混凝土损伤模型概述

——"结构损伤"课题报告之一

张安哥 谢 敏 刘 平

(工程力学研究室)

摘 要

混凝土材料由于其微观不均匀性而呈现出复杂多变的力学性能。计算机的不断翻新更代为混凝土结构的力学分析提供了强有力的计算手段而突出了以往的混凝土本构关系的数学模型满足不了计算精度要求这一矛盾。本文扼要地介绍近十余年来国际上从损伤力学、细观力学、断裂力学和内时理论等固体力学分支出发建立的一些典型的混凝土损伤模型。

一 概 述

现代科学技术的发展已为大型复杂的混凝土结构设计提供了计算机模拟的可能，以便取代耗资巨大的结构实验。但要保证计算机模拟的精度，其关键是要建立能正确反映出材料复杂力学行为的本构模型。

迄今为止的混凝土结构强度设计理论仍是建立在材料线弹性或线弹性——理想塑性本构关系的基础之上的。然而，近年来对各种强度的混凝土料材的试验表明，在多轴应力状态下，尤其是在破坏前，混凝土材料的力学行为比较复杂。在偏应力张量（应力空间主轴不变）接近峰值时，材料呈应变软化及非线性体积膨胀等现象。在交变荷载作用下卸载弹性模量随应变增大而减少。材料受损后，局部呈一定的各向异性。

鉴于上述情况，近年来兴起了各种损伤理论，旨在建立一种更为精确的本构模型。其基本思想是，材料从承载直至破坏是一个连续的损伤累积的过程，问题的关键在于如何来定义一个既便于客观测试又能正确地反映材料损伤过程的损伤变量。

二 混凝土损伤的微观机理

未受损的混凝土材料在微观上具有大量的弥散分布的空穴和微裂纹，这些空穴和微裂纹

本文于1988年12月25日收到

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

通常是在水化和硬化过程中形成的。这些微观缺陷在外载的作用下的发展演变，相互作用以至汇聚成主干裂纹是导致混凝土材料出现上述复杂的宏观力学行为的主要原因。

通常，在进行材料微观机理分析时要从材料中取出一材料构元，该构元大得足以反映材料微观性能的统计特性，另一方面该构元又应足够地小，以致能把它看成连续介质力学中的一个材料点，此即所谓宏观无限小微观无限大的力学模型〔1〕。这种构元在尺度上可分为宏观级，细观级和微观级三种层次〔2〕：

1、宏观级：构元的非均匀性由大包体即粗骨料引起，原生缺陷来源于粗骨料和砂浆之间的沉降、干缩和滑动。该构元的线尺寸为100mm量级。

2、细观级：该构元着眼于“大”包体之间的砂浆体，其非均匀性主要是由“小”包体即细骨料颗粒引起。其线尺度为10mm量级。

3、微观级：主要考虑“小”包体之间的硬化水泥石体，其非均匀性来源于水泥石体中的弥散分布孔洞。孔的不同分布引起应力集中和形成微裂纹。孔的最大尺度约0.1mm，该构元的线尺度约0.5mm。

混凝土材料损伤的微观机理根据研究对象的不同可分为两大类情况：素混凝土和混凝土构件即钢筋混凝土。

1、素混凝土裂纹机理

通常有如下三种观点〔2〕、〔3〕：

i、Grudemo裂缝通道及阻档构元（1979）：水泥石体中存在四种裂缝通道体，亦即CH基团间的片状裂纹，穿过凝胶壳内外部的径向裂纹，相邻胶粒间的接触处和绕过未水化水泥核的球面状裂纹。同时，水泥石体中还存在两种阻挡体，即CH相平面和Hadley壳的内核裂纹前沿钝化。Grudemo构元属于微观级。

ii、Ziteev-Wittmann骨料干扰构元（1977）：

裂缝从骨料界面引发，随后在载荷作用下向基体扩展，裂纹尖端遇到骨料后受阻，然后沿阻挡骨料界面扩展，如此反复，直至破坏。该构元属于宏观级。

iii、Higgine-Bailey平行裂纹缝构元（1976）：

水泥石开裂时裂纹区中的微裂纹平行于主裂缝的扩展方向，主裂缝在扩展过程中不断地吞并部分微裂纹。该构之属于细观级。

2、混凝土构件裂缝机理〔2〕

在各种引起钢筋混凝土结构裂缝的因素中，温度和收缩是两个比较重要的因素。其裂缝机理也可分为如下三类：

i、Saligar粘结滑动机理（1936）：

裂缝的形式和控制扩展主要原因是钢筋与混凝土之间变形不协调而引起的相对滑动。影响裂缝间距的变量是钢筋直径和配筋率。

ii、Broms-Base无滑动理论（60年代）：

裂缝扩展的控制因素是裂缝截面钢筋至构件表面应变梯度，因而保护层厚度对裂缝宽度有直接影响。

iii、裂缝的综合机理（70年代）：

综合粘结滑动和无滑动机理，该理论既考虑应变梯度的影响又考虑钢筋与混凝土之间可能出现的粘结滑动。欧州混凝土委员会（CEB）1970年推荐的裂缝计算公式属于该理论。其

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

主要变量为保护层厚度，钢筋直径和配筋率。

三 混凝土损伤模型

为了更准确地描绘混凝土材料复杂多变的力学特性，近十余年来各国学者从损伤力学，细观力学，断裂力学和内时理论等不同角度出发，提出了一些混凝土损伤模型。如Krajcinovic的建立在不可逆热力学框架下的连续损伤力学向量模型〔4〕和Mazars1982年提出的混凝土凝土损伤标量模型〔5〕。1986年Krajcinovic和Fanella建立了混凝土受单向拉伸时的微观机制本构模型〔6〕，此后又进一步发展了一个受三向应力作用的本构模型〔7〕。此外，还有Dragon-Mroz的连续损伤力学张量模型〔8〕以及由法国学者Valanis〔9〕奠基的内时理论损伤模型。近几年来，细观损伤力学异军突起，也建立了弥散分布微裂纹模型〔10〕。下面分别对上述模型作一简介。

