

商品销价的最优平稳 控制的数学模型

温 盛 儒

(数 学 教 研 室)

摘 要

本文研究了在商品销售过程中商品销价的数学特征,建立了商品销价的最优平稳控制的数学模型,得到了寻求销价最优平稳控制策略的迭代方法。

一、引 言

众所周知,商品的销量与销价之间存在相关关系。一般而言,提高销价会减少销量,降低销价会增大销量。经商者为了追求最大利润,既希望有最高的销价,又希望有最大的销量。然而,二者难以得兼。这就需要利用价格杠杆,采用科学的销价策略,以争取在所论的时域中销售总收入或总利润为最大。何种销售策略为最优呢?又怎样去获得它呢?为了解决这一问题,我们考察一下在商品销售过程中商品销售价格的数学特征。

首先,我们看到:在商品销售过程中,销价的选定是在一系列的时刻点上作出的。这就是说,销价决策是贯序决策。而且,销价的选定既依赖于销售状态(畅销,滞销或一般),又反过来影响着销售状态。这就是说,销价决策是动态贯序决策。又因为消费者对于商品的需求具有随机性,所以商品的销售状态的转换也是随机的。这就是说,销价的决策控制问题,也是随机动态贯序决策控制问题。

其次,我们还看到:某些商品在未来时刻的销售状态只与现时的销售状态及销售价格有关,而与现时刻以前的销售状态及销价决策无关。这就是说,某些商品的销售状态的转换具有马尔可夫性。

第三,因为商品销售利润与商品的销价、销量(销售状态)有关,而销售状态的转移通常是随机的,所以销售利润是随机变量。很自然地,人们希望的是总利润的数学期望为最大。

本文于1988年6月11日收到

第四、因为银行贷款、存款都有一定利息，所以在研究长时期的经商利润时，人们希望的是获得已考虑了资金利息的折扣最优销价策略。

根据商品销价的上述数学特征，我们可以建立销价的最优控制数学模型。

二、数学模型

在给出销价的随机动态控制数学模型之前，我们先考察一个引例：

设某种商品销售分为畅销、滞销两个状态。在畅销状态下，一周时间销售商品2000件；在滞销状态下，一周时间销售商品1000件。该商品的经营者在每周的开始时刻观察商品的销售状态，并据此作出这一周的销价决策。根据历史经验，在各种销售状态下的各种可能销价决策及其决策效果是：

(一) 在商品处于畅销状态时，可能采用的销价决策有三个，这些决策及其决策效果是：

决策 a_{11} （高价），其决策效果是：

①每销售一件商品可获利润2元；

②销售状态将以0.3的概率保持畅销，以0.7的概率转入滞销。

决策 a_{12} （平价），其决策效果是：

①每销售一件商品可获利润1.5元；

②销售状态将以0.6的概率保持畅销，以0.4的概率转入滞销。

决策 a_{13} （低价），其决策效果是：

①每销售一件商品要赔本0.5元；

②销售状态以概率1保持畅销。

(二) 在商品处于滞销状态时，可能采用的销价决策有三个，这些决策及其决策效果是：

决策 a_{21} （高价），其决策效果是：

①每销售一件商品可获利润2元；

②销售状态将以概率1保持滞销。

决策 a_{22} （平价），其决策效果是：

①每销售一件商品可获利润1.5元；

②销售状态将以0.5的概率保持滞销以0.5的概率转入畅销。

决策 a_{23} （低价），其决策效果是

①每销售一件商品要赔本0.5元；

②销售状态将以0.75的概率转入畅销，以0.25的概念保持滞销。

在上述条件下，要求探索出在一个长时间（例如一年，五年等）的最优销价决策序列，以便在所论时域里，在考虑资金利率 $\alpha = 0.1$ 的情况下，获得最大利润。

根据这一引例所述的实际背景，我们可以对商品销价的随机动态控制问题给出如下一般性数学描述：

记： T 为由某商品的销价、销售状态及销售利润构成的动态控制系统； S 为系统的状态空间； V_t 为第 t 销售阶段的起始时刻系统所处的状态； $A(i)$ ， $i \in S$ 是系统在状态 i 可用的销价决策集合； F 是由系统的所有可行销价决策所构成的集合； X_t 是时刻 t 所采用的销价决策； $\pi = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ 为系统所选用的销价决策序列； Π 是由该系统中所有可能的销价策

略所构成的策略空间； $r(j, a)$ 为系统在状态 j 时采用决策 a 所获的利润； $P_a(r_t = j, x_t = a | r_1 = i)$ 为系统在 $t = 1$ 从状态 i 出发的条件下，用策略 π 使系统于时刻 t 的状态为 j ，并在该状态下采用决策 a 的概率； $R_t(\pi)$ 为系统在采用策略 π 的情况下，于第 t 阶段所获的销售利润。

