

长期排水条件下求解土的线性固结问题的数值方法

王全金 雷晓燕

建筑工程系

摘 要

本文讨论的问题是应用边界元法以确定在长期排水条件下饱和土中的应力和变形的数值方法。文中所提出的方法和所给出的全部计算公式,对工程技术人员具有一定的参考作用。

引 言

土体作为一种多孔介质,是由颗粒,气体和液体所组成,而饱和土体则是由颗粒和孔隙水所组成。当液体通过介质孔隙流动时,所发生的变形现象叫做固结。线性固结理论以下列五个基本概念为基础:孔隙中流体的质量守恒,流体流动的达西定律,土体的整体平衡,土颗粒变形的虎克定律,以及Terzaghi的有效应力原理。

本文讨论了用边界元法求解在长期排水条件下,饱和土的线性固结问题的数值方法。在这之前,人们通常是用有限元法来处理这类问题的。我们知道,边界元法与有限元法相比,在求解线性问题上有许多独特的优点:一是计算简单,将问题降维求解;二是精度高,应力与位移具有同样的精度;三是适宜处理无限域或半无限域的问题。因此用边界元法求解比用传统的有限元法处理,具有计算工作量小,精度高,程序设计简单的优点,便于在实际工程中应用和推广。

一 线性固结理论的基本方程

1、孔隙水的基本方程

由孔隙中流体的质量守恒定律及流体流动的达西定律,可推导出孔隙中流体的基本方程如下:

本文于1988年5月10日收到

$$\{\Delta\}^T [k] \{\nabla\} \sigma + \frac{\partial}{\partial t} \{\nabla\}^T \{u\} - \frac{n}{k_f} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

式中: σ ——孔隙水压力;

$[k]$ ——渗透系数矩阵;

n ——孔隙度;

k_f ——流体的体积压缩模量;

$$\{\nabla\}^T \{u\} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \text{ 为土颗粒的体积应变。}$$

(1)式的边界条件通常为:在某一确定的边界上给定了孔隙压力;而在其余边界上给定了流量,其数学表达式是

$$\begin{cases} \sigma = \bar{g} & (\text{on } \Gamma_1) \\ q_i n_i = \bar{h} & (\text{on } \Gamma_2) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\bar{g}$ 、 $\bar{h}$ 为已知的函数;

$$q_i = k_{ij} \sigma_{,j}$$

(1)式的两种特殊情况是:

a、长期排水条件下的问题

在长期排水条件下,也即运动是稳定的,认为与时间无关,因此(1)式简化成

$$\{\nabla\}^T [k] \{\nabla\} \sigma = 0 \quad (3)$$

若介质是各向同性时,(3)式可进一步简化成

$$\nabla^2 \sigma = 0 \quad (4)$$

上式即为Laplace方程,与边界条件(2)一起,构成了函数 σ 的定解方程。

b、迅速加荷,不排水条件下的问题

这里假设加荷是如此之快,以致不可能发生渗流,所以流体被封闭在介质的孔隙中,它的压力变化仅与弹性体积压缩所引起的骨架体积变化有关,于是(1)式可简化为

$$\Delta \sigma = + \frac{k_f}{n} \{\nabla\}^T \{u\} \quad (5)$$

2、土体的基本方程

土体的整体平衡方程是

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

式中: σ_{ij} 是应力张量分量, b_i 是体力分量。土中的应力包括孔隙压力和有效应力。有效应力表示颗粒接触点上集中力的大小。Terzaghi的有效应力概念的基本思想是:土的变形是由这些接触力决定的,孔隙水的应力对颗粒则产生一个相等的压力,并不影响土的变形。因此

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma \delta_{ij} \quad (7)$$

式中: σ'_{ij} 为有效应力张量分量;

σ 为孔隙水压力。

假设介质是各向同性的线弹性材料, 在小变形的情况下, 有效应力与位移的关系为

$$\sigma'_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (8)$$

式中: λ 为拉梅常数, $\lambda = \mu E / (1 + \mu)(1 - 2\mu)$; G 为剪切模量。

将(7)、(8)两式代入(6)中, 则有

$$[G(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + (\lambda u_{k,k})_{,i} + \sigma_{,i} + b_i = 0 \quad (9)$$