1，Krajcinovic的连续损伤力学向量模型〔4〕：

在不可逆热力学框架下，Krajcirovic和Fonseka给出了脆性材料中有圆片状裂纹分布的损伤模型，并导出了空隙演化的运动学方程和损伤发展与应变增量之间的关系。

设Helmhotlz自由能ψ为应变张量ε，损伤矢量$\vec{D}$和温度T的函数，则ψ可表示为应变的二次型函数：

$$\rho\psi=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\varepsilon_{kk}\varepsilon_{LL}-\mu(\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}-\varepsilon_{kL}\varepsilon_{kL})+\overline{C}_1D_k\varepsilon_{kL}D_L\varepsilon_{MM}+\overline{C}_2D_k\varepsilon_{ML}\varepsilon_{LM}D_M \tag{1}$$

其中λ，μ是Lame常数，本模型忽略了损伤对λ，μ的影响。ρ是密度。$\overline{C}_i$是与$\vec{D}$，T有关的材料参数。

在等温过程中，
$$\sigma_{IJ}=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{IJ}} \tag{2}$$

或有
$$\sigma_{IJ}=K_{IJKL}\varepsilon_{KL} \tag{3}$$

$$d\sigma_{IJ}=K_{IJKL}d\varepsilon_{KL}+\overline{K}_{IJM}dD_M \tag{4}$$

若设$\vec{\omega}=\omega_N\vec{N}$是法线为$\vec{N}$的横截面上的空隙密度矢量（密度为$\omega_N$），且定义损伤矢量为

$$\vec{D}=D_N=\omega_N^{3/1}\vec{N} \tag{5}$$

则

$$K_{IJKL}=\lambda\delta_{IJ}\delta_{KL}+2\mu\delta_{IK}\delta_{JL}+C_1(\delta_{IJ}\omega_k\omega_L+\delta_{kL}\omega_I\omega_J)+C_2(\delta_{Ik}\omega_I\omega_L+\delta_{IL}\omega_J\omega_k) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\overline{K}_{IJM}=&C_1\varepsilon_{kL}[\delta_{IJ}(\delta_{kM}\omega_L+\delta_{LN}\omega_k)+\delta_{kL}(\delta_{IM}\omega_J+\delta_{JM}\omega_I)]\\&+C_2\varepsilon_{kL}[\delta_{Jk}(\delta_{IM}\omega_L+\delta_{LM}\omega_I)+\delta_{IL}(\delta_{JM}\omega_k+\delta_{kM}\omega_J)]+2[C_1(\delta_{IJ}\omega_k\omega_L+\delta_{kL}\omega_I\omega_J)\\&+C_2(\delta_{Ik}\omega_I\omega_L+\delta_{IL}\omega_I\omega_k)]\frac{\omega_M}{\omega_p\omega_p}\varepsilon_{kL}\end{aligned} \tag{7}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中 $C_i=\dfrac{\overline{C_i}}{\sqrt{\omega_p\omega_p}}$

应力应变的增量方程（4）可写成：

$$d\sigma_{IJ}=k_{IJkL}d\varepsilon_{kL}+\overline{k}_{IJM}d\omega_M \tag{8}$$

通过空隙在物质标架X^k和空间标架x^k中的运动分析，导出的空隙演化的运动学方程为：

$$d\omega_i=\omega_N(d\Omega_{NN}n_i+\tfrac{1}{2}e_{ijk}d\Omega_{kj}) \tag{9}$$

小写下标表示空间标架中的分量，大写下标表示物质标架（原始构形）中的分量，式中

$$d\Omega_{NN}=\left(\frac{da-dA}{dA}\right)N \tag{10}$$

A_N是法线为$\vec{N}$的横截面积，a_n和n_i是空间标架中A_N，N_i的映射。e_{ijk}是置换张量。

对于脆性材料定义了一个损伤面$f=f(\underset{\sim}{\varepsilon}、\vec{\omega}、T)$，则损伤发展与应变增量之间的关系为（损伤律）：

$$d\Omega_{IJ}=kG(\underset{\sim}{\varepsilon}、\overline{\omega}、T)\left(\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{NN}}d\varepsilon_{NN}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{NT}}d\varepsilon_{NT}\right)\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{IJ}}$$

$$(I、J=N、T) \tag{11}$$

其中G是状态不变量和内变量的非负标量函数。在损伤面和损伤面内，系数$k=0$，在损伤面外$k=1$。

下面以单向拉伸为例，导出损伤材料的应力应变响应。

由方程（3）有：

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\0\\0\end{bmatrix}=Ek_1\begin{bmatrix}1+(c_1+c_2)\omega & \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega & \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega\\ \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega & 1 & \overline{\nu}\\ \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega & \overline{\nu} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\end{bmatrix} \tag{12}$$

其中 $\overline{\nu}=\dfrac{\nu}{1-\nu}$ $\qquad k_1=\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1+2\nu)}$

其增量方程可从（4）求出：

$$\begin{Bmatrix}d\sigma_{11}\\0\\0\end{Bmatrix}=Ek_1\begin{bmatrix}1+(c_1+c_2)\omega & \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega & \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega\\ \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega & 1 & \overline{\nu}\\ \overline{\nu}+\frac{1}{2}c_1\omega & \overline{\nu} & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d\varepsilon_{11}\\d\varepsilon_{22}\\d\varepsilon_{33}\end{Bmatrix}+Ek_1$$

$$\begin{bmatrix}(c_1+c_2)\varepsilon_{11}+\frac{1}{2}c_1(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\\ \frac{1}{2}c_1\varepsilon_{11}\\ \frac{1}{2}c_1\varepsilon_{11}\end{bmatrix}d\omega \tag{13}$$

