

关于“Q型微积分学”的设想

刘 诗 俊

(基础课部数学教研室)

摘 要

本文以“时、空量子化”观点为指导,提出一套数学方案,称为“量子型微积分学”(简称“Q型微积分学”)。并以Q型方程为主要工具,在力学、电学和其它领域中得出若干新公式和新规律。

对数学按新观点作了一番重新组织。出于理论的需要改革了几个旧术语,引进了一些新定义。

改造旧框架的目的是为了更好地描述实际问题。作者认为“Q型微积分”比经典微积分更合理,也更简单。

一 引 言

我们提出“Q型微积分学”的主要根据有二。第一个根据是:在自然科学的各分支中,人们对空间和时间变量 (x, y, z, t) 的理解和运用都应当有最小单位 (L_x, L_y, L_z, L_t) 在不同的学科中它们可以取不同的值。以热力学中的温度场为例。由于温度 T 是分子平均动能的量度,所以空间中某点的温度是没有定义的。当 $|\Delta x| \geq L_x$ (此 L_x 应当比分子直径大许多)时, $\Delta T / \Delta x$ 是有定义的,但 $\partial T / \partial x$ 就无意义了。第二个根据是:当代物理学中无数的事实似乎都指向一个结论,那就是空间与时间都应当量子化。由此可见,用微分方程来描述和解决实际问题,其误差(指微分方程的精确解的误差)是相当可观的!而适当尺寸的差分方程的解,应当比微分方程的解更精确。

二、Q型微分学(一元)

1, 一元函数的定义域

我们只考虑函数 $Y = f(x)$ 。其定义域

$$Df \subset \{\tau : \tau = iL\} \quad i \in Z \text{ (整数集)}$$

$L > 0$ 为最小线元(L 可称为空间量子)

函数 f 的值域 $Rf \subset C$ (实数集)。我们称这种函数为“半Q型函数”。

2, Q导数

本文于1988年3月10日收到

1) Q导数定义

定义1.1 对于 $Y=f(x)$, 取

$$f_{+}^{(1)}(x) = \frac{f(x+L) - f(x)}{L} \quad (1.1)$$

$$f_{-}^{(1)}(x) = \frac{f(x) - f(x-L)}{L} \quad (1.2)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x+L) - f(x-L)}{2L} \quad (1.3)$$

分别称之为函数 $y=f(x)$ 的右Q导数、左Q导数及Q导数（在本文中，在不致于引起混乱的情况下，就称之为右导数，左导数和导数）。

实际上，这三式就是差商，但它们是新方案的基础，不得不冠以新的名称。

2) 求导法则

直接根据导数定义，得到如下法则

I) 关于求Q导数的法则

$$[U(x) \pm V(x)]^{(1)} = U^{(1)}(x) \pm V^{(1)}(x) \quad (1.4)$$

$$[U(x) V(x)]^{(1)} = U(x+L)V^{(1)}(x) + V(x-L)U^{(1)}(x) \quad (1.5)$$

$$= V(x+L)U^{(1)}(x) + U(x-L)V^{(1)}(x) \quad (1.6)$$

$$\left[\frac{U(x)}{V(x)} \right]^{(1)} = \frac{V(x-L)U^{(1)}(x) - U(x-L)V^{(1)}(x)}{V(x+L)V(x-L)} \quad (1.7)$$

II) 关于求右Q导数的法则

$$[U(x) \pm V(x)]_{+}^{(1)} = U_{+}^{(1)}(x) \pm V_{+}^{(1)}(x) \quad (1.8)$$

$$[U(x) V(x)]_{+}^{(1)} = U(x+L)V_{+}^{(1)}(x) + V(x)U_{+}^{(1)}(x) \quad (1.9)$$

$$\left[\frac{U(x)}{V(x)} \right]_{+}^{(1)} = \frac{V(x)U_{+}^{(1)}(x) - U(x)V_{+}^{(1)}(x)}{V(x+L)V(x)} \quad (1.10)$$

III) 求左Q导数法则

$$[U(x) \pm V(x)]_{-}^{(1)} = U_{-}^{(1)}(x) \pm V_{-}^{(1)}(x) \quad (1.11)$$

$$[U(x) V(x)]_{-}^{(1)} = U(x)V_{-}^{(1)}(x) + V(x-L)U_{-}^{(1)}(x) \quad (1.12)$$

$$\left[\frac{U(x)}{V(x)} \right]_{-}^{(1)} = \frac{V(x-L)U_{-}^{(1)}(x) - U(x-L)V_{-}^{(1)}(x)}{V(x)V(x-L)} \quad (1.13)$$

3) 导数表

根据导数定义及求导法则，可求出任何半Q型函数的导数。现将几个常用函数的导数列

成下表

I) Q导数表

$$\textcircled{1} \quad C^{\textcircled{1}} = 0 \quad (1.14)$$

$$\textcircled{2} \quad (ax)^{\textcircled{1}} = a \quad (1.15)$$

$$\textcircled{3} \quad (x^2)^{\textcircled{1}} = 2x \quad (1.16)$$

$$(x^3)^{\textcircled{1}} = 3x^2 + L^2 \quad (1.17)$$

$$(x^{-1})^{\textcircled{1}} = \frac{-1}{x^2 - L^2} \quad (1.18)$$

$$(\sin ax)^{\textcircled{1}} = \frac{\sin aL}{L} \cdot \cos ax \quad (1.19)$$

$$(\cos ax)^{\textcircled{1}} = -\frac{\sin aL}{L} \cdot \sin ax \quad (1.20)$$

$$(\operatorname{tg} ax)^{\textcircled{1}} = \frac{\sin 2aL}{2L} \cdot \frac{1}{\cos a(x+L) \cdot \cos aL(x-L)} \quad (1.21)$$

$$(\operatorname{ctg} ax)^{\textcircled{1}} = -\frac{\sin 2aL}{2L} \cdot \frac{1}{\sin a(x+L) \cdot \sin aL(x-L)} \quad (1.22)$$

$$(b^{ax})^{\textcircled{1}} = \frac{b^{aL} - b^{-aL}}{2L} b^{ax} \quad (1.23)$$

$$(e^{ax})^{\textcircled{1}} = \frac{\operatorname{sh} aL}{L} e^{ax}$$

$$(\log_b ax)^{\textcircled{1}} = \frac{1}{2L} \log_b \frac{x+L}{x-L} \quad (1.24)$$

$$(\ln ax)^{\textcircled{1}} = \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{x+L}{x-L} \right) \quad (1.25)$$

$$(\operatorname{sh} ax)^{\textcircled{1}} = \frac{\operatorname{sh}(aL)}{L} \operatorname{ch} ax \quad (1.26)$$

$$(\operatorname{ch} ax)^{\textcircled{1}} = \frac{\operatorname{sh}(aL)}{L} \operatorname{sh} ax \quad (1.27)$$

