

河流水质数学模型与数学模拟

金 学 易

(建工系)

摘 要

本文介绍河流水质的基本方程及其数值解法,并简述了制定水质数学模型的方法步骤。

一、前言

随着河流的污染日益严重,人们迫切需要了解或预测污物排入河流后对河流水质所造成的影响,以便为治理河流污染提供对策和依据。由于在现场试验或用物理模型实验的办法来预测污物排入河流后所引起的水质变化,需要耗用大量的人力和物力。因此人们探索用数学模拟的办法来预测河流的水质。河流水质的数学模型是描述河流中污染物随时间和空间而变化的规律的数学方程组。而根据这一数学方程组以各种情况下的污物排放量及河流的其他已知条件作为输入值,进行数学运算求出其输出值即各时刻沿河各处的水质组分浓度,这种方法称为数学模拟。早在1925年,Streeter和Phelps提出的计算河水生化需氧量BOD和溶解氧DO的数学表达式,可算是最早的水质数学模型。但由于在更复杂情况下的数学模型的解析解难以求得,所以水质数学模拟的采用受到限制。然而,在六十年代以后,随着电子计算机和数值计算方法的发展,数学模拟又逐渐受到普遍的重视。近年,美国环境保护局提出的多参数水质模型QUAL2E已能比较准确地计算天然水体中各种组分和有机污染物的物理、化学、微生物作用结果所形成的水质,它表明水质数学模拟已逐渐成为河流水质规划的重要工具之一。

我国许多河流的水质模型还有待制定。因此制定适合于我国河流水文特征的水质模型或引用国外已开发的模型进行参数率定与模型检验,然后用之于我国的水环境的规划与管理中,似为当务之急。为此,本文介绍评述水质的基本方程及其数值解法以供制定模型的参考。

本文于1988年5月11日收到

二、制定水质数学模型的步骤

制定水质数学模型的初步目的在于能够通过电子计算机的运算来模拟天然河流的水文状况和水质组分变化情况。一般说来,制定水质数学模型要经过如下几个步骤:

1、将原型河流的几何形状简化,划分为若干河段,在每一河段内具有相同的水力特征,相同的物理、生化常数。然后再将河段划分为若干个等长的计算单元,并确定边界条件。同时,根据河流中发生的物理、化学和生物学的过程,确定影响过程的主要变量。这一步骤为“概念化表示”。

2、将有关变量按物理学、化学、生物学的基本规律或经验关系式归纳成数学方程式,这一步骤称为“函数表示”。为避免数学模型过于复杂,对影响计算结果不大的变量可不列入函数式中。或者建立“分层次模型”。第一层次模型为描述影响过程的主要变量的关系式,而第二层次模型则为次要影响因素对主要变量的修正式。例如,研究水中溶解氧DO的浓度时要考虑藻类的光合作用所产生的氧与呼吸作用所消耗的氧。所以把藻类的生物量A列入第一层次模型即溶解氧随时间的变化式 $\frac{dDO}{dt}$ 中,而藻类生物量本身又有随时间变化的生长与死亡规律 $\frac{dA}{dt}$,可作为第二层次模型。于是,将影响藻类生物量增长的日照强度、氧、磷等营养物浓度、温度等因素列入第二层次的模型中,以便分层计算。

3、确定计算方法,即寻求函数的解法。如果可求得模型的解析解,则不一定非用数值方法不可。因为要注意到:即使删去次要因素进行简化后所求得解析解也常常是有用的。但在一般情况下,解析解不易求得。所以多用数值计算,例如有限差分法或有限元法。确定计算方法包括编制计算框图和计算机程序。

4、模型系数的率定和敏感性分析。由于水质数学模型中必然要包含一些由试验确定的系数,例如耗氧系数 K_1 、复氧系数 K_2 等等。这些系数只能靠在现场实测到的几组输入值和输出值代入模型中来确定。这一步骤称为模型系数的率定或估值。实际上,率定模型系数时常利用类似的原型河流的系数资料或实验室中测得的系数资料,代入模型中对所待定的系数进行修正与调整,使输出的计算值与实测值相一致。必要时对模型的函数式本身也要做适当的修正。模型系数的敏感性分析是为了确定系数估值时所要求达到的精度。其办法是将某一系数故意增大一些或减小一些代入模型中,考察模型的输出结果受多大的影响。从而确定该系数的变化对整个模型的敏感程度,以便集中注意力确定最敏感的系数的准确值。

