摩　擦　碰　撞

（美）J.B.Keller

圣小珍译　　吕绍棣校

提　　要

本文提出了考虑摩擦时两刚体的碰撞理论。我们通过分析碰撞中物体的运动方程，指出了碰撞过程中物体滑动方向的变化规律，从而为确定摩擦力方向和计算摩擦冲量提供了条件。另一方面，利用恢复系数，我们确定了碰撞中的法向冲量。当在整个碰撞过程中滑动方向保持不变时，上述理论与Whittaker的理论相吻合，而后者仅仅在这一情况下才成立。

一、引　　言

在刚体力学中，两个物体的碰撞被认为是瞬时发生的，且接触点只有一个，每个物体通过接触点作用一个脉冲力到另一物体上。在无摩擦的情况下，脉冲力的冲量可以通过恢复系数来计算。但在有摩擦的情况下，在刚体力学的体系中，尚无满意的方法可供计算。为了寻求一种计算方法，我们必须放弃碰撞是瞬时发生的观点，而假定碰撞历经时间t_c，t_c相对于碰撞前或后的正常运动时间T是小量，然后，通过碰撞过程中两物体的运动方程来决定接触点的相对切向速度。利用该滑动速度和摩擦定律我们即可决定两物体相互作用的时变摩擦力，该摩擦力的积分即为碰撞过程中两物体相互传递的摩擦冲量。

当在整个碰撞过程中滑动方向保证不变时，摩擦冲量的方向即为该滑动方向（应与滑动方向相反——译者注），而其大小等于摩擦系数乘上法向冲量的大小。这便是Whittaker(1904)处理摩擦碰撞的方法的基础，然而，他没有注意到，这仅仅在滑动方向保持不变时才成立，否则是不成立的。这点在Kane(1984)应用Whittaker的方法来处理复合摆撞击固定面这个问题时变得明显起来，他发现对某些参数值，Whittaker的方法将导致能量的增加。事实上，在摆撞击固定表面的过程中，滑动速度要逆转它的方向，因此Whittaker的方法是不适用的。

我们的计算方法的困难主要有如下两点：一是两质体（在碰撞过程中）的运动难于确定，二是由于法向力为时间的未知函数。为了克服第一点，我们将利用碰撞时两物体的位置

本译文于1987年6月30日收到

几乎没有改变这一事实，为此，在推导时，令$t_c/T\to 0$。为了克服第二点，我们将把直到t时刻为止的法向冲量作为独立变量来代替变量t。如此，我们可以从运动方程中消去法向力。

在下一节中，将推导问题的数学表达式并加以简化。在第三节中，将引出用着新变量的法向冲量并把切向冲量表为滑动方向的积分，而滑动方向将在第四节加以确定。第五节总结所得到的理论，这些理论在一些特殊例子中的应用将在第六节进行。

一些趣味的摩擦碰撞问题已在Klmister和Reeve的力学教科书（1966）中讨论，然而，其中一个例子的分析是错误的。

二、数学描述

让我们考虑分别标记为$j=1$和$j=2$的两个刚体，它们在$t'=0$时刻发生碰撞。因此，它们的质心速度U_j和角速度Ω_j将从碰撞前的U_j^-和Ω_j^-不连续地变为碰撞后的U_j^+和Ω_j^+。碰撞理论的目标就是要决定阶跃$[U_j]=U_j^+-U_j^-$ $[\Omega_j]=\Omega_j^+-\Omega_j^-$。为此，我们记碰撞中通过接触点作用于物体j的接触力为$((-1)^j/t_c)F(t'/t_c)$。这个接触力从$t'=0$开始，到$t'=t_c$结束。因子$(-1)^j$保证了物体之间的相互作用力大小相等，方向相反，而因子$1/t_c$使得这些作用力大得足以在碰撞中产生有意义的效果。

碰撞过程中，接触力与物体的速度有关，因此有必要来分析它们。为此记M_j、J_j分别为物体j的质量和绕质心的转动惯量张量。$F_j^e(t'/T)$、$G_j^e(t'/T)$为作用于物体j之质心的外力及外力矩。此处T为外力及外力矩的时变范围。于是，运动方程是

$$M_j\frac{dU_j}{dt'}=\frac{(-1)^j}{t_c}F\left(\frac{t'}{t_c}\right)+F_j^e\left(\frac{t'}{T}\right), \tag{2·1}$$

$$\frac{d(J_j\Omega_j)}{dt'}=\frac{(-1)^j}{t_c}R_j\left(\frac{t'}{T}\right)\times F\left(\frac{t'}{t_c}\right)+G_j^e\left(\frac{t'}{T}\right),\quad j=1,2 \tag{2·2}$$