II) 右Q导数表

$$C_+^{(1)} = 0 \quad (1.14')$$

$$(ax)_+^{(1)} = a \quad (1.15')$$

$$(x^2)_+^{(1)} = 2x + L \quad (1.16')$$

$$(x^3)_+^{(1)} = 3x^2 + 3xL \quad (1.17')$$

$$(x^{-1})_+^{(1)} = \frac{-1}{x(x+L)} \quad (1.18')$$

$$(\sin ax)_+^{(1)} = \frac{2}{L} \sin \frac{aL}{2} \cos (ax + aL/2) \quad (1.19')$$

$$(\cos ax)_+^{(1)} = -\frac{2}{L} \sin \frac{aL}{2} \sin (ax + aL/2) \quad (1.20')$$

$$(\operatorname{tg} ax)_+^{(1)} = \frac{\sin aL}{L} \cdot \frac{1}{\cos ax \cdot \cos a(x+L)} \quad (1.21')$$

$$(\operatorname{ctg} ax)_+^{(1)} = -\frac{\sin aL}{L} \cdot \frac{1}{\sin ax \cdot \sin a(x+L)} \quad (1.22')$$

$$(b^{ax})_+^{(1)} = \frac{b^{aL}-1}{L} b^{ax} \quad (1.23')$$

$$(e^{ax})_+^{(1)} = \frac{e^{aL}-1}{L} e^{ax} \quad (1.24')$$

$$(\ln ax)_+^{(1)} = \frac{1}{L} \ln (1+L/x) \quad (1.25')$$

III) 左Q导数表 (略)

4) 高阶Q导数

用递归方法定义 $y = f(x)$ 的 n 阶Q导数如下:

$$\text{定义 1, 2 } f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))_+^{(1)} \quad (\text{注}) \quad (1.28)$$

$$f_+^{(n)}(x) = (f_+^{(n-1)}(x))_+^{(1)}$$

$$f_-^{(n)}(x) = (f_-^{(n-1)}(x))_-^{(1)} \quad (1.30)$$

由定义可直接得到

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{(2L)^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i f(x + (n-2i)L) \quad (1.31)$$

注 为了排写方便, 我们规定 $f^{(1)}(x) = f^{(1)}(x)$, $f_+^{(1)}(x) = f_+^{(1)}(x)$, $f_-^{(1)}(x) = f_-^{(1)}(x)$ 。

更高阶的Q导数也如此。

5) 将函数按各阶导数展开

我们得到如下公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x - (k+2)L)(2L)^k + (2L)^{n+1} f^{(n+1)}(x - (n+1)L) \quad (1.32)$$

此式对任何正整数 n 成立。对 $f(x)$ 没有任何特别的要求,只要 $f(x)$ 当 $x=iL$ (i 为任何整数)时有定义。(注)

例 对于 $f(x) = x^2$, 有

$$f^{(1)}(x-3L) = 2(x-3L)$$

$$f^{(2)}(x-4L) = 2$$

$$f^{(3)}(x) = 0 = f^{(4)}(x) = \dots$$

于是由(1.32)式, 得

$$x^2 = (x-2L)^2 + 4L(x-3L) + 8L$$

6) Q微分中值定理

由Q导数定义立刻看出

$$f(x+L) - f(x-L) = f^{(1)}(x) \cdot 2L \quad (x=iL)$$

这就是一个中值定理,且 x 恰好是 $[x-L, x+L]$ 的中点。但对一般区间,却没有这样好的结果。我们只得到如下定理。

定理1.1 在区间 $[a, b]$ 上, 有

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f^{(1)}(x_i) (b-a) \quad (1.33)$$

$$\text{在此, } a = jL, \quad b = iL, \quad \frac{i-j}{2} = m, \quad x_i = a + (2i-1)L$$

证: 显然有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m f^{(1)}(x_i) 2L &= \sum_{i=1}^m (f(x_i+L) - f(x_i-L)) \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{b-a}{2L} = m, \text{ 所以 (1.33) 成立。}$$

注 规定 $f^{(0)}(x) = f(x)$

7) 函数的极值

定义1,3 若 $f(x_0 \pm L) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值 $f(x_0)$ 。

若 $f(x_0 \pm L) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值。

引理1,1 1) 若 $f_+^{(1)}(x_0) \cdot f_-^{(1)}(x_0) \leq 0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值。这时,

当 $f_-^{(1)}(x_0) > 0$ 时 $f(x_0)$ 为极大值。当 $f_+^{(1)}(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值。

2) 若 $f_+^{(1)}(x_0) \cdot f_-^{(1)}(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

此引理的证明是显而易见的, 故从略。

推论1: $f(x_0)$ 为极值的充要条件是

$$f_+^{(1)}(x_0) \cdot f_-^{(1)}(x_0) \leq 0$$

推论2: 若 $f^{(1)}(x_0) = 0$, 则 $f(x_0)$ 是极值。

证: 由 (1.1)、(1.2) 及 (1.3) 可见

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{2} (f_+^{(1)}(x_0) + f_-^{(1)}(x_0))$$

于是

$$f_+^{(1)}(x_0) + f_-^{(1)}(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f_+^{(1)}(x_0) \cdot f_-^{(1)}(x_0) \leq 0$$

所以 $f(x_0)$ 是极值。

例 求函数 $f(x) = x^2$ 的极值 ($x = iL, i \in \mathbb{Z}$)

解: 因为 $f_+^{(1)}(x) = 2x + L$ (参看 (1.16') 式)

$$f_-^{(1)}(x) = 2x - L$$

根据引理1.1的推论1, $f(x)$ 为极值的充要条件是

$$(2x + L)(2x - L) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

但 $x = iL$, 所以 $x = 0$ 是 $f(x) = x^2$ 的唯一极点。极值为 $f(0) = 0$

三、Q型积分学 (一元)

1, Q型原函数

定义2.1 若 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的右Q导函数, 即

$$F_+^{(Q)}(x) = f(x) \quad (2.1)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的“右Q原函数”。

定义2.2 若 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的左Q导函数, 即

$$F_-^{(Q)}(x) = f(x) \quad (2.2)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的“左Q原函数”。

定义2.3 若 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的Q导函数, 即

$$F^{(Q)}(x) = f(x) \quad (2.3)$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的“Q原函数”。