5、制定模型最后一步骤是模型的正确性检验。将另外几组实测的输入值和输出值代入已经率定过的模型,考察模型的输出计算结果是否与实测值较好地相符。

三、河流水质的数学模型

1、污染物在河水中的传输方程

根据质量守恒原理,可推导出污染物在河中迁移传输的规律,它是水质数学模型的基本方程。目前在实际工作中,对分析长距离河段内的水质变化多采用一维方程,因为一维方程

中所需的系数容易根据现场实测资料进行估值。

设在河段中取一计算单元，其长度为 dx ，在 dx 范围内河流的过水断面面积为 A ，断面平均流速为 u ，污染物（或某一水质组分）的浓度为 c ，如图1所示。该计算单元的体积为 $V = A dx$ ，其中污染物的质量 $M = Vc$ ，单元两端断面分别为 i 断面及 $i+1$ 断面。经 i 断面随水

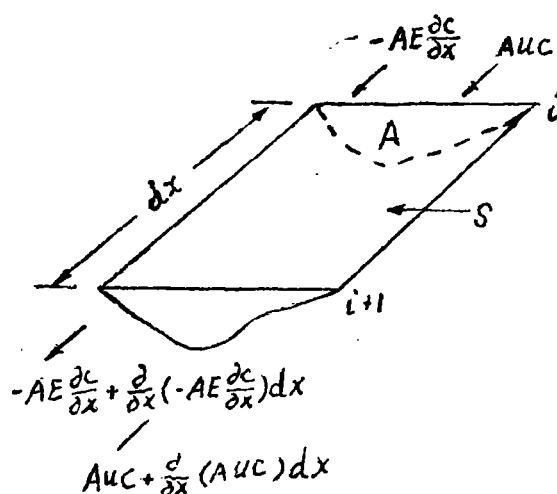


图 1

流以流速 u 流入的污染物质量为 Auc ，称为移流输送。由于弥散作用而进入的污染物质量为 $-AE \frac{\partial c}{\partial x}$ ， E 为弥散系数，在体积 V 内污染物由于物理、化学或生物作用的变化量为 $(A dx) \frac{dc}{dt}$ ，由河段旁侧向流进或流出的污物量为 S ，而由 $i+1$ 断面流出的污染物质量为 $Auc + \frac{\partial}{\partial x} (Auc) dx$ ，及 $-AE \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-AE \frac{\partial c}{\partial x}) dx$ ，于是由质量守恒原理得：

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (AE \frac{\partial c}{\partial x}) dx - \frac{\partial}{\partial x} (Auc) dx + A dx \frac{dc}{dt} + S \quad (1)$$

因
$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial (Vc)}{\partial t} = V \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial t}$$

当河水流量为恒定时， $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

则有
$$\frac{\partial M}{\partial t} = V \frac{\partial c}{\partial t} = A dx \frac{\partial c}{\partial t} \quad (2)$$

以(2)式代入(1)式得

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (AE \frac{\partial c}{\partial x}) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (Auc) + \frac{dc}{dt} + \frac{s}{V} \quad (3)$$

这里应注意的是，上式中 $\frac{dc}{dt}$ 与 $\frac{\partial c}{\partial t}$ 具有截然不同的含义： $\frac{dc}{dt}$ 表示由于物理、化学或生物

作用引起的污染物浓度 c 的变化率，而 $\frac{\partial c}{\partial t}$ 则表示由于移流输送、弥散、物理化学生物作用，以及侧向进出所引起的污染物在 dx 范围内随时间的变化率，它是污染物浓度的当地梯度。如果由(3)式求解得污染物浓度 $c(x, t)$ ，那么，就求得了各时刻沿河各处污染物浓度的分布规律。式(3)是属于第一层次的数学模型。

2、各水质组分的函数式

污染物(或水质组分)在河中的浓度变化除了受迁移传输的流体力学规律的制约之外，还受制于物理、化学、或生物作用所引起的浓度变化，即式(3)中的 $\frac{dc}{dt}$ 。经过理论或实验研究，许多人已提出各种水质组分浓度变化的函数式，现择要举例说明如下：