(2·2)中，$R_j(t'/T)$为物体j之质心到接触点的矢量。

碰撞的概念是基于$\varepsilon=t_c/T$为小量这一假定。为研究碰撞过程中的运动，我们引入新的无量纲时间变量$t=t'/t_c$，并把(2·1)(2·2)改写为

$$M_j\frac{dU_j}{dt}=(-1)^jF(t)+\varepsilon TF_j^e(\varepsilon t) \tag{2·3}$$

$$\frac{d(J_j\Omega_j)}{dt}=(-1)^jR_j(\varepsilon t)\times F(t)+\varepsilon TG_j^e(\varepsilon t) \tag{2·4}$$

量$U_j(t,\varepsilon)$，$\Omega_j(t,\varepsilon)$，$J_j(\varepsilon t,\varepsilon)$和$R_j(\varepsilon t,\varepsilon)$与ε和t有关。我们假定当$\varepsilon\to 0$时，这些量均具有极限。因此，在(2·3)、(2·4)中让$\varepsilon\to 0$，我们将得到关于这些极限的方程：

$$M_j\frac{dU_j}{dt}=(-1)^jF(t) \tag{2·5}$$

$$J_j(0)\frac{d\Omega_i}{dt}=(-1)^j R_j(0)\times F(t) \tag{2·6}$$

我们看到(2·6)中$J_j(0)$和$R_j(0)$是常量，我们把它们分别记为J_j和R_j。(2·5)、(2·6)中并不出现外力和外力矩，而这仅仅在碰撞时才成立。因为$t=t'/tc$在$t'=0$时变为零，因此，初始条件是

$$U_j(0)=U_j^-\ ,\quad \Omega_j(0)=\Omega_j^- \tag{2·7}$$

当$t'=tc$时，$t=1$，故碰撞后的U_j^+和Ω_j^+由

$$U_j^+=U_j(1),\quad \Omega_j^+=\Omega_j(1) \tag{2·8}$$

给出。于是，从$t=0$到$t=1$积分(2·5)、(2·6)并利用(2·7)和(2·8)，我们得到碰撞过程中U_j和Ω_j的阶跃是

$$[U_j]=(-1)^j M_j^{-1} I \tag{2·9}$$

$$[\Omega_j]=(-1)^j J_j^{-1}(R_j\times I) \tag{2·10}$$

此处I定义为

$$I=\int_0^t F(t)dt \tag{2·11}$$

三、I 的 确 定

为了求出I，我们记n为两物体接触点处指向物体 2 的单位法向量。在极限状态 $\varepsilon=0$ 情况下，n与t无关。然后我们记$N(t)=n\cdot F(t)$为F的法向分量。于是N(t)从0到t的积分给出直到t时刻为止的作用于物体 2 的冲量之法向分量，记为$\tau(t)$，即

$$\tau(t)=\int_0^t N(s)ds \tag{3·1}$$

我们可以用τ来重新表达Poisson的碰撞理论。首先，我们记u(t)为两物体在接触点处的相对速度，即

$$u(t)=U_2+\Omega_2\times R_2-(U_1+\Omega_1\times R_1) \tag{3·2}$$

然后我们设t_0为使$u_N(t)=n\cdot u(t)$变为零的时间，即

$$u_N(t_0)=0 \tag{3·3}$$

则从$t=0$到$t=t_0$这一阶段为碰撞的压缩阶段，这一阶段中，作用于物体2的法向冲量为$\tau(t_0)$。下一阶段，即从$t=t_0$到$t=1$是恢复阶段，其间作用于物体 2 的法向冲量是 $\tau(1)-\tau(t_0)$，Poisson 的理论指出后一阶段的法向冲量是前一阶段的法向冲量的 e 倍，即 $\tau(1)-\tau(t_0)=e\tau(t_0)$，此处e为恢复系数。于是

$$\tau(1)=(1+e)\tau(t_0) \tag{3·4}$$

因为$n\cdot I=\tau(1)$，由(3·4)可决定I的法向分量。

接触力的切向部分是由于摩擦产生的。当两物体相对滑动时，它正比法向力N，于是我们可以写

$$F(t)=N(t)\left[n+f(t)\right],\quad n\cdot f(t)=0 \tag{3·5}$$

其中切向量f(t)由摩擦定律给出。当N≥0时：

$$\begin{aligned} &f=-\mu\widehat{u_T},\quad \text{如果}u_T\neq 0,\\ &|f|\leqslant\mu,\quad \text{如果}u_T=0\end{aligned} \tag{3·6}$$