定理2.1 任何函数 $f(x)$, 只要它在 $Q_1 = \{x | x = iL\} (i \in \mathbb{Z})$ 上有定义, 它都有Q原函数, 而且有无穷个。它们在 $[0, \infty)$ 上均可表为

$$F(x) = \begin{cases} 2L \sum_{i=0}^k f(2iL) + C_1 & (\text{当 } x = (2k+1)L) \\ 2L \sum_{i=0}^{k-1} f((2i+1)L) + C_2 & (\text{当 } x = 2kL) \end{cases} \quad (2.4)$$

证: 1) 可直接验证由 (2.4) 表示的函数 $F(x)$ 满足 (2.3) 式。事实上:

$$\begin{aligned} F^{(Q)}(2kL) &= \frac{F((2k+1)L) - F((2k-1)L)}{2L} \\ &= f(2kL) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} F^{(Q)}((2k+1)L) &= \frac{F(2(k+1)L) - F(2kL)}{2L} \\ &= f((2k+1)L) \end{aligned}$$

所以

$$F^{(Q)}(x) = f(x)$$

2) 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个Q原函数, 则

$$(P(x) - F(x))' = 0$$

令 $P(x) - F(x) = \varphi(x)$, 则 $\varphi^{(i)}(x) = 0$
于是

$$\varphi(x+L) = \varphi(x-L)$$

但 $x = iL$, 所以

$$\varphi((i+1)L) = \varphi((i-1)L)$$

所以

$$\varphi((2k+1)L) = \varphi((2k-1)L) = \dots = C_3$$

$$\varphi(2kL) = \varphi(2(k-1)L) = \dots = C_4$$

可见 $P(x)$ 可用 (2.4) 式表示。证毕。

现在引入记号

$$C^* = \begin{cases} C_1 & \text{当 } x = (2k+1)L \\ C_2 & \text{当 } x = 2kL \end{cases}$$

显然, 若 $F_1(x)$ 是 $f(x)$ 的任一 Q 原函数, 则 $f(x)$ 的 Q 原函数一般表达式是

$$F_1(x) + C^*$$

仿此, 可以证明 $f(x)$ 的右 Q 原函数及左 Q 原函数的一般表达式在 $[0, \infty)$ 分别是 (2.5) 及 (2.6)。即:

$$F(x) = L \sum_{i=0}^{k-1} f(iL) + C \quad (\text{当 } x = kL) \quad (2.5)$$

和

$$F(x) = L \sum_{i=0}^k f(iL) + C \quad (\text{当 } x = kL) \quad (2.6)$$

2. Q 型定积分

为了方便, 仍设 $f(x)$ 在 $Q_1 = \{x \mid x = iL\}$ ($i \in \mathbb{Z}$) 有定义。

定义2.4 对区间 $[A, B]$ ($A < B$, A 与 B 均实数) 取

$$(\text{sgn} A) \cdot \left[\frac{|A|}{2L} \right] \cdot 2L = a$$

$$(\text{sgn} B) \cdot \left[\frac{|B|}{2L} \right] \cdot 2L = b \quad ([\cdot] \text{ 表示 } \cdot \text{ 的整数部分})$$

1) 若 $a < b$, 则 $b - a \geq 2L$ 。取分点

$$x_i = a + 2iL, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (m = (b - a) / 2L)$$

得到 m 个长度为 $\Delta x_i = 2L$ 的子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 。取每个子区间的中点

$$\xi_i = a + (2i+1)L \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i=0, 1, \dots, m-1)$$

把有限和 $\sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 叫做 $f(x)$ 在 $[A, B]$ (或 $[a, b]$) 上的“Q型中值定积分”,

并记为

$$\sum_A^B f(x) 2L = \sum_a^b f(x) 2L = 2L \sum_{i=0}^{m-1} f(a + (2i+1)L) \quad (2.7)$$

2) 若 $a=b$, 规定

$$\sum_A^B f(x) 2L = 0 = \sum_a^b f(x) 2L \quad (2.8)$$

定义2.5 对上述 $[A, B]$, 取

$$(\operatorname{sgn} A) \cdot \left[\frac{|A|}{L} \right] \cdot L = a$$

$$(\operatorname{sgn} B) \cdot \left[\frac{|B|}{L} \right] \cdot L = b$$

1) 若 $b>a$, 则 $b-a \geq L$. 取分点

$$x_i = a + iL, i=0, 1, \dots, m \quad (m = (b-a)/L)$$

得到 m 个长为 $\Delta x_i = L$ 的子区间 $[x_i, x_{i+1}]$. 取 $x_i = \xi_i$, 把有限和 $\sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \Delta x_i$

叫做 $f(x)$ 在 $[A, B]$ (或 $[a, b]$) 上的“Q型左端值定积分”并记为

$$\sum_{(-)}^B f(x) L = \sum_{(-)}^b f(x) L = L \sum_{i=0}^{m-1} f(a + iL) \quad (2.9)$$

2) 若 $a=b$, 规定

$$\sum_{(-)}^B f(x) L = \sum_{(-)}^b f(x) L = 0 \quad (2.10)$$

定义2.6 在定义2.5的符号之下, 仅仅改变 ξ_i 的取法。现在取 $\xi_i = x_{i+1}$ 。

当 $b>a$, 把有限和 $\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{i+1}) \Delta x_i$ 叫做 $f(x)$ 在 $[A, B]$ (或 $[a, b]$)

上的“Q型右端值定积分”, 并记为

$$\sum_{(+)}^B f(x) L = \sum_{(+)}^b f(x) L = L \sum_{i=0}^{m-1} f(a + (i+1)L) \quad (2.11)$$

当 $a=b$ 时, 规定

$$\sum_{(+)}^B f(x)L = \sum_{(+)}^b f(x)L = 0 \quad (2.12)$$

3, Q型 Newton—Leibniz公式

定理2.2 若 $F^{(1)}(x) = f(x)$, 则

$$\sum_{(+)}^B f(x)2L = \sum_{(+)}^b f(x)2L = F(b) - F(a) \quad (2.13)$$

证: 若 $b=a$, (2.13) 式显然成立。

若 $b>a$, 这时 $b-a=2mL$ ($m \geq 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{(+)}^B f(x)2L &= \sum_{(+)}^b f(x)2L = \sum_{(+)}^b F^{(1)}(x)2L = 2L \sum_{i=0}^{m-1} F^{(1)}(a + (2i+1)L) = \\ &= 2L \sum_{i=0}^{m-1} \frac{F(a + 2(i+1)L) - F(a + 2iL)}{2L} = F(a + 2mL) - F(a) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