(1)五日生化需氧量 BOD_5

五日生化需氧量 BOD_5 可用一级动力学反应表示其衰减率，此外还应考虑有机物在河中沉淀而减少的变化率。

$$\text{于是} \quad \frac{dL}{dt} = -K_1 L - K_3 L \quad (4)$$

式中 L 为 BOD_5 的浓度； K_1 为有机物碳化耗氧系数； K_3 为有机物沉淀系数。

(2)水中溶解氧 DO

在河水中能否维持适当的溶解氧含量是研究河流自净能力应预断评价的问题之一。而影响河中溶解氧含量的因素除了水中有机物碳化作用所消耗的氧和大气复氧作用之外，必要时还应考虑如下几点：

(a)如污染物在河中流行的时间比较长，则须考虑有机物硝化作用的耗氧量。

(b)如河水流速较慢，部份有机物将沉淀于河底形成污泥，则污泥中有机物的分解也要消耗水中的溶解氧。

(c)如河中有大量的藻类及其他水生植物，则要考虑藻类的光合作用所产生的氧以及呼吸作用所消耗的氧。

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \frac{dDO}{dt} = & K_2(DO_s - DO) - K_1 L - K_4/d - \alpha_5 \beta_1 N_1 - \alpha_6 \beta_2 N_2 \\ & + (\alpha_3 \mu - \alpha_4 \rho) A \end{aligned} \quad (5)$$

式中 K_2 为复氧系数； DO_s 为水中溶解氧饱和浓度； K_4 为污泥有机物分解的耗氧系数； d 为河水深度； α_5 为每克氮氮氧化为亚硝酸氮时所需的氧量； β_1 为氮氮氧化速率系数； N_1 为水中氮氮浓度； α_6 、 β_2 、 N_2 则分别为亚硝酸氮的上述对应值。

现以式(5)代入式(3)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial DO}{\partial t} = & \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (AE \frac{\partial DO}{\partial x}) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (Au DO) + \frac{S_{DO}}{V} \\ & + [K_2(DO_s - DO) - K_1 L - K_4/d - \alpha_5 \beta_1 N_1 - \alpha_6 \beta_2 N_2 + (\alpha_3 \mu - \alpha_4 \rho) A] \end{aligned} \quad (6)$$

式中 α_3 、 μ 、 α_4 、 ρ 、 A 分别为藻类的光合作用产氧量、藻类的比生长率、呼吸作用耗氧量、呼吸率及藻类生物量。而藻类生物量 A 的增长消亡规律又受其营养物 (N_1 、 N_2 、硝酸氮 N_3 、溶解磷 P_2 等)和自然条件(日照强度、温度等)的制约,所以还要建立藻类生态过程的模型,现简述如下。

3 藻类生态过程模型

建立生态过程的数学模型时既要力求模型符合生态过程的真实性,又要注意其数学表达式的简明性,不宜引入过多的系数,以免难以率定。常用的模型为

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - \rho A - \frac{\sigma_1}{d} A \quad (7)$$

式中 σ_1 为藻类的沉淀率。至于式(7)中的藻类比生长率 μ 的计算可采用Michaelis-Menten-Monod公式

$$\mu = \mu_{max}(FN)(FP)(FL) \quad (8)$$

式中 μ_{max} 为藻类最大比生长率;FN、FP、FL分别为氮、磷、日照强度的限制系数;根据微生物生长时酶与基质的Michaelis-Menten关系式,可写出

$$FN = \frac{Ne}{K_N + Ne} \quad (9)$$

$$FP = \frac{P_2}{K_P + P_2} \quad (10)$$

$$FL_z = \frac{I_z}{K_L + I_z} \quad (11)$$

上式各式中 Ne 、 P_2 、 I_z 分别为河水中无机氮浓度、溶解磷浓度和在 z 深度处的光密度。而 K_N 、 K_P 、 K_L 分别为氮、磷、光密度的半饱和系数。注意到

$$I_z = I \exp(-\lambda z)$$

式中 I 为水面的日照强度, z 为某点的水深, λ 为消光系数。于是对水深为 d 的河水的平均FL值为:

$$FL = \frac{1}{d} \int_0^d FL_z dz = \frac{1}{\lambda d} \ln \left(\frac{K_L + I}{K_L + I e^{-\lambda d}} \right) \quad (13)$$