此处μ为滑动摩擦系数，u_T为$u(t)$的切向分量，$\widehat{u_T}$为沿u_T方向的单位矢量，即

$$u_T=u-(u\cdot n)n;\quad \widehat{u_T}=\frac{u_T}{|u_T|},\quad u_T\neq 0 \tag{3·7}$$

将(3·5)中的f换成$-\mu\widehat{u_T}$后再代入(2·11)。因为如(3·1)所示，$N(t)dt=d\tau$，我们把τ作为积分变量并把$\widehat{u_T}$写成τ的函数，又记$\tau_0=\tau(t_0)$，如此我们得到

$$I=\tau(1)\,n-\mu\int_0^{\tau(1)}\widehat{u_T}(\tau)d\tau=(1+e)\,\tau_0 n-\mu\int_0^{(1+e)\tau_0}\widehat{u_T}(\tau)d\tau \tag{3·8}$$

最后，把(3·8)代入(2·9)和(2·10)得到

$$[U_j]=(-1)^j M_j^{-1}\left\{(1+e)\,\tau_0 n-\mu\int_0^{(1+e)\tau_0}\widehat{u_T}(\tau)\,d\tau\right\} \tag{3·9}$$

$$[\Omega_j]=(-1)^j J_j^{-1}\left(R_j\times\left\{(1+e)\tau_0 n-\mu\int_0^{(1+e)\tau_0}\widehat{u_T}(\tau)d\tau\right\}\right) \tag{3·10}$$

四、滑动方向$\widehat{u_T}(\tau)$

(3·9)和(3·10)包含了滑动方向$\widehat{u_T}(\tau)$和在压缩阶段传递的法向冲量τ_0。为确定它们，我们对(3·2)求导并利用(2·5)和(2·6)得

$$\frac{du}{dt}=\sum_{j=1}^{2}\left\{M_j^{-1}F+(J_j^{-1}[R_j\times F])\times R_j\right\} \tag{4·1}$$

其次，把(3·5)代入(4·1)并用N去除得：

$$\frac{1}{N(t)}\cdot\frac{du}{dt}=\sum_{j=1}^{2}\left\{M_j^{-1}(n+f)+(J_j^{-1}[R_j\times(n+f)])\times R_j\right\} \tag{4·2}$$

由(3·1)知$N^{-1}d/dt=d/d\tau$，在(4·2)中将τ作为新的独立变量代替t，得

$$\frac{du}{dt}=\sum_{j=1}^{2}\left\{M_j^{-1}(n+f)+(J_j^{-1}[R_j\times(n+f)])\times R_j\right\} \tag{4·3}$$

把(2·7)代入(3·2)并注意$t=0$对应于$\tau=0$，我们可得$u(\tau)$的初值为

$$u(0)=\bar{U}_2+\bar{\Omega}_2\times R_2-\bar{U}_1-\bar{\Omega}_1\times R_1 \tag{4·4}$$

为求解(4·3)我们把它分解为法向和切向两部分。为此，分别用$n\cdot$和$(1-nn\cdot)$去乘(4·3)得：

$$\frac{du_N}{d\tau}=M_1^{-1}+M_2^{-1}+\sum_{j=1}^{2}n\cdot\left\{(J_j^{-1}[R_j\times(n+f)])\times R_j\right\} \tag{4·5}$$

$$\frac{du_T}{d\tau}=\sum_{j=1}^{2}\left\{M_j^{-1}f+(1-nn\cdot)(J_j^{-1}[R_j\times(n+f)])\times R_j\right\} \tag{4·6}$$

初始值$u_N(0)$和$u_T(0)$则是(4·4)右边的法向和切向部分。

当$u_T(\tau)\neq0$，由(3·6)知$f=-\mu\widehat{u_T}$。由此并对(4·5)以0到τ积分，我们得到

$$u_N(\tau)=u_N(0)+(M_1^{-1}+M_2^{-1})\tau$$

$$+\sum_{j=1}^{2}n\cdot\left\{(J_j^{-1}[R_j\times(n\tau-\mu\int_0^{\tau}\widehat{u_T}(\tau')d\tau')])\times R_j\right\} \tag{4·7}$$

将(4·7)代入(3·3)我们得到确定$\tau_0=\tau(t_0)$的方程如下：

$$\left(M_1^{-1}+M_2^{-1}\right)\tau_0+\sum_{j=1}^{2}n\cdot\left\{(J_j^{-1}[R_j\times(n\tau_0-\mu\int_0^{\tau_0}\widehat{u_T}(\tau')d\tau')])\times R_j\right\}$$

$$=-u_N(0) \tag{4·8}$$

其次在(4·6)中令$f=-\mu\widehat{u_T}$得

$$\frac{du_T}{d\tau}=-\mu(M_1^{-1}+M_2^{-1})\widehat{u_T}(\tau)$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(1-nn\cdot)\left\{(J_j^{-1}[R_j\times(n-\mu\widehat{u_T})])\times R_j\right\} \tag{4·9}$$