证毕。

还可以证明两个公式, 即

1) 若 $F_{+}^{(1)}(x) = f(x)$, 则

$$\sum_{(-)}^B f(x)L = \sum_{(-)}^b f(x)L = F(b) - F(a) \quad (2.14)$$

2) 若 $F_{-}^{(1)}(x) = f(x)$, 则

$$\sum_{(+)}^B f(x)L = \sum_{(+)}^b f(x)L = F(b) - F(a) \quad (2.15)$$

(2.14) 及 (2.15) 的证明都很简单, 故略。

这样, 我们就得到三种Q型Newton—Leibniz公式。

四, Q型常微分方程

本节所说的“Q型常微分方程”实际上就是差分方程, 但本文赋予它新的意义。我们认为当 L 适当选择后, 用差分方程描述实际问题将比微分方程更精确。因此, 研究的重点应当放在这种方程上。本节将叙述Q型方程的初值问题理论, 并运用这种理论在电学、力学及其它方面推出若干(我们已得到许多这种公式, 仅择要发表几个)与经典理论不同的公式。

定义3.1 形如

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

$$F(x, y, y_{+}^{(1)}, \dots, y_{+}^{(n)}) = 0 \quad (3.2)$$

$$F(x, y, y_{-}^{(1)}, \dots, y_{-}^{(n)}) = 0 \quad (3.3)$$

之一的关系式叫做Q型n阶常分方程。

如果将 $y = f(x)$ (于是 $y^{(k)} = f^{(k)}(x)$, $y_{\pm}^{(k)} = f_{\pm}^{(k)}(x)$)代入上式某方程后,该方程变成

$$F \equiv 0 \quad (\text{当 } x = iL)$$

则称 $y = f(x)$ 是该Q型常微分方程的解。

关于Q型线性方程、Q型非线性方程等概念均类似于普通微分方程中的相应概念,兹不赘述。

在初值问题中,我们只研究方程 (3.2)

1) 关于Q型n阶微分方程初值问题的基本定理

定理3.1 Q型n阶方程初值问题 (A) 的解在 $Q_1 \cap [0, \infty)$ 存在且唯一。

$$Q_1 = \{x \mid x = iL\} \quad i \in \mathbb{Z}$$

$$(A) \begin{cases} f_{+}^{(n)}(x) = F(x, f(x), f_{+}^{(1)}(x), \dots, f_{+}^{(n-1)}(x)) & x \in Q_1 \cap [0, +\infty) \\ f_{+}^{(k)}(0) = f_k & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (\text{规定 } f_{+}^{(0)}(x) = f(x))$$

证:

由右Q导数定义 (1.1) 及高阶Q导数定义 (1.29) 直接得到

$$f_{+}^{(k)}(x) = L^{-k} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(x + (k-i)L) \right) \quad (3.4)$$

代入 (A), 得

$$f(x + nL) = L^n F(x, f(x), f_{+}^{(1)}(x), \dots, f_{+}^{(n-1)}(x)) - \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i f(x + (n-i)L) \quad (3.5)$$

令 $x = 0$, 得

$$f(nL) = L^n F(0, f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) - \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i f((n-i)L) \quad (3.6)$$

又由

$$\begin{cases} f_{+}^{(1)}(0) = \frac{f(L) - f(0)}{L} = f_1 \\ f_{+}^{(2)}(0) = \frac{f(2L) - 2f(L) + f(0)}{L^2} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} f(L) = Lf_1 + f_0 \\ f(2L) = L^2 f_2 + 2Lf_1 + f_0 \\ \dots\dots\dots \\ f(kL) = \sum_{i=0}^k C_k^{iL} f_i \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

将它们代入 (3.6), 可确定 $f(nL)$

2, Q型线性齐次方程的通解

我们来研究Q型n阶线性齐次方程

$$f_+^{(n)}(x) + P_1(x) f_+^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}(x) f_+^{(1)}(x) + P_n(x) f(x) = 0 \quad (3.7)$$

的解的性质。

显然, 它的解具有迭加性。即若 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ 都是 (3.7) 的解,

$$\text{则 } \sum_{i=1}^k C_i f_i(x) \text{ 也是 (3.7) 的解。}$$

定义3.2 对于函数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, 我们把

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_{1,+}^{(1)}(x) & f_{2,+}^{(1)}(x) & \dots & f_{n,+}^{(1)}(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_{1,+}^{(n-1)}(x) & f_{2,+}^{(n-1)}(x) & \dots & f_{n,+}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

作为这些函数的Q型Wronsky行列式 (以下简称QW)

定义3.3 如果有不全为零的常数 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 使对 $\forall x = iL \in [a, b]$ (或 $[a, +\infty)$ 或其他区间), 都有

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(x) = 0$$

则称 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 中为Q—线性相关。否则, 就称它们在 $[a, b]$ 上为Q—线性无关。

引理3.1 如果 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 为Q—线性相关, 则它们的QW恒为零。(证明甚简, 兹从略)

引理3.2 如果Q型n阶线性齐次方程 (3.7) 的解 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 为Q—线性无关, 则它们的QW在任何 $x = iL \in [a, +\infty)$ 不为零。

证：用反证法。若有 $x_0 = i_0 L \in [a, +\infty)$ ，使 $W(x_0) = 0$

令 $f_{i+}^{(k)}(x_0) = f_i^{(k)}$
作关于 C_i 的方程组

$$(B) \quad \begin{cases} C_1 f_1^0 + C_2 f_2^0 + \cdots + C_n f_n^0 = 0 \\ C_1 f_1' + C_2 f_2' + \cdots + C_n f_n' = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ C_1 f_1^{n-1} + C_2 f_2^{n-1} + \cdots + C_n f_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

因为 $W(x_0) = 0$ ，所以 (B) 有不全为零的解 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 。现在取

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$$

$$\text{则 } f(x_0) = 0 = f_{i+}^{(1)}(x_0) = \cdots = f_{i+}^{(n-1)}(x_0) \quad (3.9)$$

所以 $f(x)$ 是方程 (3.7) 在初值条件 (3.9) 之下的解。但平凡解 $\varphi \equiv 0$ 也是

$\begin{cases} (3.7) \\ (3.9) \end{cases}$ 的解。而这种解是唯一的 (参看定理 (3.1))。可见

$f(x) \equiv \varphi(x) \equiv 0$ (当 $x = iL \in [x_0, +\infty)$) 这与假设条件 $(f_1(x), \cdots, f_n(x))$ 为 Q -线性无关) 矛盾。故 $W(x)$ 恒不为零。证毕。

由以上两个引理可见， Q 型 n 阶线性齐次方程 (3.7) 的 n 个解 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 的 QW 或恒为零，或恒不为零。

