认为D_i是微分方程（5）中的变系数，它是水深h及沿水深平均流速$\overline{u}$的函数，如简单地将它按（6）式求平均后作为常系数提出于微分符号之外似乎欠妥，因为如将（6）式代入（7）式化简，并不能还原到（5）式。不过，在水力学中采用近似式是允许的，而且是解决实际工程问题所常用的手段，但我们似乎也可从不同的角度来写出近似式，以寻求更为逼近于实际的表达式。因之现提出另一个$\overline{D_i}$表达式（式（10）），推导如下：

如在式（5）中保持x不变将（5）式对q积分，得

$$\int\frac{\partial c}{\partial x}dq=\int\frac{\partial}{\partial q}\left(D_i\frac{\partial c}{\partial q}\right)dq=D_i\frac{\partial c}{\partial q}+C_1$$

再次对q积分，得

$$\int\frac{1}{D_i}\int\frac{\partial c}{\partial x}dqdq=C+C_1\int\frac{1}{D_i}dq+C_2$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 $\int\frac{\partial c}{\partial x}dq$随q变化不大时，上式可近似写成

$$\int\frac{1}{D_i}dq\int\frac{\partial c}{\partial x}dq=C+C_1\int\frac{1}{D_i}dq+C_2 \quad \cdots\cdots (8)$$

式中C为污染物浓度，C_1，C_2为积分常数，而

$$\frac{1}{D_i}=-\frac{1}{E_y h^2\overline{u}}=f(q)\ .$$

我们知道，对定积分$\int_{O+\varepsilon}^{Q-\varepsilon}\frac{1}{D_i}dq$来说，可由积分中值定理求得函数$\frac{1}{D_i}=f(q)$在区间$(O+\varepsilon,Q-\varepsilon)$的平均值$(\overline{\frac{1}{D_i}})$

$$\int_{O+\varepsilon}^{Q-\varepsilon}\frac{1}{D_i}dq=(Q-2\varepsilon)(\overline{\frac{1}{D_i}})\simeq Q(\overline{\frac{1}{D_i}})$$

式中Q为通过全过水断面的流量，ε为微量。如岸边水深为零，由于函数$\frac{1}{D_i}$在q=O及q=Q两点不连续，所以在积分限中应不包括这两点的值而取积分区间为$(O+\varepsilon,\ Q-\varepsilon)$。

令$\frac{1}{D_i}=(\overline{\frac{1}{D_i}})$，则上式为

$$\int_{O+\varepsilon}^{Q-\varepsilon}\frac{1}{D_i}dq\simeq\frac{Q}{D_i}=\frac{1}{D_i}\int_O^Q dq \quad \cdots\cdots (9)$$

考虑到（5）式解的取值范围限于（O，Q）之间，所以对（8）式中的积分项$\int\frac{1}{D_i}dq$可参照（9）式的形式近似地写成

$$\int\frac{1}{D_i}dq=\frac{1}{D_i}\int dq$$

于是（8）式为 $$\frac{1}{D_i}\int dq\int\frac{\partial c}{\partial x}dq=C+C_1\frac{1}{D_i}\int dq+C_2$$

将上式对q求导两次，即得出与（7）式形式相同的方程

$$\frac{\partial c}{\partial x}=\overline{D_i}\frac{\partial^2 c}{\partial q^2} \quad \cdots\cdots (7)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

但式中 $\overline{D_i}=1\Big/\left(\overline{\frac{1}{D_i}}\right)=1\Big/\frac{1}{Q}\int_{o+}^{Q-}\frac{1}{E_y h^2 u}dq$ ……（10）

当单宽流量沿横断面分布很不均匀时，按（6）式计算$\overline{D_i}$与按（10）式计算$\overline{D_i}$其结果有很大差别，而式（10）的计算结果与实测结果吻合较好（详见本文第三部份）。

式（7）称为累积流量坐标的一维扩散方程，式（7）的物理意义是：将河流沿纵向划分为许多流量为dq的流管，当河水以流量Q通过时，于坐标原点处每单位时间连续投入一定量的污染物$C_o Q_o$（Q_o为污水的流量，C_o为污染物浓度）（见图1），则质量为$C_o Q_o$的污染物在体积为Q的河水中横穿各流管进行扩散。尽管河道平面位置可能蜿蜒弯曲，但每一根流管总是和一定的累积流量坐标q相对应，所以在河流横断面上，污染物浓度沿q坐标呈正态分布；同时也有可能顺河水流动方向求算一定q坐标下的纵向浓度分布C（x,q），譬如为求各断面最大浓度C_{max}沿x坐标的分布，则可按污染物投放点的q坐标$q=q_o$求算沿河各断面的浓度C（x,q_o），即可得出纵向最大浓度分布曲线，因为最大浓度显然总是出现在污染物投放点所在的同一根流管内。