以(9)、(10)、(13)代入(8)式得

$$\mu = \mu_{max} \left(\frac{Ne}{K_N + Ne} \right) \left(\frac{P_2}{K_P + P_2} \right) \frac{1}{\lambda d} \ln \left(\frac{K_L + I}{K_L + I e^{-\lambda d}} \right) \quad (14)$$

式(14)属于第二层次的数学模型。目前在各种科技文献中列出各种各样的生态模型,其中

别在于包括各不相同的环境因素。例如，有的模型考虑了昼间光密度的变化，有的模型按太阳辐射能计算光密度，有的模型考虑了藻类细胞内营养物浓度。至于采用那种模型则取决于所能得到的实测资料以及模拟目的所需的模型精度等等。

四、水质数学模型的数值解

在大多数情况下，水质基本方程难以求得解析解。所以常用隐式有限差分法进行数值求解。有限差分法是把空间和时间坐标离散化为 x_i 、 t_j ，形成 $x-t$ 两个变量的平面网格，如图2所示。用差分商来表示微分方程，然后求得微分方程在网格结点上的解，其基本方法是根

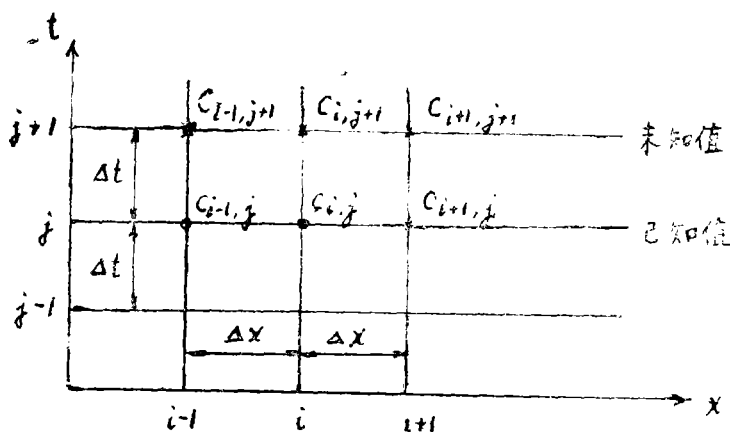


图 2

据在 t_j 时刻在空间上各点 x_i 的已知浓度值 $c_{i,j}$ ，计算在 t_{j+1} 时刻的空间上各点的浓度值 $c_{i,j+1}$ 。现取空间步长为 Δx ，时间步长为 Δt 。用向前差分格式表达浓度 c 对时间 t 的偏导数

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{\Delta t} \quad (a)$$

用向后差分格式表达浓度 c 对距离 x 的偏导数

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (b)$$

这是因为假设有一浓度不衰减的示踪物质从 $x = x_{i-1}$ 点出发，经过时间 Δt 后随水流移动到 $x = x_i$ 点，则必有 $c_{i-1,j} = c_{i,j+1}$ 。如弥散作用可以忽略即只存在移流作用时，水质的浓度变化为

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial x} dx = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \right) dt = 0$$

因此

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x}$$

以式 (a) 及式 (b) 代入上式, 得 $\frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{\Delta t} = -u \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{\Delta x}$

如差分网格的步长选择恰当, 使 $\Delta x = u \Delta t$, 则由上式可得 $c_{i-1,j} = c_{i,j+1}$, 正好符合移流的要求。所以 $\frac{\partial c}{\partial t}$ 应采用向前差分格式, 而 $\frac{\partial c}{\partial x}$ 应采用向后差分格式。弥散项可用中心差分格式来表达:

用泰勒级数展开 $c(x_i + \Delta x)$ 及 $c(x_i - \Delta x)$ 得

$$c(x_i + \Delta x) = c(x_i) + \Delta x \cdot \frac{dc(x_i)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2c(x_i)}{dx^2}$$

$$c(x_i - \Delta x) = c(x_i) - \Delta x \cdot \frac{dc(x_i)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2c(x_i)}{dx^2}$$

以上两式相加得 $c(x_i + \Delta x) + c(x_i - \Delta x) = 2c(x_i) + \Delta x^2 \cdot \frac{d^2c(x_i)}{dx^2}$

或 $\frac{d^2c(x_i)}{dx^2} = \frac{c(x_i + \Delta x) - 2c(x_i) + c(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$