引理 3.3 任何 Q 型 n 阶线性齐次方程都有 n 个 Q -线性无关的解。

证：取方程 (3.7) 的解 $f_i(x)$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 使对某个 x_0 满足

$$f_{i+}^{(k)}(x_0) = \delta_i^k \quad (\delta_i^k \text{ 为 Kronecker 符号})$$

(根据定理 3.1, 这些解都存在)。于是

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

可见 $W(x)$ 恒不为零 (当 $x = iL$)

由引理 3.1 知 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 为 Q -线性无关。

引理 3.4 若 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是方程 (3.7) 的 n 个 Q 线性无关解，

则适当取常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 可以将方程 (3.7) 的任何解表为 $\sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$ 。

证：任取方程 (3. 7) 的一个解 $f(x)$ ，于是

$$f_+^{(k)}(x_0) \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \text{ 随之确定。}$$

$$\text{又取 } \varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x) \quad \text{由}$$

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i^{(k)}(x_0) = f_+^{(k)}(x_0) \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

可唯一确定 $C_1, C_2, \dots, C_n$ (注意行列式 $W(x_0) \neq 0$) 这时，

$$\varphi_+^{(k)}(x_0) = f_+^{(k)}(x_0) \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (3.10)$$

所以 $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 都是方程 (3. 7) 的满足同样初值条件的解。由定理 3. 1 可知

$$\varphi(x) \equiv f(x)$$

证毕。

我们把方程 (3. 7) 的 Q 线性无关解 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 的线性组合表达式

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$$

叫做方程 (3. 7) 的通解。

3、 Q 型线性非齐次方程的通解

现在研究 Q 型 n 阶非线性齐次方程

$$f_+^{(n)}(x) + P_1(x) f_+^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}(x) f_+^{(1)}(x) + P_n(x) f(x) = g(x) \quad (3.11)$$

其中 $g(x) \neq 0$ (当 $x \in I$)

作出与 (3. 11) 对应的齐次方程

$$f_+^{(n)}(x) + P_1(x) f_+^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}(x) f_+^{(1)}(x) + P_n(x) f(x) = 0 \quad (3.11')$$

引理 3. 5 设 $P(x)$ 是 (3. 11) 的一个解, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 是

(3. 11') 的 n 个 Q 线性无关解, 则适当选择常数 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 可以将 (3. 11) 的任何解表

$$\text{为 } \sum_{i=1}^n C_i f_i(x) + P(x)$$

证：任取 (3. 11) 的一个解 $f(x)$ ，则

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) \text{ 满足 (3. 11')}$$

所以有 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 使

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x)$$

于是

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x) + P(x) \quad (3.12)$$

证毕,

我们把 (3.12) 称为 (3.11) 的通解。

所有这些结果及其推演几乎都是与线性微分方程理论对应的 #, 不过条件少得多, 且更容易理解。

4. Q型常系数线性方程解的表达式

本来用 (3.5) 式就可解了。但这只能求出数值解。我们对常系数方程另行求出解的表达式 (前人作过类似的工作, 见参考文献 [2])。为节省篇幅并使读者容易得到要领, 我们只叙述一阶和二阶 Q型常系数方程的通解和满足初值条件的解。对任意 n 阶常系数方程有类似结果, 只不过情况稍复杂。

1) Q型常系数齐次一阶方程

对于

$$(A_1) \quad \begin{cases} f_+^{(1)}(x) + kf(x) = 0 & k = \text{Const.} \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

设 $f(x) = Ce^{rx}$, 则

$$f_+^{(1)}(x) = C \left(\frac{e^{rL} - 1}{L} \right) e^{rx} = C R e^{rx} \quad (\text{见 (1, 24') 式}) \quad R = \frac{e^{rL} - 1}{L}$$

代入 (A_1) 中的方程, 并约去公因式, 得

$$R + K = 0 \quad (\text{特征方程})$$

可见

$$\frac{e^{rL} - 1}{L} = -k$$

$$r = (1/L) \ln(-kL + 1)$$

方程的通解为

$$f = Ce^{rx}$$

又由 $f(0) = f_0$, 得 $C = f_0$ 。故 (A_1) 的解为

$$f = f_0 \exp((x/L) \ln(-kL + 1))$$

$$= f_0 (-kL + 1)^{x/L}$$

2) Q型常系数齐次二阶方程

本节参看参考文献 [1]

对于

$$(\mathbf{A}_2) \quad \begin{cases} f_+^{(2)}(x) + a_1 f_+^{(1)}(x) + a_2 f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \quad f_+^{(1)}(0) = f_1 \end{cases}$$

仍设 $f(x) = Ce^{rx}$, 则

$$f_+^{(1)} = CRe^{rx}, \quad f_+^{(2)}(x) = CR^2 e^{rx} \quad (\text{R 见 (3.13) 式})$$

代入 $(\mathbf{A}_2)$, 得特征方程

$$R^2 + a_1 R + a_2 = 0 \quad (3.14)$$

$$\text{证 } a_1^2 - 4a_2 = \Delta$$

I) 当 $\Delta \neq 0$, 这时由 (3.14) 解出 R , 得

$$R_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad R_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.15)$$

$$\text{再由 } \left(\frac{e^{rL} - 1}{L} \right) = R, \text{ 得到}$$

$$\begin{cases} r_1 = (1/L) \ln((L/2)(-a_1 + \sqrt{\Delta}) + 1) \\ r_2 = (1/L) \ln((L/2)(-a_1 - \sqrt{\Delta}) + 1) \end{cases}$$

于是方程的通解为

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ &= C_1 ((L/2)(-a_1 + \sqrt{\Delta}) + 1)^{x/L} + C_2 ((L/2)(-a_1 - \sqrt{\Delta}) + 1)^{x/L} \end{aligned} \quad (3.16)$$

由初始条件得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = f_0 \\ C_1 R_1 + C_2 R_2 = f_1 \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix} = R_2 - R_1 = -\sqrt{\Delta} \neq 0 \quad (\text{见 (3.15) 式})$$

所以 C_1 及 C_2 唯一确定

(当 $\Delta < 0$ 时 (3, 16) 式为复数式, 可用三角式另行处理, 兹从略)

II) 当 $\Delta = 0$, 则

$$R = -\frac{a_1}{2} = \frac{e^{rL} - 1}{L}$$

$$r = \frac{1}{L} \ln \left(-\frac{L}{2} a_1 + 1 \right)$$

所以 e^{rx} 是解。现在验证 $f = e^{rx}x$ 也是解。用公式 (1. 9), 并加以改造, 得

$$\begin{aligned} [u(x) V(x)]_+^{(1)} &= u(x+L) V_+^{(1)}(x) + V(x) u_+^{(1)}(x) = u(x) V_+^{(1)}(x) \\ &+ V(x) u_+^{(1)}(x) + L(u(x+L) - u(x))/L V_+^{(1)}(x) \end{aligned}$$