假定损伤面为双曲线形（在应变空间），则

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f=\varepsilon_{11}+(B_1-B_2)\omega=0 \qquad \text{当}\ \varepsilon_{11}d\varepsilon_{11}>0 \tag{14}$$

$$d\varepsilon_{11}=(B_2-B_1)d\omega$$

式中B_1、B_2是材料参数，依赖温度T。在损伤面内，即$f<0$时，$d\omega=0$、或当$f=0$，且$\varepsilon_{11}d\varepsilon_{11}<0$时，$d\omega=0$。

若ω^0是初始损伤值，如混凝土浇注时的空隙密度或前级载荷下的损伤，则当

$$\varepsilon_{11}\geqslant(B_2-B_1)\omega^0=\varepsilon^0{}_{11} \tag{15}$$

时损伤增加。

由(12)及(15)、得

$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-(1-\nu)\left(\frac{\nu}{1-\nu}+\frac{1}{2}\frac{C_1}{B_2-B_1}\varepsilon_{11}\right)\varepsilon_{11} \qquad \text{当}\ \varepsilon_{11}>\varepsilon_{11}{}^0 \tag{16}$$

$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-(1-\nu)\left(\frac{\nu}{1-\nu}+\frac{1}{2}C_1\omega^0\right)\varepsilon_{11} \qquad \text{当}\ \varepsilon_{11}<\varepsilon_{11}{}^0 \tag{17}$$

再由(13)式积分，可得应力一应变关系如下：

$$\frac{1}{Ek_1}\sigma_{11}=\left(1-\frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)\varepsilon_{11}+\frac{1}{B_2-B_1}\left[C_2+(1-2\nu)C_1\right]\varepsilon_{11}{}^2-\frac{1-\nu}{2}\frac{C_1{}^2}{(B_2-B_1)^2}\varepsilon_{11}{}^3$$

$$\text{当}\ \varepsilon_{11}>\varepsilon_{11}{}^0 \tag{18}$$

$$\frac{1}{Ek_1}\sigma_{11}=\left[1-\frac{2\nu^2}{1-\nu}+C_1(1-2\nu)\omega^0+C_2\omega^0-\frac{1-\nu}{2}C_1{}^2(\omega^{02})\right]\varepsilon_{11}$$

$$\text{当}\ \varepsilon_{11}<\varepsilon_{11}{}^0 \tag{19}$$

2、Mazars模型〔5〕

在单轴应力情况下，受损材料的本构方程为：

$$\sigma=(1-D)E\varepsilon \tag{20}$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=(1-D)E+\frac{dE}{d\varepsilon}(1-D)\varepsilon-E\varepsilon \tag{21}$$

因为E=常数（无损材料的杨氏模量）、故$\frac{dE}{d\varepsilon}=0$、

又因为损伤是不可逆的，故不能为负，卸载时$\frac{dD}{d\varepsilon}=0$、由(21)式有：

$$D=1-\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{22}$$

一般情况下，$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$是$\varepsilon$的函数。参照上式可得损伤的一般表达式：

$$D=f(\varepsilon) \tag{23}$$

法国学者Mazars在他的国家博士论文中提出如下模型：

$$\sigma=E\left\{\varepsilon_{th}(1-A_T)+\frac{A_T\varepsilon_M}{\exp\left[B_T(\varepsilon_M-\varepsilon_{th})\right]}\right\} \tag{24}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中：ε_{th}——开始损伤的应变阈值

ε_M——即时最大应变

A_T、B_T——材料常数

下标"T"表示拉伸情况，利用（20）式可得损伤方程：

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{th}(1-A_T)}{\varepsilon_M} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\varepsilon_M-\varepsilon_{th})]} \quad (25)$$

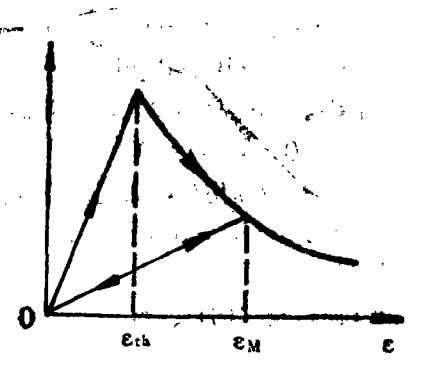

图 1

这里，当$\varepsilon_M \leqslant \varepsilon_{th}$时，$D_T = 0$；当$\varepsilon_M > \varepsilon_{th}$时，$D_T \neq 0$，利用实验结果可以确定$A_T$、$B_T$和$\varepsilon_{th}$的取值情况。

当沿x_1轴进行压缩时，应变张量为：

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\varepsilon_1 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_1 < 0) \quad (26)$$

定义等效应变为：

$$\varepsilon^* = \sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle_+^2 + \langle\varepsilon_2\rangle_+^2 + \langle\varepsilon_3\rangle_+^2} \quad (27)$$

故$\varepsilon^* = \mu\varepsilon_1 \sqrt{2}$。上式中符号"$\langle\ \rangle_+$"表示取正号线应变。对单轴压缩，有经验公式：

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{th}(1-A_C)}{\varepsilon^*} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\varepsilon^* - \varepsilon_{th})]} \quad (28)$$