于是，根据马尔可夫决策规划理论，可以得到销价随机动态控制问题如下数学模型：

(一)在考虑资金折扣因子时，销价随机动态控制的目标函数为

$$\begin{aligned} V_{\beta}(\pi, i) &= \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t E_{\pi} [R_t(\pi) | r_1 = i] \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \sum_{\substack{a \in A(j) \\ j \in S}} P_{\pi} [r_t = j, x_t = a | r_1 = i] r(j, a) \end{aligned}$$

(其中 $i \in S$ 、 $\pi \in \Pi$ 、 $\beta = \frac{1}{1+\alpha}$ 、 α 为已知的资金利率)

(二)销价的随机动态控制的最优化准则是：

设 $\pi^* \in \Pi$ ，若对于任何策略 $\pi \in \Pi$ ，及任何状态 $i \in S$ ，均有：

$$V_{\beta}(\pi^*, i) \geq V_{\beta}(\pi, i)$$

则称控制策略 π^* 是关于折扣因子 β 的最优控制策略。

(三)寻求最优销价控制策略的步骤是：

1°凭经验选择某一平稳策略 f^{∞} ，（如无经验，则可任取某一平稳策略 f^{∞} ）用公式：

$$\begin{aligned} V_{\beta}(f^{\infty}, i) &= r(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} q(j|i, f(i)) V_{\beta}(f^{\infty}, j) \\ &= r(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} q(j|i, f(i)) V_{\beta}(f^{\infty}, j) \end{aligned} \quad (1)$$

进行策略求值。

2°对于求出的 $V_{\beta}(f^{\infty}, i)$ 、用公式：

$$\begin{aligned} &\max_{a \in A(i)} [r(i, a) + \beta \sum_{j \in S} q(j|i, a) V_{\beta}(f^{\infty}, j)] \\ &= r(i, g(i)) + \beta \sum_{j \in S} q(j|i, g(i)) V_{\beta}(f^{\infty}, j) \end{aligned} \quad (2)$$

选定一个比 f^{∞} 优越的新策略 g^{∞} 。如果新策略 g^{∞} 与原策略 f^{∞} 相同，则它们即是所求的最优策略。否则，对 g^{∞} 重复步骤1°、2°，直至找出最优策略。

三、引例的求解过程

先编制系统表如下:

状态	决策	状态转移概率		利 润
i	a	$q(1 i,a)$	$q(2 i,a)$	$r(i,a)$
1 (畅销)	a_{11}	0.3	0.7	$(0.3 \times 2000 + 0.7 \times 1000) \times 2 = 2600$
	a_{12}	0.6	0.4	$(0.6 \times 2000 + 0.4 \times 1000) \times 1.5 = 2400$
	a_{13}	1	0	$(1 \times 2000 + 0 \times 1000) \times (-0.5) = -1000$
2 (滞销)	a_{21}	0	1	$(0 \times 2000 + 1 \times 1000) \times 2 = 2000$
	a_{22}	0.5	0.5	$(0.5 \times 2000 + 0.5 \times 1000) \times 1.5 = 2250$
	a_{23}	0.75	0.25	$(0.75 \times 2000 + 0.25 \times 1000) \times (-0.5) = -875$

由系统表可见,共有9个决策函数:

$$f^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, f^2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix}, f^5 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, f^6 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$f^7 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{21} \end{pmatrix}, f^8 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{22} \end{pmatrix}, f^9 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

在策略集中任取一策(例如 f^1),用公式(1)求出平稳策略 f^{1*} 的策略值。具体来说,解线性方程组:

$$\begin{cases} 2600 + 0.9 [0.3V(1) + 0.7V(2)] = V(1) \\ 2000 + 0.9 [0V(1) + 1V(2)] = V(2) \end{cases}$$

得到 $V_{0.9}(f^{1*})$ 的策略值是:

$$V(1) = 20822$$

$$V(2) = 20000$$

再用公式(2)检验 $f^{1\infty}$ 是否为最优策略:

$$\begin{aligned}\therefore V(1, a_{11}) &= \gamma(1, a_{11}) + 0.9 \sum_{j=1}^2 q(j|1, a_{11}) V(j) \\ &= 2600 + 0.9 [0.3V(1) + 0.7V(2)] \\ &= 20822\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(1, a_{12}) &= \gamma(1, a_{12}) + 0.9 \sum_{j=1}^2 q(j|1, a_{12}) V(j) \\ &= 2400 + 0.9 [0.6 \times 20822 + 0.4 \times 20000] \\ &= 20844\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(1, a_{13}) &= \gamma(1, a_{13}) + 0.9 \sum_{j=1}^2 q(j|1, a_{13}) V(j) \\ &= (-1000) + 0.9 [1 \times 20822 + 0 \times 20000] \\ &= 17740\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Max} \{ &V(1, a_{11}), V(1, a_{12}), V(1, a_{13}) \} \\ &= \text{Max} \{ 20822, 20844, 17740 \} \\ &= 20844 = V(1, a_{12})\end{aligned}$$