所以

$$[u(x) V(x)]_+^{(1)} = u(x) V_+^{(1)} + V(x) u_+^{(1)}(x) + L u_+^{(1)}(x) V_+^{(1)}(x) \quad (3. 17)$$

现在用 (3. 17) 式求导,

$$f = e^{rx}x$$

$$f_+^{(1)} = xRe^{rx} + e^{rx} + LRe^{rx} = e^{rx}(LR + 1) + Re^{rx}x$$

$$\begin{aligned} f_+^{(2)} &= Re^{rx}(LR + 1) + R(xRe^{rx} + e^{rx} + LRe^{rx}) \\ &= 2R(1 + RL)e^{rx} + R^2e^{rx}x \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f_+^{(2)}(x) + a_1 f_+^{(1)}(x) + a_2 f(x) \\ = (2R^2L + 2R + a_1 + a_1RL) e^{rx} + (R^2 + a_1R + a_2) e^{rx}x = 0 \\ (\because R^2 + a_1R + a_2 = 0 \quad \text{且 } R = -a_1/2) \end{aligned}$$

可见 $f = xe^{rx}$ 也是解。

又 e^{rx} 和 $e^{rx}x$ 的QW为

$$\begin{vmatrix} e^{rx} & e^{rx}x \\ Re^{rx} & Re^{rx}x + e^{rx}(LR + 1) \end{vmatrix} = e^{2rx}(LR + 1) \neq 0$$

所以 e^{rx} 与 $e^{rx}x$ 是Q—线性无关解。由引理 (3. 4) 可见方程的通解是

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1 e^{rx} + C_2 e^{rx}x \\ (r &= (1/L) \ln(-L/2 a_1 + 1)) \end{aligned}$$

再由初始条件得

$$\begin{cases} C_1 = f_0 \\ C_1 R_1 + C_2 (1 + RL) = f_1 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} C_1 = f_0 \\ C_2 = \frac{f_1 - f_0 R}{1 + RL} \end{cases}$$

(A₂) 的解为

$$f(x) = f_0 e^{rx} + \frac{f_1 - f_0 R}{1 + RL} e^{rx} \quad (3.18)$$

$$r = (1/L) \ln(-(L/2)a_1 + 1)$$

$$R = -a_1/2$$

5, Q型微分方程的应用举例

我们将Q型微分方程用于力学、电学及其他领域,得到许多与经典理论不同的公式。基于时空量子化的观点,我们认为这些结果比经典结果更精确。在此略举数例,本文得到一些新公式,尚有待实验验证。

例1 放射性元素的半衰期问题

如确定放射性元素的半衰期 τ ,老办法是解微分方程

$$(B) \quad \begin{cases} m'(t) = -km(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases} \quad (m \text{ 是质量})$$

得到 $m(t) = m_0 e^{-kt}$

再由 $m(\tau) = m_0/2$, 得

$$m_0/2 = m_0 e^{-k\tau}$$

于是

$$\tau = \ln 2/k \quad (3.19)$$

现在,我们考虑Q型方程

$$(B') \quad \begin{cases} m_+^{(1)}(t) = -km(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

这就是前面讨论过的Q型常系数齐次一阶方程 (见P24A₁), (B') 的解在上文中已求得,

$$\text{即 } m_0(t) = m_0 e^{(t/L)\ln(-kL+1)}$$

再用 $m(\tau) = m_0/2$, 得

$$m_0 \exp\left((\tau/L)\ln(-kL+1)\right) = m_0/2$$

所以半衰期为

$$\tau = \frac{(-\ln 2) L}{\ln(-kL+1)} \quad (3.20)$$

这是我们得到的新公式。

取一级近似 $\ln(1-kL) \approx -kL$, 得

$$\tau \approx \frac{(-\ln 2) L}{-kL} = \frac{\ln 2}{k}$$

这就是 (3. 19) 式。

例2 为确定电阻 R_0 、自感 L_0 串联回路电路的电流 $i(t)$, 老办法是解微分方程

$$(C) \quad \begin{cases} i'(t) + i(R_0/L_0) = E_0/L_0 \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

(R_0 —电阻, L_0 —自感系数, E_0 —电动势,

它们都是常数)

(C) 的解是

$$i(t) = (i_0 - E_0/R_0) \exp(-tR_0/L_0) + E_0/R_0 \quad (3, 21)$$

现在, 我们考虑Q型方程

$$(C') \quad \begin{cases} i^{(1)}(t) + (R_0/L_0) i(t) = E_0/L_0 \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

设 $i_*(t) = C$ 代入 (C') 中的Q方程, 得

$$\frac{R_0}{L_0} C = \frac{E_0}{L_0}$$

$$\Leftrightarrow i_*(t) = E_0/R_0$$

令 $i(t) = i_*(t) + f(t)$, 代入 (C'), 得

$$(C'') \quad \begin{cases} \dot{f}_+^{(1)}(t) + (R_0/L_0)f(t) = 0 \\ f(0) = i_0 - E_0/R_0 \end{cases}$$

$$\text{设 } f(t) = Ce^{rt}$$

$$\Leftrightarrow \dot{f}_+^{(1)}(t) = CRe^{rt} \quad (R = (\frac{e^{rL} - 1}{L}))$$

$$\Leftrightarrow R + \frac{R_0}{L_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{rL} - 1}{L} = R = -\frac{R_0}{L_0}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{L} \ln(-\frac{R_0}{L_0}L + 1)$$

$$f(t) = (i_0 - \frac{E_0}{R_0}) e^{rt}$$

$$i(t) = (i_0 - \frac{E_0}{R_0}) \exp((t/L) \ln(1 - R_0 L/L_0)) + \frac{E_0}{R_0} \quad (3.22)$$

这是我们得到的新公式。

现在, 对(3.22)取近似, 用

$$\ln(1 - \frac{R_0 L}{L_0}) \approx -\frac{R_0 L}{L_0}$$

就得到经典公式(3.21)

五、牛顿力学的Q型化

牛顿三大定律仍旧是理论基础, 但是我们用平均速度代替瞬时速度, 用平均加速度代替瞬时加速度, 将Newton第二定律Q型化。由此写出物体的Q型运动方程, 得到一系列与经典Newton力学不同的公式。对Kepler第二定律进行了修正, 并对水星运动的“反常性”作了猜测。我们认为本节中涉及的问题值得进一步探讨。这些问题也许是通向自然界中新规律的窗口! 只要时间的量子化是真实的, 本节的结果就具有足够的真实性。