下标C表示压缩情况，A_C、B_C为材料常数。

3，Fanella—Krajcinov模型（1988）〔7〕

早期的唯象学连续损伤模型虽然强调了材料内部的微缺陷与宏观响应的关系的重要性，但是它们在选择描述微观裂纹的演变方程上表现出一定的随意性。而该模型则通过对混凝土的微观开裂机理的分析，导出了模拟混凝土内的微裂纹扩展的解析表达式，从而建立了一个受多向压缩素混凝土的三维微观机理本构模型。

i、混凝土的微观开裂机理

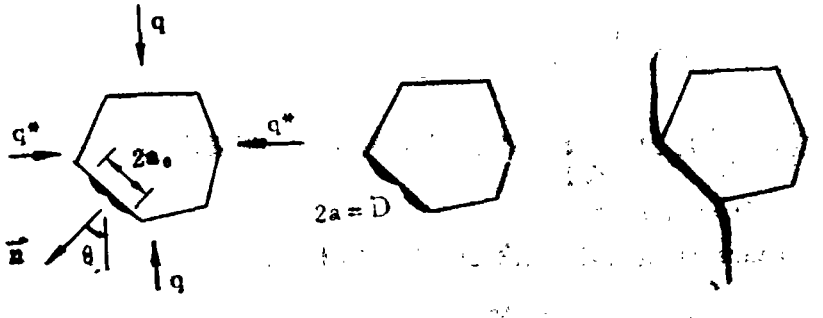

图 2

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当轴向压应力超过某一门槛值后，混凝土中的原生界面微裂纹将以Ⅱ型断裂方式(滑移)发展，并终止于界面的边缘，这个过程是一个不稳定的瞬时过程。当载荷继续增大时，裂尖应力强度因子将超过水泥石体的临界应力强度因子，从而在界面裂纹的两个裂尖上形成翼形张开裂纹，在横向受压情况下，这些张开裂纹的扩展是稳定的。

根据这一摩擦滑移开裂模型，可导出损伤发展的运动方程。为使问题简化，假设：①微裂纹为圆形片状裂纹；②裂纹间的相互作用可忽略；③微裂纹是嵌埋在一各向同性均匀的弹性基体中。

ii、损伤演变的运动方程

以素混凝土受三向压缩为例，即圆柱形试样一直到载列横向应力$\sigma_{11}=\sigma_{22}=q^*$，此后横向应力保持不变，而轴向应力$\sigma_{33}=q$一直增加，直至破坏。在这一情况下，可求得某一裂纹面上的正应力σ_n和描应力τ_n为：

$$\sigma_n=q\cos^2\theta+q^*\sin^2\theta$$

$$\tau_{(n,s)}=F(\theta)\left[q-\left(1+\left(\frac{\mu}{F(\theta)}\right)q^*\right]\right. \tag{29}$$

式中：$F(\theta)=\sin\theta\cos\theta-\mu\cos^2\theta$

θ角度定义如图2所示，为裂纹面的干摩擦系数（对混凝土，$\mu\approx0.6$）。

当$\tau_{(n,s)}\geqslant 0$时，裂纹面间有相对滑动的趋向，设K^{if}_{Ic}为界面的Ⅱ型临界应力强度因子，则当某裂纹（其$\tau_{(n,s)}\geqslant 0$）尖端的应力强度因子K_I满足$K_I\geqslant K_{Ic}^{if}$时，裂纹的尺寸将由2a。增至D，这里D为骨料的有效直径。由此可导出裂纹进入Ⅱ型扩展时的轴压q与裂纹直径D和方向θ角的关系式：

$$q=\frac{(2-\nu)}{4\rho F(\theta)}\sqrt{\frac{2\pi}{D}}+\left[1+\frac{\mu}{F(\theta)}\right]q^* \tag{30}$$

式中ν为料材的泊松比，标量ρ定义了骨料的初始破裂界面的相对大小（$\rho<1$）。由上式可导出能被激活的裂纹的直径：

$$D(\theta)=2\pi\left[\frac{(2-\nu)\,K_{Ic}^{if}}{4\rho G(\theta)}\right]^2 \tag{31}$$

式中：$G(\theta)=F(\theta)\{q-q^*[1+\mu/F(\theta)]\}$

随着轴压q的进一步增加，已由$2a_0$增至D的裂纹将向水泥石体内扩展。利用最大拉应力准则，仿照前面的分析可导出方向角θ的裂纹进入扭折（Kink）扩展时的直径$D(\theta)$的表达式：

$$D(\theta)=2\pi\left[\frac{(2-\nu)K_{Ic}^{if}}{8G(\theta)}\right]^2 \tag{32}$$

式中K^c_{Ic}为水泥石体的Ⅰ型临界应力强度因子。

根据上述结果，最后得到一个在三维（D、θ、q）的空间内混凝土材料中裂纹的各种形态的分区图。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

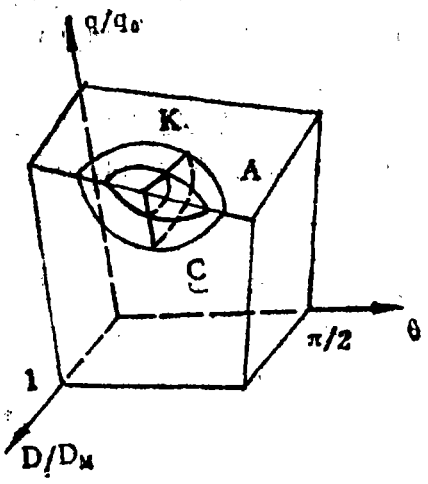

图 3

K——扭折裂纹

A——Ⅱ型激活裂纹

C——闭合裂纹

iii、响应函数及应变张量

从被原生缺陷所弱化的混凝土中取一单元体来考虑。设单元体体积v内的局部应力应变场为$\underline{\sigma}^*(x)$、$\underline{\varepsilon}^*(x)$、整个试样的应力应变场记为$\underline{\sigma}$和$\underline{\varepsilon}$。根据前述的简化假定，在单元体体积v内取平均可得宏观应力应变张量：

$$\overline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{v}\int_v \underline{\sigma}^* \, dv$$

$$\overline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{v}\int_v \underline{\varepsilon}^* \, dv + \sum \underline{\varepsilon}^{'}$$

