

临界状态模型在弹粘塑性分析中的数值稳定条件

雷 晓 燕

(建 工 系)

摘 要

本文采用 Corneau 的方法, 推导了弹粘塑性数值计算中临界状态模型的稳定性条件。文中给出了几个应用实例。

关键词: 弹粘塑性, 临界状态模型, 稳定性。

一 临界状态模型

在岩土工程中, 广泛应用于弹塑性分析和弹粘塑性分析的屈服准则是 Mohr-coulomb 准则和 Drucker-Prager 准则, 尽管它们形式简单, 使用方便, 但它们却不能反映这样两个事实, 一是静水压力对岩土材料的影响, 二是即使在屈服面内, 加荷和卸载也不是沿着同一路径, 而是残留有永久变形, 这说明, Mohr-coulomb 准则和 Drucker-Prager 准则基本上不能恰如其分地反映土的特性。为了克服这些缺点, 文献〔1〕、〔2〕提出了临界状态模型, 也称帽檐 (capped) 模型, 这种模型虽能较好地模拟岩土材料的特性, 但由于在 C 点 (图 1) 存在角点, 在弹塑性、弹粘塑性数值计算中将出现跳跃现象, 导致计算不收敛。为了便于计算, 我们用一椭圆近似地模拟临界状态屈服准则, 称之为修正的临界状态模型, 并简称为临界状态模型, 如图 2 所示。在主应力空间的形状见图 3。

由图 2 我们不难写出用主应力表示的临界状态屈服函数为

$$F = F_1 \cdot \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_3)^2 + F_2 \cdot \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = F_0 \quad (1)$$

其中:

本文于1988年9月10日收到

$$\begin{cases} F_1 = 4\sin^2\phi \\ F_2 = 8(a - a^*)\sin^2\phi \\ F_0 = 4(2a - a^*)a^*\sin^2\phi \\ a = \frac{6c \cos\phi}{3\sin\phi + \operatorname{tg}\phi} \\ a^* = c \cdot \operatorname{ctg}\phi \end{cases}$$

且 $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$ 。

如用应力偏量不变量 J_1, J_2' 和 θ 角表示主应力, 则 (1) 式成为

$$\begin{aligned} F = & \left(\frac{1}{3}F_1\sin^2\theta + 4\cos^2\theta\right)J_2' + \frac{1}{9}F_1J_1^2 - \left(\frac{2}{3}F_1J_1 + F_2\right)\sqrt{J_2'}\sin\theta/\sqrt{3} \\ & + \frac{1}{3}F_2J_1 = F_0 \end{aligned} \quad (2)$$

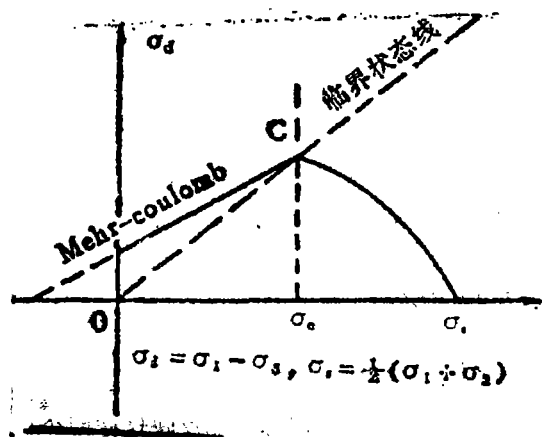


图 1

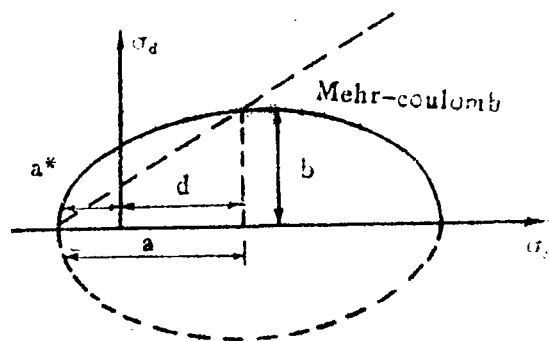


图 2

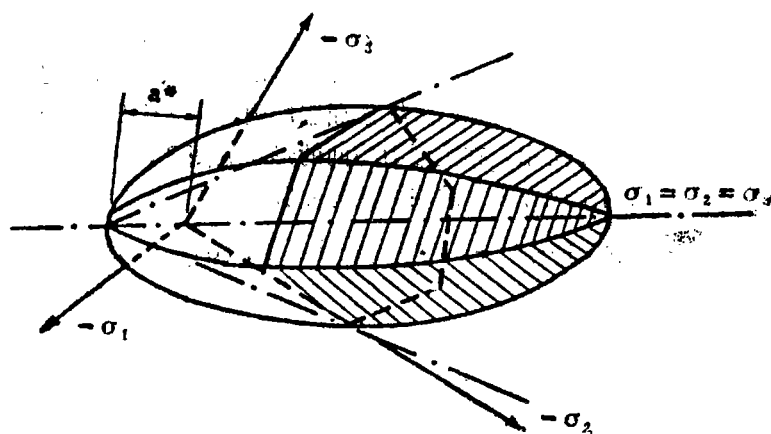


图 3

其中:

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{(J_2')^{3/2}} \right\}; \\ J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \\ J_2' = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}', \text{ 而 } \sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij}; \\ C \text{ 为材料的粘性系数, } \phi \text{ 为内摩擦角.} \end{cases}$$

二 CORMEAU方法

Cormeau 于 1975 年提出了对弹粘塑性有限元显式计算格式进行数值稳定性分析的方法⁽³⁾, 现简略作一介绍。

弹粘塑性增量形式有限元格式的基本方程为⁽⁴⁾

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{\dot{a}}} - \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} d\Omega - \underline{\underline{\dot{F}}} = 0 \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\dot{a}}} - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} \quad (4)$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \gamma(\phi) \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (5)$$

式中:

$$\begin{cases} \gamma \text{ 为流变系数;} \\ (\phi) \text{ 定义为} \\ (\phi) = \begin{cases} \phi & \phi > 0 \\ 0 & \phi \leq 0 \end{cases} \\ \underline{\underline{\dot{F}}} = \int_{\Gamma} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{T}} d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{\underline{N}} \underline{\underline{b}} d\Omega; \\ \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}(\underline{\underline{\sigma}}). \end{cases}$$

将 (3) 式代入 (4) 中, 有

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{K}}^{-1} \left(\int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} d\Omega + \underline{\underline{\dot{F}}} \right) - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} \quad (6)$$

由于 $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}$ 是 $\underline{\underline{\sigma}}$ 的函数, 上式为一积分微分方程。

用高斯积分公式, 可将任一数值积分写成

$$\int_{\Omega} f(\underline{\underline{x}}) d\Omega = \sum_{i=1}^G c_i f(\underline{\underline{x}}_i), \quad c_i \geq 0 \quad (7)$$

令

$$\begin{cases} \underline{\underline{\overline{E}}}^{vp} = \{ \underline{\underline{\varepsilon}}_1^{vpT}, \dots, \underline{\underline{\varepsilon}}_G^{vpT} \}^T \\ \underline{\underline{\overline{\Sigma}}} = \{ \underline{\underline{\sigma}}_1^T, \dots, \underline{\underline{\sigma}}_G^T \}^T \\ \underline{\underline{\overline{D}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \underline{\underline{D}}_G \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\overline{C}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_1 \underline{\underline{I}}_m & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \underline{\underline{C}}_G \underline{\underline{I}}_m \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\overline{B}}} = \{ \underline{\underline{B}}_1^T, \dots, \underline{\underline{B}}_G^T \}^T \end{cases} \quad (8)$$

其中: G 为高斯点总数; m 是应力分量的个数, 对三维问题, $m=6$; I_m 为单位矩阵。

利用 (8) 式可将 (6) 式写成

$$\dot{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}^{vp} - \underline{\underline{Q}} \quad (9)$$

式中:

$$\begin{cases} \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{C}}^{-1} \\ \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{F}} \end{cases} \quad (10)$$

同样可将 (5) 式写成

$$\underline{\underline{E}}^{vp} = \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{\Sigma}} \quad (11)$$

其中:

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Gamma}}_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \underline{\underline{\Gamma}}_G \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\Gamma}}_i = \underline{\underline{\Gamma}}_i(\underline{\underline{\sigma}})$$

可以证明 $\underline{\underline{S}}$ 是对称, 半负定矩阵, 详细证明见附录。

将 (11) 式代入 (9) 中, 有

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{Q}} = f(\underline{\underline{\Sigma}}, t) \quad (12)$$

上式是一阶常微分方程, 为此只要考察下述方程的稳定性条件即可。

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{y}} = f(\underline{\underline{y}}, t) \quad (13)$$

用一阶 Taylor 级数对 $f(\underline{\underline{y}}, t)$ 中的 $\underline{\underline{y}}$ 展开, 则有

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{y}} = f(\underline{\underline{y}}_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{y}}} \right)_n (\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{y}}_n) + \theta(\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{y}}_n) \quad (14)$$

其中: $\underline{\underline{y}}_n = \underline{\underline{y}}(t_n)$, 且 $\left\| \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{y}}} \right\| < \infty, \forall \underline{\underline{y}}(t)$ (15)