1、预备知识——向量的Q导数

定义4.1 对于向量 $\vec{P} = (x(t), y(t), z(t))$ $t \in Q_1$

我们定义它的三种导数如下

$$1) \quad \vec{P}^{(1)} = (x^{(1)}(t), y^{(1)}(t), z^{(1)}(t)) \quad (4.1)$$

$$2) \quad \vec{P}_+^{(1)} = (x_+^{(1)}(t), y_+^{(1)}(t), z_+^{(1)}(t)) \quad (4.2)$$

$$3) \quad \vec{P}_-^{(1)} = (x_-^{(1)}(t), y_-^{(1)}(t), z_-^{(1)}(t)) \quad (4.3)$$

注意这三种导数都是向量

2、Newton第二定律的Q型化

取定惯性系后, 质点的位置用 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 表示。我们规定速度为

$$\vec{V}(t) = \vec{r}_+^{(1)}(t) \quad (4.4)$$

加速度为

$$\vec{W}(t) = \vec{V}_+^{(1)}(t) \quad (4.5)$$

于是Newton第二定律用Q型方程

$$m \vec{r}_+^{(2)}(t) = \vec{F}(t) \quad (4.6)$$

表示 ($\vec{F}$ 为外力, m 为“质点”的质量)

3、自由落体运动的Q型化

设质点 m 在力 $F = mg$ (g 为重力加速度) 下, 作自由落体运动。给定初值条件后, 写出“质点”的Q型运动方程

$$(E) \quad \begin{cases} S_+^{(2)}(t) = g \\ S(0) = 0 \quad S_+^{(1)}(0) = V_0 \end{cases}$$

作与(E)对应的齐次方程

$$(E') \quad S_+^{(2)}(t) = 0$$

我们先求出(E')的两个解

$$S_1(t) = 1 \text{ 和 } S_2(t) = t$$

因为它们的QW

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以它们是Q—线性无关的。又 $P(x) = (1/2)gt^2$ 是非齐次方程 $S_+^{(2)}(t) = g$ 的解。根据引理3.5及(3.12)式, 我们得到

$$S_+^{(2)} = g$$

的通解

$$S(t) = C_1 + C_2 t + (1/2)gt^2$$

由初始条件得

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 + (1/2)gL = V_0 \end{cases} \quad (\text{注}_1)$$

于是我们得到Q型自由落体公式

$$S(t) = (V_0 - (1/2)gL)t + (1/2)gt^2 \quad (4.7)$$

又对(4.7)求右Q导数, 得

$$\begin{aligned} S_+(t) &= (V_0 - (1/2)gL) + (1/2)g(2t + L) = V_0 + gt, \text{ 即} \\ V &= V_0 + gt \end{aligned} \quad (4.8)$$

将我们得到的(4.7)及(4.8)式与经典力学中的公式式相比较, 可见速度公式相同, 但Q型化的距离公式多了一个 $-(1/2)gLt$ 项!

如果选取时间量子 $L = 2 \times 10^{-23}$ (秒), (注₂)那么, 若要此项的绝对值达到1mm, 必须 $t = 323569306000$ 年! 所以在普通规模的实验中, 这种“距离Q的效应”是显示不出来的!

4、动量和动能定理的Q型化

从上述Q型落体公式(4.7)看出, 有必要探讨动量和动能的Q型化问题。

将(4.6)写成

$$m \vec{V}_+^{\odot}(t) = \vec{F}(t)$$

于是

$$m \vec{V}(t+L) - m \vec{V}(t) = \vec{F}(t) \cdot L \quad (4.9)$$

将 $t = 0, L, \dots, T-L$ 依次代入(4.9)再求和, 得到

$$m \vec{V}(T) - m \vec{V}(0) = \sum_{(-)}^T \vec{F}(t)L \quad \text{注}_3 \quad (4.10)$$

又使(4.9)两端对 $\frac{\vec{V}(t+L) + \vec{V}(t)}{2}$ 求数积, 得

$$(1/2)m(V^2(t+L) - V^2(t)) = \vec{F}(t) \cdot ((\vec{V}(t+L) + \vec{V}(t))L/2) \quad (4.11)$$

注₁: $S_+^{\odot}(t) = C_2 + (1/2)g(2t + L)$

注₂: 因为基本粒子的寿命是 2×10^{-23} 秒的整数倍

注₃: 仿照(2,8), (2,9)及(2,10), 定义的向量 $\vec{F}(t)$ 的三种Q型积分 $\sum_{(-)}^a \vec{F}(t)L$

及 $\sum_{(+)}^b \vec{F}(t)L$, 兹不赘述。

($V(t) = |\vec{V}(t)|$) 将 $t=0, L, \dots, T-L$ 代入 (4.11), 并求和, 得

$$\frac{1}{2}mV^2(T) - \frac{1}{2}mV^2(0) = \sum_{(-)}^T \vec{F}(t) \cdot \frac{\vec{V}(t+L) + \vec{V}(t)}{2} L \quad (4.12)$$

如果 T 是 L 的偶数倍, 则由 (4.1), (4.2) 及 (1.1) 可见

$$\frac{\vec{V}(t+L) + \vec{V}(t)}{2} = \frac{\vec{r}(t+2L) - \vec{r}(t)}{2L} \quad (4.13)$$

令

$$\frac{\vec{r}(t+2L) - \vec{r}(t)}{2} = \vec{r}_*(t) \quad (4.14)$$

则 (4.12) 可表为

$$\frac{1}{2}mV^2(T) - \frac{1}{2}mV^2(0) = \sum_{(-)}^T \vec{F}(t) \cdot \vec{r}_*(t) L \quad (4.15)$$

我们把 $\sum_{(-)}^T \vec{F}(t) \cdot \vec{r}_*(t)$ 叫做外力 $\vec{F}(t)$ 在 $[0, T]$ 对“质点”作的 Q 型功。于是 (4.15)

式可解释为“外力对“质点”所作的 Q 型功等于“质点”动能的增量”。

如果 $T \approx 2kL$ (k 为任何正整数), 可取 $[\frac{T}{2L}] \cdot 2L = T_*$ 代替 (4.10)、(4.12) 及