其中$\sum \underline{\varepsilon}^{'}$反映了裂纹表面的位移不连续性对总应变的影响。

设$\vec{b}$是物体内某裂纹的间断位移向量，对所有的裂纹面之间有相对运动的裂纹来说$\vec{b}>0$将上式中的求和推广到所有动裂纹($\vec{b}>0$)，则有：

$$\overline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2v}\sum_k (\overline{\vec{b}\,\vec{n}} + \overline{\vec{n}\,\vec{b}})_k A^{(k)} \tag{33}$$

式中：$\underline{\varepsilon}^0 = \frac{1}{v}\int_v \underline{\varepsilon}^* \, dv$，　　$\overline{\vec{b}} = \frac{1}{A^{(k)}}\int_{A^{(k)}} \vec{b}\, dA^{(k)}$

这里k是$\vec{b}>0$的裂纹的数目，$A^{(k)}$是裂纹面面积，其法矢量为$\vec{n}$。

去掉（33）式中各量上面的一杠（它表示期望值），最后可将式（33）写成如下形式：

$$\varepsilon_{ik} = S_{ikmn}\sigma_{mn} \tag{34}$$

式中S_{ikmn}即为损伤材料的宏观响应张量，它可写成：

$$S_{ikmn} = S^{c}_{ikmn} + \frac{1}{v}\sum a^3 b_{ikmn} \tag{35}$$

这里S^{c}_{ikmn}为原始材料的弹性模量，b_{ikmn}为四阶的间断位移张量。

a、当裂纹尺寸由$2a_0$增至D时（亦即裂纹被Ⅱ型激活时），总的应变可写成：

$$\varepsilon_{ki} = \varepsilon^{c}_{ik} + \varepsilon^{if}_{ik} \tag{36}$$

式中ε^{c}_{iK}为弹性应变，ε^{if}_{iK}是由于裂纹尺寸由$2a_0$增至D所引起的非弹性应变：

$$\varepsilon_{iK} = \frac{1}{v}\sum \left(\frac{D}{2}\right)^3 b^{(f)}_{iKmn}\sigma_{mn} \tag{37}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这时响应函数为：

$$S_{iKmn} = S^{e}_{iKmn} + S^{if}_{iKmn} \tag{38}$$

b、当部分直径$2\alpha = D$的界面裂纹发生扭折扩展时，总的应变为：

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{e} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{if2} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{if1} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{ik} \tag{39}$$

式中：$\underset{\sim}{\varepsilon}^{e}$——弹性应变张量，

$\underset{\sim}{\varepsilon}^{if2}$——裂纹尺寸由$2a_0$增至D引起的非弹性应变张量。

$\underset{\sim}{\varepsilon}^{if1}$——进入水泥石体的界面裂纹的相对滑移引起的非弹性应变张量。

$\underset{\sim}{\varepsilon}^{ik}$——由扭折裂纹的张开所引起的非弹性应变张量。

此时，响应张量可表示为：

$$S_{iKmn} = S^{e}_{iKmn} + S^{if2}_{iKmn} + S^{if1}_{iKmn} + S^{ik}_{iKmn} \tag{40}$$

文章通过对骨料尺寸（即有效直径D）和裂纹方位θ角的均匀性分布假设，并利用前面对损伤演变运动方程讨论的结果，推导出了上述各量的解析表达式，它们都需通过数值积分进行计算。从文中给的一些实验曲线与计算曲线来看，由该模型所得结果与实验值相差很小。

4、Dragon—Mroz模型〔8〕

考虑一具有体积分布裂纹的连续介质。定义损伤参数为一张量：

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{v}\sum_{k=1}^{m}\int_{A^{(k)}} n_i^{(k)} b_j^{(k)} dA^{(k)} \tag{41}$$

式中：$n_i^{(k)}$——裂纹表面$A^{(k)}$的单位法向量

$b_j^{(k)}$——裂纹表面的间断位移向量

v——所取单元体的体积

m——单元体内微裂纹的数目

5、脆弹性模型

设$U(\underset{\sim}{\varepsilon}、\underset{\sim}{\varphi})$和$W(\underset{\sim}{\sigma}、\underset{\sim}{\varphi})$分别为变形能和变形余能，有：

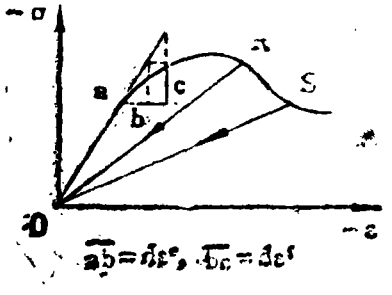

图 4

$$\sigma_{KL} = \frac{\partial U(\underset{\sim}{\varepsilon}、\underset{\sim}{\varphi})}{\partial \varepsilon_{KL}}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W(\underset{\sim}{\sigma}、\underset{\sim}{\varphi})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{42}$$

与塑性理论相似，引入一个损伤面的概念。假设损伤面为：

$$F(\underset{\sim}{\sigma}、\underset{\sim}{\varphi}) = 0 \quad 或 \quad \phi(\underset{\sim}{\varepsilon}、\underset{\sim}{\varphi}) = 0 \tag{43}$$

对于一个损伤发展的过程，可写出（图4）：

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{f}_{ij} = A_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + B_{ijkl}\dot{\varphi}_{kl} \tag{44}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

利用（42）式，有：

$$A_{ijKl}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}},\qquad B_{ijKl}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{ij}\partial\varphi_{Kl}} \tag{45}$$

式中：$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$——纯弹性应变速率

$\dot{\varepsilon}^{f}_{ij}$——损伤过程引起的应变速率。

在中性加载时（沿损伤面$F=0$），有$\dot{\varphi}^{f}_{ij}=\dot{\varepsilon}^{f}_{ij}=0$，故有：

$$\dot{\varphi}_{ij}=C_{ij}(\underline{\sigma},\underline{\varphi})\langle\dot{F}\sigma\rangle=\frac{1}{K}C_{ij}\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma_{mn}}\dot{\sigma}\right\rangle \tag{46}$$

$$\dot{\varepsilon}^{f}_{ij}=D_{ij}(\underline{\sigma},\underline{\varphi})\langle\dot{F}\sigma\rangle=\frac{1}{H}d_{ij}\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma_{mn}}\dot{\sigma}_{mn}\right\rangle \tag{47}$$