上式的边界条件为

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i & (\text{on } \Gamma_1) \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i & (\text{on } \Gamma_2) \end{cases} \quad (10)$$

(1)和(9)两式一起, 构成了线性固结问题的基本微分方程, 从该两式中可以看出, (u) 与 σ 是有联系的, 属于耦合问题, 一般要在边界条件(2), (10)两式下, 联立求解。只是在长期排水条件下, 土的固结问题的求解才不须联立进行。本文对这种特殊情况 (也是工程中最常遇到的情况) 的求解数值方法给予详细介绍, 并将给出全部有关计算公式。

二 长期排水条件下Laplace方程的边界元解

考虑介质为各向同性的情况, 将方程(4)及边界条件(2)重写如下

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma = 0 & (\text{in } \Omega) \\ \sigma = \bar{g} & (\text{on } \Gamma_1) \\ \sigma_{,i} n_i = \bar{h} / k & (\text{on } \Gamma_2) \end{cases} \quad (11)$$

求解下式最有效的数值方法之一是边界元法。

利用格林公式, 可建立等效于(11)式的边界积分方程如下

$$C(\xi) \sigma(\xi) + \int_{\Gamma} \sigma(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) \sigma^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (12)$$

式中:

$$q^*(\xi, x) = \frac{\partial \sigma^*(\xi, x)}{\partial n(x)}, \quad \sigma^*(\xi, x) \quad \text{为满足方程}$$

$\nabla^2 \sigma^*(\xi, x) = -\delta(\xi, x)$ 的基本解, 具体表达形式为

$$\begin{cases} \sigma^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) & (\text{二维问题}) \\ \sigma^* = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r} \right) & (\text{三维问题}) \end{cases} \quad (13)$$

将(12)式离散化, 写成矩阵的形式, 则有

$$[A] \{Y\} = \{F\} \quad (14)$$

其中: $\{Y\}$ 是包含有 σ 和 q 的未知向量; $\{F\}$ 是引入了边界条件的已知向量; $[A]$ 是包含了基本解积分的系数矩阵, 求解方程组(14), 即可得到边界节点的全部 σ 和 q 的数值。

三、土体基本方程的边界元解

土体的基本方程见(9)式, 利用加权余量法可建立与(9)式等效的边界积分方程。(9)式的加权余量格式为

$$\int_{\Omega} (\sigma_{k,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma$$

经分部积分, 得到边界积分方程如下

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi) u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) + \int_{\Omega} \sigma(x) u_{ik,k}^*(\xi, x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $u_{ij}^*(\xi, x)$ 为满足方程

$$G u_{i,j,k}^* + \frac{G}{1-2\mu} u_{k,i}^* + \delta(\xi, x) e_j = 0$$

的基本解。其表达达为

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \begin{cases} \frac{-1}{8\pi(1-\mu)G} \{ (3-4\mu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,j} r_{,i} \} & \text{(二维)} \\ \frac{1}{16\pi(1-\mu)Gr} \{ (3-4\mu) \delta_{ij} + r_{,j} r_{,i} \} & \text{(三维)} \end{cases} \quad (16)$$

现将(15)式中的最后两项体积分化成边界积分, 为此引进张量 $G_{ijkl}^{*(2)}$, 则可将(16)式写成统一的格式, 即

$$u_{ij}^* = G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\mu)} G_{ik,kj}^* \quad (17)$$

式中:

$$G_{ij}^* = \begin{cases} \frac{1}{8\pi G} [r^2]_{,i} \left(\frac{1}{r} \right)_{,j} \delta_{ij} & \text{(二维)} \\ \frac{1}{8\pi G} r \delta_{ij} & \text{(三维)} \end{cases}$$

$$\text{则} \quad \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{p}_i d\Gamma \quad (18)$$