(4.15) 中的 T 即可。这种规定已隐含了能量的不连续性。

5、 Q 型二体问题及 Q 型 Kepler 第二定律

1) Q 型二体问题: 设有二“质点” P_1, P_2 , 其质量分别是 m_1 和 m_2 , 它们之间的作用力是万有引力。用与经典牛顿力学相同的办法 (见参考文献 [4], P.12~13), 可证明此二质点的质心作匀速直线运动。现在取坐标原点在质心的惯性系 $OXYZ$, 记此二“质点”在此系中的向径为 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z)$ 和 $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z)$ 。可以证明 (仍见 [4], P.12~13) 它们的 Q 型运动方程各为

$$\ddot{\vec{r}}_1^{(2)}(t) = -G \left(\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) m_2 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \quad (4.16)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2^{(2)}(t) = -G \left(\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right) m_1 \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \quad (4.17)$$

G 为万有引力常数, $r_i = |\vec{r}_i|$ ($i=1,2$)。此二方程取相同形式, 所以我们只研究 (4.16) 即可。它相当于将质量 $m' = \left(\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right)^2 m_2$ 的质点固结于坐标原点, 在它的引力作用下

“质点” P_1 产生的运动。于是 (4.16) 化为

$$\vec{r}_1^{(2)}(t) = -Gm' \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \quad (4.18)$$

所以

$$\vec{r}(t+2L) = 2\vec{r}(t+L) - \vec{r}(t) - Gm'L^2 \frac{1}{r^3} \vec{r}(t) \quad \text{注}_1 \quad (4.19)$$

可见 $\vec{r}(t+2L)$ 位于由 $\vec{r}(t+L)$ 与 $\vec{r}(t)$ 所决定的平面内 (当 $\vec{r}(t+L)$ 与 $\vec{r}(t)$ 不共线) 或直线上 (当 $\vec{r}(t+L)$ 与 $\vec{r}(t)$ 共线)。对于 $\vec{r}(t+3L)$ 可作类似讨论。继续推论下去, 可见质点 P_1 始终在同一平面中运动。在这个基础上, 我们来讨论 Kepler 第二定律。

2) Kepler 第二定律的 Q 型化

当质量为 m 的“质点”受指定向原点的力 $\vec{F}(t)$ 作用, 这时 $\vec{F}(t) \parallel \vec{r}(t)$, 由 (4.6) 可见

$$\vec{r}(t) \times m\vec{r}_+^{(2)}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) = 0$$

仍用

$$\vec{r}_+^{(1)}(t) = \vec{V}(t) \quad \vec{r}_+^{(2)}(t) = \vec{W}(t)$$

仿照 (3.17) 式的证法, 可得向量的有向积 $\vec{u}(t) \times \vec{V}(t)$ 的微分法则

$$(\vec{u}(t) \times \vec{V}(t))_+^{(1)} = \vec{u}_+^{(1)}(t) \times \vec{V}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{V}_+^{(1)}(t) + \vec{u}_+^{(1)}(t) \times \vec{V}_+^{(1)}(t) \cdot L \quad (4.20)$$

于是

$$(\vec{r} \times m\vec{V})_+^{(1)} = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\vec{W} + \vec{V} \times m\vec{W}L = \vec{V} \times m\vec{W} \cdot L \quad (4.21)$$

在二体问题中, 取 $\vec{F} = -G \frac{mm'}{r^3} \vec{r}_0$, 于是 $\vec{W} = -Gm' \frac{\vec{r}_0}{r^3}$ (注₂)。由 (4.21) 得

注₁ 在此 $\vec{r}(t)$ 即 $\vec{r}_1(t)$

注₂
$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r}(t+L) \times \vec{V}(t+L) - \vec{r}(t) \times \vec{V}(t) = -\frac{L^2 G m'}{r_0^3(t)} \vec{V}(t) \times \vec{r}_0(t) \quad (4.22)$$

这就是Q型化的Kepler第二定律。它附有一个绝对值非常小的修正项（这是“Q效应”在二体问题中的体现之一）。所以我们的结论是：在行星绕日运动中，向径 $\vec{r}(t)$ 在相等的时间内，几乎扫过相同的面积（注）由（4.22）还可以看出，如果取若干个长为L的时间间隔，那么向径在这些时间间隔中扫过的面积愈往后（指时间上往后）愈大的！

3) 对水星运动特异性的猜测

天文学家Leverrier发现水星轨道在100年大约有角度为45"的旋转量。E.Freundlich在1915年发表于德国《天文通报》201卷的文章（参看[3]P.268）中论证了Newton理论不可能令人满意地解释水星运动中这一反常现象。Einstein在广义相对论中提出一个优美的解释。我猜想用（4.19）和（4.22）也许能说明水星运动的特异性。这个解释如果成功，大家也许会接受它，因为它比广义相对论简单得多！

六结束语

与其说这是完整的理论，不如说这是一个初始方案。其中许多提法尚待修改，但是我们相信建立在“时空量子化”基础上的Q型微积分学必将继续发展。

与其说本文的对象是数学家，不如说是物理学家和工程师。所以我们把推导写得比较详细（包括某些已有的定理）。

本文的数学工具是浅近的，而且是化深为浅的。但由此得到的力学，电学及其他方面的公式，也许是比较重要的。这一批反映了“Q效应”的公式可能是探索大自然奥秘的新窗口！

我们仅仅讨论了Newton力学的Q型化，其实量子理论更需要用Q型微积分来探讨，我们正在做这件事。

撰此文是为了参加争鸣，使学术空气活跃一点。盼科技工作者不吝赐教。

在写作中，蔡彪，何岳山，汤鹏志，蒋绍丰等同志提了许多宝贵意见，特向他们致谢。

注： $\frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{V}(t)|$ 和 $\frac{1}{2} |\vec{r}(t+L) \times \vec{V}(t+L)|$ 分别是向径 $\vec{r}$ 在时间间隔 $[t, t+L]$ 和 $[t+L, t+2L]$ 中扫过的面积。

参 考 文 献

- [1] B.B.史捷班若夫，微分方程教程，高教出版社，1959年9月
- [2] A.O盖尔芬德，有限差计算，高教出版社，1956年3月第1版
- [3] 爱因斯坦著，爱因斯坦文集，第二卷，范岱年等编译，商务印书馆，1977年3月第1版。
- [4] 汪家琇著，三体问题，科学出版社，1961年9月第1版

A Tentative Idea about "Q-form Differential and Integral Calculus"

Lin Shijun

(Basic Department)

Abstract

In this paper we present a theory about "Q-form Differential and Integral Calculus". This theory is based on the idea that time and space have their least unit separately. We consider it necessary to quantize the classical differential and integral calculus. The lists of formulae of quantum derivatives are presented. Then, we obtain many new results in mechanics, electricity and other fields.

The main results are the quantization of Newton's second law, the quantization of Kepler's second law, the new formula about the half life period of radioactive elements, the "Q-Effect" of freely falling body, etc.