式中：C_{ij}、d_{ij}为正交化张量（$C_{ij}C_{ij}=d_{Kl}d_{Kl}=1$）

H、K为$\underline{\sigma}$和$\underline{\varphi}$的标量函数

$$\langle\dot{F}\sigma\rangle=\begin{cases}\dot{F}\sigma, & \dot{F}\sigma>0\\ 0, & \dot{F}\sigma\leqslant 0\end{cases}$$

将（47）式代入（48）式有：

$$\dot{\varphi}_{ij}=\frac{H}{K}C_{ij}\left(\dot{\varepsilon}^{f}_{Kl}\ \dot{\varepsilon}^{f}_{Kl}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

利用（46）、（47）两式可得：

$$\dot{\varepsilon}^{f}_{ij}=\frac{1}{H}d_{ij}\cdot\frac{K}{C_{Kl}}\dot{\varphi}_{Kl}$$

又因为$\dot{\varepsilon}^{f}_{ij}=B_{ijKl}\dot{\varphi}_{Kl}$，所以有：$\frac{1}{H}d_{ij}=\frac{B_{ijKl}C_{Kl}}{K}$代入（44）式，得：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=A_{ijmn}\dot{\sigma}_{mn}+\frac{1}{K}B_{ijKl}C_{Kl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{mn}}\dot{\sigma}_{mn}=(A_{ijmn}+F_{ijmn})\dot{\sigma}_{mn} \tag{49}$$

式中：$F_{ijmn}=\frac{1}{H}d_{ij}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{mn}}$

利用另一种形式的损伤面$\phi(\underline{\varepsilon},\underline{\varphi})=0$，可导出用$\dot{\varepsilon}$表示$\dot{\sigma}$的本构速率方程。

ii、弹塑性模型

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

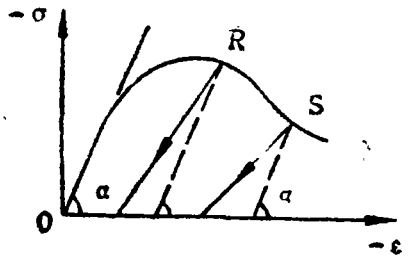

图 5

该模型认为受损材料的弹性性质不受损伤过程的影响，且因损伤演变而产生的应变可用塑性应变来表征，即有应变速率为：

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{f}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \qquad (50)$$

假设屈服条件与损伤参数$\underset{\sim}{\varphi}$和硬化参数 k 有关，屈服面可表示为：

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varphi}, k) = 0 \qquad (51)$$

和前面推导过程相似，可得流动法则：

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \frac{1}{H} n_{ij} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}_{Kl}} \dot{\underset{\sim}{\sigma}}_{Kl} \qquad (52)$$

式中n_{ij}为正交化张量($n_{ij}n_{ij} = 1$)，它可用层服函数$f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varphi}, k)$的梯度张量来表示。损伤率和硬化率可写成：

$$\dot{\varphi}_{ij} = a_{ijKl}\, \dot{\varepsilon}^{p}_{kl}, \quad \dot{k} = b(\dot{\varepsilon}^{p}_{Kl}\, \dot{\varepsilon}^{p}_{Kl})^{2/1} \qquad (53)$$

式中a_{ijKl}和b为材料函数。

iii、脆性弹塑性模型

该模型认为损伤材料的宏观行为是前面二个模型所描述的材料性质(即脆弹性和弹塑性)的组合叠加。在此情况下，材料的应力一应变曲线如图6所示，应变速率可写成：

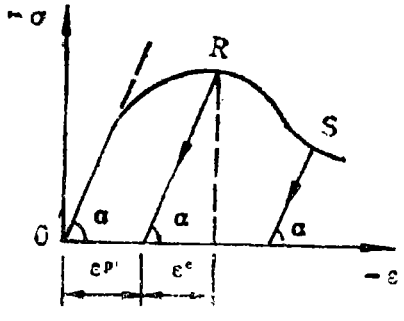

图 6

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{f}_{ij} \qquad (54)$$

其中$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$和$\dot{\varepsilon}^{f}_{ij}$分别由式(52)和式(47)给出，$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}$为纯弹性应变速率。

5、内时理论模型(Endochronic Theory)

内时理论于1971年首先由Valanis〔9〕作为没有屈服面的塑性理论提出来。该理论是模仿Biot的线性粘弹性理论，建立在Onsager不可逆热力学基础之上的。其基本概念是：塑性和粘塑性材料内任一点的现时应力状态是该邻域内整个变形史和温度史的泛函，而该历史是用一个取决于变形中材料特性和变形程度的内蕴时间来量度的〔1〕。内时理论以后被用于解决金属的循环蠕变和松弛，岩石，混凝土，砂子的应变软化〔11〕等工程实际问题，并取得了一定的成功。

对于具体应变软化特性的混凝土，岩石和砂土等材料，其偏斜应力响应的本构方程为〔11〕

$$S_{ij} = S^{0}_{r} \frac{de^{p}_{ij}}{dz} + a e^{p}_{ij} + b \int_{0}^{z} e^{-a(z-z')} \frac{\partial e^{p}_{ij}}{\partial z'} dz' \qquad (55)$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中，S_{ij}——偏应力张量

S_y^0——初始屈服应力

e^p_{ij}——塑性偏应变

a、b、α——材料参数

z即所谓的内时标度(Intrisc time scale)，其定义为

$$dz = \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \tag{56}$$

ζ是内时量度（Intrinsic time measure），$d\zeta = \|de^p_{ij}\|$，$\|\cdot\|$表示欧几里德模。$f(\zeta)$是材料的硬化函数，取决于材料的硬化（软化）特性。