不计 (14) 式中二次项的作用, 则研究微分方程 (13) 式的稳定性问题就转化成了研究如下形式的线性微分方程的稳定性。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{y}} + \underline{\underline{b}} \\ \underline{\underline{y}}(0) = \underline{\underline{y}}_0 \end{cases} \quad (16)$$

对于形如 (15) 式的常系数线性微分方程组, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 具有稳定的渐近解, 如果满足下列条件^[5]:

1. $\underline{\underline{A}}$ 的所有特征根非正;
2. 0 特征根所对应的 Jordan 块都是一阶的。

当用欧拉法求 (15) 式的数值解时, 其数值计算稳定的条件是

$$0 < \Delta t < \frac{2}{|\lambda_i|}, \quad i=1, 2, \dots, K \quad (16)$$

其中, λ_i 为矩阵 $\underline{A}$ 的特征根。

非线性微分方程组 (13) 式的数值计算稳定条件仍为 (16) 式, 但 λ_i 对应的是下列矩阵的特征根

$$\underline{\underline{J}} = -\frac{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{X}}}}{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{X}}}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{H}} \quad (17)$$

上式中, 当采用相关连的流动法则时, $\underline{\underline{H}}$ 为对称矩阵。如假定 $\underline{\underline{H}}$ 为正定, 则有

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{C}} > 0 \quad (18)$$

又因为 $\underline{\underline{S}}$ 半负定, 因此 $\underline{\underline{J}}$ 为半负定矩阵。对应于 (17) 式的特征值问题为

$$(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{H}}) \underline{\underline{V}} = \lambda \underline{\underline{V}} \quad (19)$$

为讨论方便, 将求 (19) 式特征值的问题转化成求下列问题的特征值。(这种转换, 不改变所需求的特征根)。

$$(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{V}} = \lambda \underline{\underline{V}} \quad (20)$$

$$\text{或} \quad \underline{\underline{S}} \underline{\underline{V}} = \lambda (\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1}) \underline{\underline{V}} \quad (\text{广义特征值问题}) \quad (21)$$

对于任意向量 $\underline{\underline{X}}$, 有Rayleigh商

$$Q(\underline{\underline{X}}) = \frac{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{S}} \underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{X}}} \leq 0 \quad (22)$$

$$\text{则有} \quad |\lambda|_{\max} = \max_{\underline{\underline{X}}} |Q(\underline{\underline{X}})| \quad (23)$$

将 (10) 式中表示的 $\underline{\underline{S}}$ 代入 (22), (23) 中, 得到

$$|\lambda|_{\max} = \max_{\underline{\underline{X}}} \left[\frac{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{X}}} - \frac{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{X}}} \right] \quad (24)$$

略去上式中为正值的第二项, 得

$$|\lambda|_{\max} < \lambda^*_{\max} = \max_{\underline{\underline{X}}} \frac{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{H}}^{-1} \underline{\underline{X}}} = \max_{\underline{\underline{X}}} Q^* \left[\underline{\underline{X}} \right] \quad (25)$$

$Q^*(\bar{X})$ 可看成是下列特征值问题的 Rayleigh 商

$$(\bar{D}\bar{H})\bar{V}^* = \lambda^* \bar{V}^* \quad (26)$$

由于 $\bar{D}$, $\bar{H}$ 是对角块矩阵, 因此

$$|\lambda|_{\max} < \lambda^*_{\max} = \max_{i=1, \dots, G} \left\{ \lambda_i^* \mid (\bar{D}\bar{H})\bar{V}^* = \lambda_i^* \bar{V}^* \right\} \quad (27)$$

对于三维问题, $\bar{D}$, $\bar{H}$ 为 6×6 矩阵。

因此, 弹粘塑性的数值计算稳定问题就是要在各高斯点中寻找最大的特征根 $\lambda^*_{\max}$, 再按下式选取稳定的计算步长

$$\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda^*_{\max}|} \quad (28)$$

由于 $\bar{H}$ 矩阵是当前应力状态的函数, 因此在每一计算步中都需要确定 $\lambda^*_{\max}$, 对于几种较简单的屈服函数, 文献〔3〕给出了 Δt 的临界解析表达式, 但对于一般稍复杂的屈服函数, 只能给出增量法逐步计算过程中 λ_i^* 的, 据此按 (27)、(28) 两式确定时间步长 Δt 。

三 临界状态模型的稳定性条件

Corneau在文献〔3〕中给出了Mises, Tresca, Mohr-Coulomb, 及Drucker-Prager四种较为简单的屈服函数的稳定性准则, 我们现在来推导临界状态模型的稳定性条件。