式中:

$$\hat{p}_i = \frac{r}{8\pi G} \left\{ \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] (b_i n_k r_{,k} - \frac{1}{2(1-\mu)} b_k r_{,k} n_i) \right\} \quad (\text{二维问题})$$

$$\hat{p}_i = \frac{1}{8\pi G} \left\{ b_i n_k r_{,k} - \frac{1}{2(1-\mu)} b_k r_{,k} n_i \right\} \quad (\text{三维问题})$$

$$\text{而} \quad \int_{\Omega} \sigma u^*_{i k, k} d\Omega = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \int_{\Omega} \sigma_{,i} G^*_{k k, i j} d\Omega$$

利用方程(4), 即 $\sigma_{,ii} = 0$, 可将上式写成

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma u^*_{i k, k} d\Omega &= \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \int_{\Omega} (G^*_{i j, i j} \sigma - G^*_{i k, k j} \sigma_{,j}) d\Omega \\ &= \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \int_{\Omega} (G^*_{i j, i j} \sigma - G^*_{i k, k j} \sigma_{,j})_{,j} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \bar{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_i \sigma_{,k} n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

式中:

对于二维问题

$$\begin{cases} \bar{p}_i = \frac{1-2\mu}{8\pi(1-\mu)G} \left\{ \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right] (n_i - r_{,i} r_{,k} n_k) \right\} \\ \bar{Q}_i = \frac{1-2\mu}{8\pi(1-\mu)G} r_{,i} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right] \end{cases}$$

对于三维问题

$$\begin{cases} \bar{p}_i = \frac{1-2\mu}{16\pi(1-\mu)G} \{ n_i - r_{,i} r_{,k} n_k \} \\ \bar{Q}_i = \frac{1-2\mu}{16\pi(1-\mu)G} r_{,i} \end{cases}$$

将(18)、(19)两式代入(15)式中, 再将(15)式离散化, 写成矩阵的形式, 则有

$$[H] \{u\} = [G] \{p\} + \{B\} + \{D\} \quad (20)$$

式中: $[H]$ 、 $[G]$ 为包含有基本解积分的系数矩阵; $\{u\}$ 、 $\{p\}$ 分别为位移, 面力向量, $\{B\}$ 为体积力向量; $\{D\}$ 为由孔隙压力作用而增加的附加项量。由于求解方程组(14)

式, 已经得到了边界所有各节点的 σ , q 值, 因此 $\{B\}$ 、 $\{D\}$ 都为已知向量。

将(20)式重新排列, 将未知量移到方程组的左端, 已知向量移到方程组的右端, 则(20)式变成

$$[H^*] \{u\} = \{Q\} \quad (21)$$

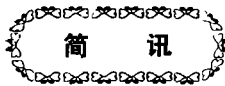
求解线性方程组(21), 即可得到边界节点的全部位移和面力, 进而可以很容易地求出内部各点的位移和应力。

四、结 论

本文提出的用边界元法求解稳定状态下饱和土中的应力和变形的数值方法是可行的。文中所给出的全部计算公式对从事实际工程应用的技术人员具有一定的参考价值, 为用简单的算法求解该问题提供了可能。关于本方法应用于实际的程序化工作将在以后给出。

参 考 文 献

- [1] Chandrakant S. Desai John T. Christian, Numerical Methods in Geotechnical Engineering McGraw-Hill Book Company, 1977
- [2] C. A. Brebbia J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer-verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984
- [3] Finite Elements in Geomechanics Edited by G. Gudehus, John Wiley & Sons, Ltd. 1977



我校蔡彪老师被选为美国声学学会会员

我校物理教研室声学组蔡彪老师近几年在消声室方面进行了有成果的研究, 经同济大学王季卿教授和美国声学学会建筑声学委员会主席E. A. Wetherill先生的推荐, 最近, 蔡彪老师被选为美国声学学会会员(Member)。

美国声学学会的会员分四个等级: 学生会员(Student Member)、准会员(Associate Member)、会员(Member)和特别会员(Fellow)、该会与各国声学家保持广泛的联系。