文献〔12〕中取：

$$f(z) = m + ne^{-\alpha z} \tag{57}$$

其中m、n为材料参数。在一维剪切情况下（图7）（常规三轴试验），e^p_{ij}中只有塑性剪应变r^p不为0，则$d\zeta = d\gamma^p$，由（56）式，得

$$d\gamma^p = (m + ne^{-\alpha z})dz \tag{58}$$

由（58）式和$z = 0$和$\gamma^p = 0$的条件，有

$$\gamma^p = mz + \frac{n}{\alpha}(1 - e^{-\alpha z}) \tag{59}$$

其偏应力响应为

$$S = m(S_y^0 + \frac{b}{\alpha}) + a\gamma^p + (ns_y^0 - \frac{mb}{\alpha} + nbz)e^{-\alpha z} \tag{60}$$

当γ^p很大时，$S = S_r$是有限量，必有$a = 0$（60）式成为

$$S = m(s_y^0 + \frac{b}{\alpha}) + (ns_y^0 - \frac{mb}{\alpha} + nbz)^{-\alpha z} \tag{61}$$

式中m、n、α、b四个参数由如下条件确定

当$Z = 0$时，$S = S_y^0$，得

$$m + n = 1 \tag{62}$$

当$Z \to \infty$时，$S = S_r$，得

$$S_r = m(S_y^0 + \frac{b}{2}) \tag{63}$$

设峰值点S、γ^p、Z为S_m、γ^p_m和Z_m，

则按 $\frac{ds}{d\gamma^p} = 0$ 有

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{ds}{d\gamma^p}=\frac{ds}{dz}\frac{dz}{d\gamma^p}=\frac{ds}{dz}\cdot\frac{1}{m+ne^{-\alpha z}}=0$$

必有 $\frac{ds}{dz}=0$，可导出

$$Z_m=\left(\frac{b}{\alpha}-nS_r^0\right)\frac{1}{nb} \tag{64}$$

再由式（59），有

$$\gamma^p{}_m=mz_m+\frac{n}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha z_m}\right) \tag{65}$$

由（62）～（64）定出材料参数后，代入（61）式即可得到材料的偏应力响应。该模型较好地符合了有应变软化特性材料的实验数据。

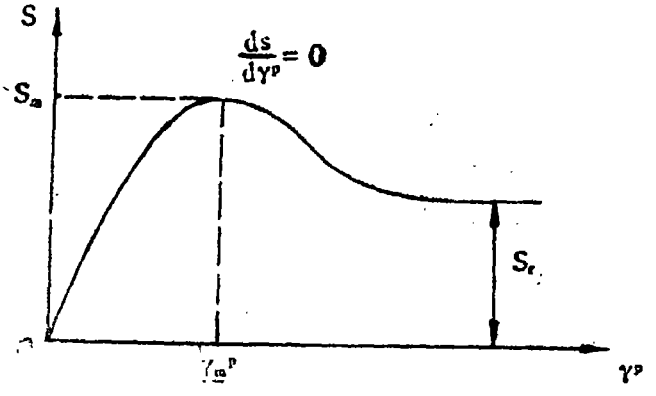

图　7

6、弥散分布微裂纹细观损伤模型〔10〕

为了避免宏观损伤模型中按唯象学假设建立的损伤内变量物理涵义不够明确的缺点，近年来国际上展开了对细观损伤力学的研究。其目的在于对损伤变量和损伤演变过程赋以真实的几何形象和物理过程。它的基本分析方法是，从损伤材料中取出一个在几何尺寸上可视为无穷小，但包含了材料损伤的基本信息的材料构元。整个结构或构件则由无数构元"装配"而成。故对一材料构元导出的本构方程和损伤演变规律可直接用来分析结构或构件的宏观损伤行为。下面介绍的弥散分布微裂纹损伤模型，即按细观损伤力学建立的Ortiz模型〔13〕。

在混凝土中存在大量弥散分布的微裂纹，这些微裂纹的存在和演变造成体膨胀，非同轴性，非弹性应变，应变软化等一系列本构行为和压应力劈裂，流动局部化，裂纹闭合等一系列损伤破坏行为。

本模型从等效弹性体的概念出发，即将受损材料看成是其切线刚度张量L变化了的弹性体。材料的损伤演变过程被看成是材料的切线刚度不断下降的过程。利用单位体积上能量等效

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

原则，导出等效弹性体的切线刚度张量$\underset{\sim}{\overline{L}}$，然后可按常规的弹性体力学方法计算材料的应力响应。

考虑在各向同性无穷介质中有一圆币状单裂纹，半径为a，则由线弹性断裂力学，该裂纹的存在所释放出的能量U为：

$$U=\frac{a^3}{E}(A\sigma^2+B\tau^2) \tag{66}$$

$$\text{其中 } A=\frac{8}{3}(1-\nu^2), \quad B=\frac{2}{2-\nu}A \tag{67}$$

ν是泊松比。

现设单位体积内（材料构元）有随机分布的n个币状裂纹，该构元的等效切线刚度张量为$\underset{\sim}{\overline{L}}$，则单个币状裂纹在此等效弹性体中的能量释放为：

$$U=\frac{a^3}{\overline{E}}(\overline{A}\sigma^2+\overline{B}\tau^2) \tag{68}$$

$$\text{其中 } \overline{A}=\frac{8}{3}(1-\overline{\nu}^2), \quad \overline{B}=\frac{2}{2-\overline{\nu}}\overline{A} \tag{69}$$