对隐式差分格式通常在 $j+1$ 线上表达对 x 的二阶偏导数, 因为这样收敛性较好。

即 $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{c_{i+1,j+1} - 2c_{i,j+1} + c_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2}$ (c)

各水质组分的函数式都可表达为

$$\frac{dc_i}{dt} = r_i c_{i,j+1} + p_i$$
 (d)

式中 r_i 为组分变化速率系数; p_i 为由于各种作用而引起的组分增减。

按式 (a)、(b)、(c)、(d) 可将式 (3) 用如下差分式表示:

$$\begin{aligned} \frac{c_{i,j+1} - c_{i,j}}{\Delta t} = & \frac{(AE)_i c_{i+1,j+1} - (AE)_i c_{i,j+1}}{A_i (\Delta x)^2} \\ & - \frac{(AE)_{i-1} c_{i,j+1} - (AE)_{i-1} c_{i-1,j+1}}{A_i (\Delta x)^2} \\ & - \frac{(Au)_j c_{i,j} - (Au)_{j-1} c_{i-1,j}}{A_i (\Delta x)} + r_i c_{i,j+1} + p_i + \frac{S_j}{V_i} \end{aligned}$$

上式可整理成

$$a_1 c_{i-1,j+1} + b_1 c_{i,j+1} + d_1 c_{i+1,j+1} = Z_i$$
 (15)

式中 $a_1 = - \frac{(AE)_{i-1} \Delta t}{A_i (\Delta x)^2}$

$$b_i = 1 + \frac{[(AE)_i + (AE)_{i-1}]}{A_i(\Delta x)^2} \Delta t - r_i \Delta t$$

$$d_i = -\frac{(AE)_i \Delta t}{A_i(\Delta x)^2}$$

$$Z_i = p_i \Delta t + \frac{s_i \Delta t}{v_i} + \frac{(Au)_{i-1} \Delta t}{A_i(\Delta x)} c_{i-1,i} + \left[1 - \frac{(Au)_i \Delta t}{A_i \Delta x}\right] c_{i,i}$$

上列各式中 a_i 、 b_i 、 d_i 及 Z_i 在 $t = t_i$ 时刻均为已知值,而在 $t = t_{j+1}$ 时刻的 $c_{i-1,j+1}$ 、 $c_{i,j+1}$ 及 $c_{i+1,j+1}$ ($i = 1, 2 \cdots n$) 为待求的未知值。

但注意到上游边界条件 $c(0, t_{j+1}) = c_{0,j+1}$ 为已知值,因此,当 $i = 1$ 时,式(15)变为

$$b_1 c_{1,j+1} + d_1 c_{2,j+1} = Z_1 - a_1 c_{0,j+1} = Z_1' \quad (15a)$$

于是,在 $t = t_j$ 时刻,式(15a)中的 Z_1' 为已知值。当 $i = n$ 时,式(15)写为:

$$a_n c_{n-1,j+1} + b_n c_{n,j+1} + d_n c_{n+1,j+1} = Z_n \quad (e)$$

现只计算到 $i = n$ 为止,因此应设法消去式(e)中的 $c_{n+1,j+1}$ 项。为此,可认为

$$c_{n,j+1} = \frac{1}{2} (c_{n-1,j+1} + c_{n+1,j+1}),$$

$$\text{即} \quad c_{n+1,j+1} = 2c_{n,j+1} - c_{n-1,j+1}$$

$$\text{代入(e)式得:} \quad (a_n - d_n) c_{n-1,j+1} + (b_n + 2d_n) c_{n,j+1} = Z_n$$

令 $a_n - d_n = a_n'$, $b_n + 2d_n = b_n'$, 则上式写成

$$a_n' c_{n-1,j+1} + b_n' c_{n,j+1} = Z_n \quad (15b)$$

现将式(15)、(15a)、(15b)综合写成矩阵向量式

$$\begin{pmatrix} b_1 & d_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & d_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & d_3 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_i & b_i & d_i \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & & & a_n' & d_n' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{1,j+1} \\ c_{2,j+2} \\ c_{3,j+3} \\ \dots \\ c_{i,j+1} \\ \dots \\ c_{n-1,j+1} \\ c_{n,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_i \\ \dots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{pmatrix} \quad (16)$$