由（7）式不难解得污染物沿河水流向的分布为：

当污染物排放点为在岸边（图1中坐标原点）则

$$\frac{C}{\overline{C}}=\frac{2}{\sqrt{4\pi x'}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\exp\left[-(p-2n)^2/4x'\right] \quad \cdots\cdots (11)$$

$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$

如污染物排放点不在岸边而在河中某点，则上式写成

$$\frac{C}{\overline{C}}=\frac{2}{\sqrt{4\pi x'}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\exp\left[-(p-2n-p_o)^2/4x'+\exp\left[-(p-2n+p_o)^2/4x'\right]\right\}\right.$$

$n=0,\ \pm1,\ \pm2,$ ……（12）

式中C——河中离排放点距离为x的横断面上某点浓度

$\overline{C}$——河中污染物的平均浓度，$\overline{C}=\frac{C_o Q_o}{Q}$

C_o——排入河中污水的污染物的浓度

Q_o——排入河中的污水流量

Q——河流的流量

x′——无量纲纵向坐标，$x'=\overline{D_i}x/Q^2$

p——无量纲累积流量坐标，$p=q/Q$

p_o——排放点的无量纲累积流量坐标，在各断面的该坐标上$C=C_{max}$，$p_o=q_o/Q$

式（11）与（12）的成立条件是污染物的移流输移远大于纵向紊流扩散。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

三、对综合横向扩散系数$\overline{D_i}$表达式的验证

现引用Yotsukura等人的试验资料，分别由（6）式及（10）式求得$\overline{D_i}$，并进而代入（12）式求得纵向最大浓度分布，再与实测结果相比较。

1967年11月，Yotsukura，Fischer和Sayre等人在missouri河的某河段用若丹明—BA染料投入河流的流量平分点附近($q/Q\approx0.45$处)进行横向扩散试验[3]。在投放点下游共测取10个河流横断面上的浓度分布。染料与河水完全混合后的全河段平均浓度为$\overline{C}=1.207$ppb。此外，在投放点上游1000英尺及下游17,500英尺处测得横断面上的水深h及沿水深的平均流速，如图2所示。而且根据所测资料验证了横向紊流扩散系数E_y的计算式为