$\overline{E}$，$\overline{\nu}$分别为等效弹性体的弹性模量和泊松比。

按单位体内能量等效原则，即等效弹性体在应力张量$\underset{\sim}{\sigma}$作用下的应变能应等于无裂纹基体的应变能减去由于形成裂纹所释放的应变能，故有：

$$\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}:\underset{\sim}{\overline{L}}^{-2}:\underset{\sim}{\sigma}=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}:\underset{\sim}{L}^{-1}:\underset{\sim}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}U_i(a,\underset{\sim}{\overline{L}},\underset{\sim}{\sigma}) \tag{70}$$

若$\underset{\sim}{\sigma}$是球形张量，分量为p，则有

$$\frac{p^2}{2\overline{k}}=\frac{p^2}{2k}+\sum\frac{p^2a^3}{E}\cdot\frac{8}{3}(1-\overline{\nu}^2) \tag{71}$$

式中 $K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$ $\overline{K}=\frac{E}{3(1-2\overline{\nu})}$分别为基体和等效弹性体的体积刚度。代入（71）式中，有

$$\frac{\overline{K}}{K}=1-\frac{16}{9}\frac{1-\overline{\nu}^2}{1-2\overline{\nu}}\cdot f \tag{72}$$

式中$f=n\cdot\langle a^3\rangle$，$\langle\cdot\rangle$表示平均值。

对单向拉应力状态，设拉应力为S，（70）式成为：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{S^2}{2\bar{E}}=\frac{S^2}{2\bar{E}}+\sum\frac{n}{\bar{E}}\frac{a^3}{}\left[\frac{8}{3}(1-\bar{\nu}^2)\sigma^2+\frac{16}{3}\frac{(1-\bar{\nu}^2)}{2-\bar{\nu}}\tau^2\right) \tag{73}$$

σ、τ分别为裂纹面的正应力和剪应力。

设拉应力S与裂纹面法线的夹角为α，则有

$$\sigma=S\cos^2\alpha \qquad \tau=S\cos\alpha\sin\alpha \tag{74}$$

对大量裂纹的统计表明，可取

$$\langle\cos^4\alpha\rangle=\frac{1}{5},\qquad \langle\cos^2\alpha\sin^2\alpha\rangle=\frac{2}{15} \tag{75}$$

代入（73）式，可得

$$\frac{\bar{E}}{E}=1-\frac{16}{45}\frac{(1-\bar{\nu}^2)(10-3\bar{\nu})}{(2-\bar{\nu})}\cdot f \tag{76}$$

则由（72）和（76）以及E、ν、K和$\bar{E}$、$\bar{\nu}$、$\bar{K}$之间的关系，可求得f与$\bar{\nu}$的关系式

$$f=\frac{45}{16}\frac{(\nu-\bar{\nu}^2)(2-\bar{\nu})}{(1-\bar{\nu}^2)\left[10\nu-\bar{\nu}(1+3\nu)\right]} \tag{77}$$

代入（72）（76）式，便可得到$\bar{E}$、$\bar{K}$的数值。

按照类似的方法，对于各向异性体也可求得等效的各向异性切线刚度张量$\bar{L}$。

四 结 束 语

本文扼要地介绍了近十余年来国内外比较典型的几种混凝土损伤理论。在方法上，新的损伤理论均力图超越传统的唯象学方法，而从材料的微观机理出发来建立有一定物理背景的本构模型。尽管上述理论在给定的条件下均能不同程度地吻合实验数据，但要应用到工程中去还有一定的距离，如怎样通过宏观物理量的测定来分析混凝土结构的损伤程度等。此外，由于目前所建立的损伤模型一般还限于主轴方向不变的加载情况，对于工程中更为广泛的加载途经均有待于进一步研究。

参 考 文 献

〔1〕范境泓，“非线性连续介质力学”，重大出版社 1987年出版。

〔2〕余天庆，宁国钧，“损伤理论及其在混凝土结构研究中的应用”，桥梁建设，1986 №.2，P45.

〔3〕林振，“水泥基复合材料”

〔4〕Krajcinovic,D.,和Fonseka,G.U.,“The Continuous Damage Theory of

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Brittle Materials",J.of Applied Mech.Vol.48,1981.pp809.

〔5〕Mazars,These de doctorat d'etat ENSET Universite Paris b,1984,

〔6〕Krajcinovic,D.和Fanella,"A Micromechanical Damage Model for Conc-rete",Engng.Frac.Mech.,Vol.25(1986),pp585-596.

〔7〕Krajcinovic,D.和Fanella,"A Micromechanical Model for concrete in Compression",Engng.Frac.Mech.Vol.29.(1988),pp49-66.

〔8〕Dragon,A.和Mroz,Z.,"A Continuum Model for Plastic-Brittle Behavi-our of Rock and Concrete,"Int.J.Engng.Scl,Vol.17(1979),pp121-137.

〔9〕Valanis,K.C.Arch.of Mech.,Vol.23(1971)pp517-551

〔10〕杨卫，"细观塑性理论"，清华大学工程力学系。

〔11〕Wu,H.C.,和Wang.T.P.,Endochronic Description of Sand Response to Static Loading,J.of Engng.Mech.ASCE,Vol.17,1981,pp249-265

〔12〕陈正汉、"应变软化材料的偏反应内时描述"，材料本构关系学术会论文摘要汇编，1986.pp52-54.

〔13〕Ortiz,M.,Mech.Mat.Vol.4(1985),pp67-93.

An Introduction to Damage Models for Concrete

Zhang Ange Xie Min Liu Ping

Abstract

Concrete members usually exhibit very complex mechanical properties due to their inhomogeneity of microstructres.It has been realized that,on the one hand,the ability of calculating and modeling for concrete structures is increasing with the aid of mordern computers,on the other hand,the accuracy of the analytical results is limited by usiug the classic constitutive relations of concrete.This paper presents some concrete damage models developed in recent years,wbich were established on the basis of damage mechanics,microscopical mechanics,fractare mehcanics or endochronic theory respectivly.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net