由(4·4)我们得到其初始条件为

$$u_T(0)=(1-nn\cdot)(\bar{U}_2+\bar{\Omega}_2\times R_2-\bar{U}_1-\bar{\Omega}_1\times R_1) \tag{4·10}$$

由(4·9)(4·10)即可决定$\widehat{u_T}(\tau)$，$0\leqslant\tau\leqslant(1+e)\tau_0$

为求解(4·9)我们引进常向量a和2×2常矩阵B，它们定义为

$$a=\sum_{j=1}^{2}(1-nn\cdot)\left\{(J_j^{-1}[R_j\times n])\times R_j\right\} \tag{4·11}$$

$$B\widehat{u_T}=-\mu(M_1^{-1}+M_2^{-1})\widehat{u_T}+\mu\sum_{j=1}^{2}(1-nn\cdot)\left\{R_j\times(J_j^{-1}[R_j\times\widehat{u_T}])\right\} \tag{4·12}$$

则(4·9)具如下形式

$$\frac{du_T}{d\tau}=a+B\frac{u_T}{|u_T|} \tag{4·13}$$

其次我们记$u_T=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$，此处$\rho=|u_T|$，$\theta$是碰撞点处切平面内的一个角度。如此，我们可以把(4·13)改写为

$$\frac{d\rho}{d\tau}=a_1\cos\theta+a_2\sin\theta+B_{11}\cos^2\theta+)B_{12}+B_{21})\sin\theta\cos\theta$$

$$+B_{22}\sin^2\theta\equiv g(\theta), \tag{4·14}$$

$$\rho\frac{d\theta}{d\tau}=-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta-(B_{11}-B_{22})\sin\theta\cos\theta-B_{12}\sin^2\theta$$

$$+B_{21}\cos^2\theta\equiv h(\theta) \tag{4·15}$$

从上述两个方程中消去ρ，我们得到关于θ的方程，其解是

$$\tau=\rho(0)\int_{\theta(0)}^{\theta}\frac{1}{h(\theta')}\ \mathrm{EXP}\left(\int_{\theta(0)}^{\theta'}g(\theta'')/h(\theta'')d\theta''\right)d\theta' \tag{4·16}$$

于是我们求出

$$\rho(\tau)=\rho(0)\mathrm{EXP}\left(\int_{\theta(0)}^{\theta(\tau)}g(\theta')/h(\theta')d\theta'\right) \tag{4·17}$$

解(4·16)和(4·17)决定了$\theta(\tau)$和$\rho(\tau)$，因而也就决定了$u_T(\tau)$。它们在$h(\theta(0))\neq0$时是有效的，而在$h(\theta(0))=0$时积分将发散。在后一情况下，$\theta(\tau)=\theta(0)$，ρ随τ线性增加，这将在第六节中看到。

只要$u_T(\tau)$不为零，上述结果就成立。如果存在τ^*，$\tau(1)\geqslant\tau^*\geqslant0$，使$u_T(\tau^*)=0$，我们必须检查当$\tau\geqslant\tau^*$时，$u_T(\tau)$是否仍然为零。为此，我们在(4·6)中令$du_T/d\tau=0$并求出 f 。如果f满足(3·6)，即如果$|f|\leqslant\mu$，则对$\tau\geqslant\tau^*$,$u_T(\tau)$将保持为零且f保持为常量,这时，在前述方程(3·8)—(3·10)中我们必须用

$$\mu\int_0^{\tau^*}\hat{u}_T(\tau)d\tau+[(1+e)\tau_0-\tau^*]\ f\text{来代替}\ \mu\int_0^{(1+e)\tau_0}\hat{u}_T(\tau)d\tau. \tag{4·18}$$

如果$\tau^*<\tau_0$,则(4·8)也要作相应的变化。

五、理 论 总 结

现在我们可以总结我们的理论如下：

(1)．由(4·16)和(4·17)计算滑动速度$u_T(\tau)$，$0\leqslant\tau\leqslant(1+e)\tau_0$，$\tau_0$为(4·8)的解。

(2)．由(3·9)和(3·10)计算阶跃 $[U_i]$ 和 $[\Omega_i]$ 。

(3)．如果$u_T(\tau^*)=0$，利用前一段所指出的方法检查是否当$\tau>\tau^*$时，$u_T(\tau)$仍然为零。如果u_T确实保持为零，则在速度阶跃的表达式中作替换(4·8)。如果$\tau^*<\tau_0$，则（4·8）也要