式 (16) 为三对角线矩阵, 采用追赶法求解, 最便于在计算机上运算, 其步骤如下:

(1) 以 b_1 除式 (16) 的第一式得

$$c_{1,j+1} + w_1 c_{2,j+1} = G_1 \quad (17)$$

式中 $w_1 = d_1/b_1 \quad G_1 = Z'/b_1 \quad (17a)$

(2) 为消去式 (16) 的第二式中的 $c_{1,j+1}$ 项, 以式 (16) 的第二式减去 a_2 乘 (17) 式得

$$(b_2 - a_2 w_1) c_{2,j+1} + d_2 c_{3,j+1} = Z_2 - a_2 G_1$$

或 $c_{2,j+1} + w_2 c_{3,j+1} = G_2 \quad (18)$

式中 $w_2 = d_2/(b_2 - a_2 w_1) \quad G_2 = (Z_2 - a_2 G_1)/(b_2 - a_2 w_1)$

由式 (18) 与式 (16) 中的第三式消去 $c_{2,j+1}$ 项, 得

$$c_{3,j+1} + w_3 c_{4,j+1} = G_3 \quad (19)$$

式中 $w_3 = d_3/(b_3 - a_3 w_2) \quad G_3 = (Z_3 - a_3 G_2)/(b_3 - a_3 w_2)$

依此类推得 $c_{i,j+1} + w_i c_{i+1,j+1} = G_i \quad (20)$

式中 $w_i = d_i/(b_i - a_i w_{i-1}) \quad i = 2, 3, \dots, n$
 $G_i = (Z_i - a_i G_{i-1})/(b_i - a_i w_{i-1}) \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (21)$

最后, 消去式 (16) 中最后一式中的 $c_{n-1,j+1}$ 项, 可算得

$$c_{n,j+1} = (Z_n - a_n G_{n-1})/(d_n' - a_n' w_{n-1}) = G_n \quad (22)$$

(3) 以由式 (22) 算出的 $c_{n,j+1}$ 值回代式 (20) 的 $i = n-1$ 对应式:

即 $c_{n-1,j+1} + w_{n-1} c_{n,j+1} = G_{n-1}$

于是得 $c_{n-1,j+1} = G_{n-1} - w_{n-1} c_{n,j+1}$

类推得 $c_{i,j+1} = G_i - w_i c_{i+1,j+1} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (23)$

根据式 (17a)、(21)、(22)、(23) 由已知的 $c_{i,j}$ 值 ($i = 1, 2, \dots, n$) 就可算出 $c_{i,j+1}$ 各值了 ($i = 1, 2, \dots, n$)

五、结束语

经过从六十年代以来二十多年的发展,目前水质数学模型的准确性已达到工程界可接受的水平。而水质数学模拟也已由倾向于数学演算发展到以基本科学规律与实际观测值相结合,以定量地描述水体水质变化情况。水质数学模拟已作为水环境污染控制决策的重要工具之一。

水质数学模型的解析解和数值解各有其不同的用处。在一般情况下,模型简化后,易获得解析解,可用于粗略地估算河流水质的变化情况,但对河流水质变化的定量计算,则往往需借助于多参数水质模型的数值解。

无论是解析解还是数值解,正确地采用模型中有关的系数的值(例如耗氧系数 K_1 、复氧系数 K_2 、弥散系数 E 等等)是一个关键性问题。因为如这些系数采用不准确,势必影响模型的准确性。关于如何通过现场试验观测来获得模型中系数的值,称为模型参数估值或率定。它在建立水质模型过程中往往占很大的工作量,而且需要应用数据处理方法,由于本文篇幅所限,只好另文叙述了。

参 考 文 献

- [1] Asit K. Biswas: Models for Water Quality Management, McGraw-Hill Inc. 1981
- [2] Orlob: Mathematical Modeling of Water Quality, John Wiley & Sons, 1983
- [3] Thomas D. Waite: Principles of Water Quality, 1984
- [4] James A. An Introduction to Water Quality Modelling, John Wiley & Sons, 1984
- [5] Brown & Barnwell, Jr.: Computer Program Documentation for the Enhanced Stream Water Quality Model QUAL2E, 1985
- [6] Rinaldi, Soncinisessa, Stehfest, Tamura: Modeling and Control of River Quality, McGraw-Hill Inc. 1979