$\therefore$ 取新策略分量 $g_1(1) = a_{12}$

仿此可得:

$$\begin{aligned}\text{Max} \{ &V(2, a_{21}), V(2, a_{22}), V(2, a_{23}) \} \\ &= \text{Max} \{ 20000, 20620, 13630 \} \\ &= 20620 = V(2, a_{22})\end{aligned}$$

$\therefore$ 取新策略分量 $g_1(2) = a_{22}$

$\therefore$ 新策略为 $f^5 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, 由是可知, 使用平稳策略 $f^{5\infty}$ 比原平稳策略 $f^{1\infty}$ 可获较大利润。

对于策略 $f^{5\infty}$, 重复使用公式(1)可求得相应策略值:

$$V(1) = 23407$$

$$V(2) = 23242$$

重复使用公式(2)可得到:

$$\begin{aligned}\text{Max} \{ &V(1, a_{11}), V(1, a_{12}), V(1, a_{13}) \} \\ &= \text{Max} \{ 23562, 23407, 20066 \} \\ &= 23562 = V(1, a_{11})\end{aligned}$$

$\therefore$ 新策略分量 $g_2(1) = a_{11}$

$$\begin{aligned} & \text{Ma} \times \{ V(2, a_{21}), V(2, a_{22}), V(2, a_{23}) \} \\ &= \text{Ma} \times \{ 22918, 23242, 20154 \} \\ &= 23242 = V(2, a_{22}) \end{aligned}$$

$\therefore$ 新策略分量, $g_2(2) = a_{22}$, 新策略为 $f^2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ 。由是可知, 使用平稳策略 $f^{2\infty}$ 比

平稳策略 $f^{5\infty}$ 可获得较大利润。

对于策略 $f^{2\infty}$, 重复使用公式(1)可得相应的策略值:

$$V(1) = 24132$$

$$V(2) = 23835$$

重复使用公式(2)可得到:

$$\begin{aligned} & \text{Ma} \times \{ V(1, a_{11}), V(1, a_{12}), V(1, a_{13}) \} \\ &= \text{Ma} \times \{ 24132, 24012, 20719 \} \\ &= 24132 = V(1, a_{11}) \end{aligned}$$

$\therefore$ 新策略分量 $g_3(1) = a_{11}$

$$\begin{aligned} & \text{Ma} \times \{ V(2, a_{21}), V(2, a_{22}), V(2, a_{23}) \} \\ &= \text{Ma} \times \{ 23452, 23835, 20777 \} \\ &= 23835 = V(2, a_{22}) \end{aligned}$$

$\therefore$ 新策略分量 $g_3(2) = a_{22}$

由是可知, 新策略仍是 $f^{2\infty}$ 。这说明策略 $f^{2\infty}$ 不能再被改进了。 $f^{2\infty}$ 即是所求的销价的最优平稳控制策略。

$f^{2\infty}$ 的实际意义是, 在给定的销售系统中, 经营者(卖方)对销价的**佳控制原则为: 凡出现畅销, 就采用高价出售; 凡出现滞销, 就采用平价出售。采用这种平稳控制策略, 就可以在考虑了给定的资金利率的情况下, 使经营者(卖方)在长时期里获得最大利润。

不难发现, 这种结果完全符合实际, 这种方法适应于更为复杂的一般销售系统, 这种理论对于外贸活动有指导意义。

参 考 文 献

- [1] 董泽清, 马尔可夫决策规划引论, 中国科学院应用数学研究所油印本, 1985年2月
- [2] Howard, R.A. Dynamic Programming and Markov Processes
- [3] Deb, R.K., Serfozo, R.E. Optimal Control of Batch Service Queues, Adv Appl, Prob, Vol5
- [4] 邹君利, 徐明民, 商品拍卖的最优对策, 数学的实践与认识, 1988年第2期

Mathematical Model of Optimal Smooth Control for Price of Commodities

Wen Shengru

(Basic Department)

Abstract

In this paper the mathematical character of price of commodities in the course of selling commodity is studied, the mathematical model of optimal smooth control for price of commodities is founded, and, the interactive method for seeking optimal smooth tactic about price of commodities is obtained as well.