作相应的变化。

上述理论包括两个材料常数：恢复系数e和摩擦系数μ。应用该理论的主要困难在于计算u_T。下面我们要说明在一些特殊情况下，如何应用该理论。

六、应　　用

(a)　滑动方向不变的情形　　假设由(4·9)和(4·10)推出

$$\frac{du_T(0)}{d\tau}\ 平行于\ u_T(0) \tag{6·1}$$

则直到$\tau=\tau^*$使$u_T(\tau)$为零为止，$u_T(\tau)$将保持与$u_T(0)$平行，滑动方向$\widehat{u_T}(\tau)$将保持不变。于是，(4·9)的解是

$$u_T(\tau)=u_T(0)+\tau\frac{du_T(0)}{d\tau},\qquad 0\leqslant\tau\leqslant\tau^* \tag{6·2}$$

而由(4·7)得到如下简单的结果

$$u_N(\tau)=u_N(0)+\tau\frac{du_N(0)}{d\tau},\qquad 0\leqslant\tau\leqslant\tau^* \tag{6·3}$$

只要$\tau^*\geqslant\tau_0$，我们便可利用(6·3)，由(3·3)解出τ_0：

$$\tau_0=-\frac{u_N(0)}{du_N(0)/d\tau},\qquad \tau_0\leqslant\tau^* \tag{6·4}$$

为求出τ^*，我们在(6·2)中令$u_T(\tau^*)=0$，再两边乘以$u_T(0)$后解出

$$\tau^*=-u_T^2(0)/u_T(0)\cdot du_T(0)/d\tau \tag{6·5}$$

如果$\tau^*>(1+e)\tau_0$，则在碰撞过程中u_T不为零，(3·9)(3·10)简化为

$$[U_i]=-(-1)^i M_i^{-1}(1+e)\frac{u_N(0)}{du_N(0)/d\tau}(n-\mu\widehat{u_T}(0)) \tag{6·6}$$

$$[\Omega_i]=-(-1)^i(1+e)\frac{u_N(0)}{du_N(0)/d\tau}J_i^{-1}[R_i\times(n-\mu\widehat{u_T}(0))] \tag{6·7}$$

因为(6·6)的右边等于$(-1)^iM^{-1}{}_iI$(由(2·9))，故我们可以看出，摩擦冲量的大小等于法向冲量的μ倍，这与Whittaker的理论相吻合。

(b)　滑动方向改变一次的情形　　让我们设(6·1)—(6·5)成立，但

$$\tau_0\leqslant\tau^*\leqslant(1+e)\tau_0 \tag{6·8}$$

则当$\tau>\tau^*$时，$du_T/d\tau$和$\widehat{u_T}$将分别为常量$du_T(\tau^*+)$和$\widehat{u_T}(\tau^*+)$。利用$\widehat{u_T}(\tau^*+)$平行于$du_T(\tau^*)/d\tau$这一事实，由(4·9)即可求出它们，然后，由(3·8)得：

$$I=(1+e)\tau_0 n-\mu\tau^*\widehat{u_T}(0)-\mu[(1+e)\tau_0-\tau^*]\widehat{u_T}(\tau^*+) \tag{6·9}$$

将此代入(2·9)和(2·10)即可得到$[U_i]$和$[\Omega_i]$。

在刚性摆撞击固定表面的特殊情况下，由于法向和切向相对速度同时变为零，故我们有$\tau^*=\tau_0$。而且，由于在τ^*处切向相对速度逆转它的方向，故有$\widehat{u_T}(\tau^*+)=-\widehat{u_T}(0)$。于是

(6•9)成为

$$I=(1+e)\tau_0 n-(1-e)\mu\tau_0\widehat{u_T}(0) \tag{6•10}$$

在这种情况下，摩擦冲量的大小等于法向冲量大小的$\mu(1-e)/(1+e)$倍，该值小于比率μ。只有在整个碰撞中滑动方向保持不变的情况下，摩擦冲量与法向冲量的比值才为μ。

参 考 文 献

1. Kane,T. R. , 1984, "A Dynamics Puzzle" , Stanford Mechanics Alumni Club Newsletter,P.6.
2. Kilmister, C. W. , and Reeve J. E. , 1966, Rational Mechanics, Longsmans London.
3. Whittaker,E.T.,1904,A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles, and Rigid Bodies,Camberidge,P.232.

译自Journal of Applied Mechanics,Trans.of ASME,MARCH 1986,Vol.53/1--4

该文对理力教学有参考意义，故译出。