$$E_y=\beta hu_*=.71hu_* \qquad (13)$$

式中h为当地水深，u_*为当地切力速度。

根据图2的资料及式（10），可算出：

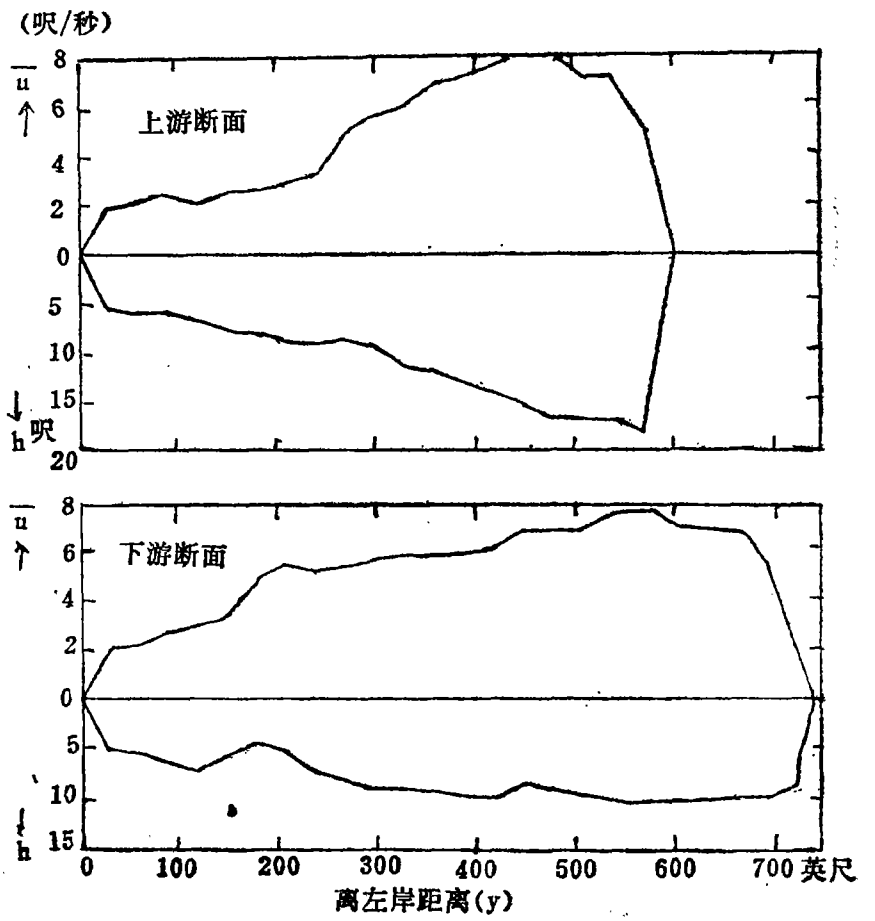

图 2

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

上游断面的$\overline{D_i}$ = 597英尺^5／秒^2

下游断面的$\overline{D_i}$ = 348英尺^5／秒^2

现取其平均值作为该河段的平均$\overline{D_i}$值：

$\overline{D_i}$ = （597 + 348）／2 = 472.5英尺^5／秒^2

然后按式（12）计算各断面的最大浓度C_{max}（发生在$p = p_0$处）与实测的各断面的最大浓度进行比较，如表1所示。

表 1

断面号*	距投放点距离x(英尺)	x′	计算C_{max} (ppb)	实测C'_{max} (ppb)	相差 $\left(\frac{C_{max} - C'_{max}}{C'_{max}}\right)$ %
2	3992	0.001492	8.81	9.6	+8.2
3	5730	0.002316	7.07	7.0	−1.0
4	8730	0.003528	5.73	5.78	+1.0
5	11850	0.004789	4.92	5.10	+3.5
6	15490	0.006260	4.30	4.27	−0.7
7	18720	0.007565	3.91	3.82	+2.4
8	22410	0.009057	3.58	3.25	−10.0
9	27690	0.01119	3.22	2.83	−13.8

*考虑到断面1与10的实测浓度分布存在有较大的测量上的误差故未采用。

如采用Yotsukura所推荐的$\overline{D_i}$表达式，即（6）式求得之$\overline{D_i}$代入（12）式，其算得的各断面上最大浓度值与实测值相比较，如表2所示。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 2

断面号	距投放点距离x(英尺)	x′	计算C_{max} * (ppb)	实测C'_{max} (ppb)	相差$(\frac{C_{max}-C'_{max}}{C'_{max}})\%$
2	3692	0.003736	5.57	9.6	−41.9
3	5730	0.005798	4.47	7.0	−36.1
4	8730	0.008833	3.62	5.78	−37.4
5	11850	0.01199	3.11	5.10	−39.0
6	15490	0.01567	2.72	4.27	−36.3
7	18720	0.01894	2.47	3.82	−35.3
8	22410	0.02267	2.26	3.25	−30.5
9	27690	0.02802	2.03	2.83	−28.3

* 根据Yotsukura本人计算的$\overline{D_i}=E_y(\frac{1}{Q}\int_0^Q h^2\overline{u}dq)=1.3\times 910=1183$英尺^5／秒^{2}求算得出$C_{max}$

比较表1与表2的结果，显然按（10）式计算$\overline{D_i}$得出的结果较接近于实际。当然我们需进行更多的比较，而且应该用不同算式得出的$\overline{D_i}$求算出各断面的横向浓度分布与实测的横向浓度分布相比较。但由于上述实验中缺乏准确的横断面单宽流量分布资料而未能进行。所以这一问题还有待于进一步继续研究。

* 参 考 文 献 *

(1) Fischer, H、B, Mixing in Inland and Coastal Water, Academlc Press Inc, 1979.

(2) Yotsukura, Cobb, Transvevse Diffusion of Solutes in Natural Streams, U S Geological Survey Professional Paper 582—C, 1972.

(3) Yotsukuro, Fischer, Sayre, Measurement of Mixing Churacteristics of the Missouri River Between Sioux City, Iowa and Plattsmouth, Nebraska, U S Geologieal Sulvey Water—Supply Paper 1899—G, 1970.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net