首先我们注意到 (1) 式只是由三个主应力分量表示的, 因此对应于 (26) 式的特征值问题仅仅是三阶矩阵的运算。

对 (5) 式中的函数 ϕ , 我们取

$$\phi = \frac{F - F_0}{F_0} \quad (29)$$

则 (5) 式成为

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{VP} = \gamma \left(\frac{F - F_0}{F_0} \right) \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \quad (30)$$

由此得

$$\underline{H} = \frac{\partial \dot{\underline{\varepsilon}}^{VP T}}{\partial \underline{\sigma}} = \gamma \left(\frac{1}{F_0} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T + \gamma \left(\frac{F - F_0}{F_0} \right) \frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T \right)$$

其中:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \{A, 0, B\}^T$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T = \begin{bmatrix} A^2 & 0 & AB \\ 0 & 0 & 0 \\ BA & 0 & B^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \right) = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}F_1 + 2) & 0 & (\frac{1}{2}F_1 - 2) \\ 0 & 0 & 0 \\ (\frac{1}{2}F_1 - 2) & 0 & (\frac{1}{2}F_1 + 2) \end{bmatrix}$$

$$\text{II} \quad A = (\frac{1}{2}F_1 + 2)\sigma_1 + (\frac{1}{2}F_1 - 2)\sigma_3 + \frac{1}{2}F_2$$

$$B = (\frac{1}{2}F_1 - 2)\sigma_1 + (\frac{1}{2}F_1 + 2)\sigma_3 + \frac{1}{2}F_2$$

矩阵 $\tilde{H}$ 可进一步写成

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} A^* & 0 & C^* \\ 0 & 0 & 0 \\ C^* & 0 & B^* \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\text{其中:} \quad A^* = \frac{\gamma}{F_0} [A^2 + (F - F_0)(\frac{1}{2}F_1 + 2)]$$

$$B^* = \frac{\gamma}{F_0} [B^2 + (F - F_0)(\frac{1}{2}F_1 + 2)]$$

$$C^* = \frac{\gamma}{F_0} [AB + (F - F_0)(\frac{1}{2}F_1 - 2)]$$

由 (31) 式可得

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{D}}H &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & C_1 & C_1 \\ C_1 & 1 & C_1 \\ C_1 & C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 & C^* \\ 0 & 0 & 0 \\ C^* & 0 & B^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{式中:} \quad C_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$a_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (A^* + C_1 C^*)$$

$$a_{13} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1+2\nu)} (C^* + C_1 B^*)$$

$$a_{21} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1+2\nu)} (C_1 A^* + C_1 C^*)$$

$$a_{23} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (C_1 C^* + C_1 B^*)$$

$$a_{31} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (C_1 A^* + C^*)$$

$$a_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (C_1 C^* + B^*)$$

因此

$$|\lambda^* \mathbf{I} - (\mathbf{D}\mathbf{H})| = \begin{vmatrix} (\lambda^* - a_{11}) & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda^* & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & (\lambda^* - a_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

即: $((\lambda^* - a_{11})(\lambda^* - a_{33}) - a_{13}a_{31}) = 0$

$$\lambda^*_{max} = \frac{1}{2} \{ (a_{11} + a_{33}) + \sqrt{(a_{11} - a_{33})^2 + 4a_{13}a_{31}} \} \quad (34)$$

稳定的计算步长由 (28) 式确定。

四 算 例

采用临界状态模型, 我们用有限元与边界元耦合方法对无限域和半无限域中受均匀内压作用的洞室进行了弹粘塑性数值分析 (有关弹粘塑性有限元与边界元耦合方法的介绍, 作者将在另一文中详细给出)。

算例一: 无限域中压力隧道的弹粘塑性分析。如图 4, 隧道的内半径为 6m, 长 20m, $p = 0.6\text{MPa}$, $E = 490\text{MPa}$, $\nu = 0.32$, $C = 0.235\text{MPa}$, $\phi = 22^\circ$, $\gamma = 0.085$, 初始时间步长 $\Delta t_0 = 0.002$, 以后计算中的时间步长按下式确定

$$\Delta t_n = \text{Min} \left\{ \left[\tau \frac{\sqrt{\varepsilon_{ii}^n}}{\sqrt{(\varepsilon_{ii}^n)_{VP}}} \right], \frac{2}{|\lambda^*_{max}|} \right\} \quad (\text{对各高斯点判断})。$$

其中, $\tau = 0.03$ 。采用增量法求解, 若进行到第 n 步时间步长时, 粘塑性应变为零, 则认为结构达到稳定状态, 这时即可进行下一载荷增量的计算。由于问题的对称性, 只须取 1/8 部分作为计算模型。

其中有限元区域采用五个 20 节点的三维等参元, 外部无限域采用五个 8 节点等参边界元, 如图 5 所示。其位移与弹塑性数值解比较的结果见图 6。因为对弹粘塑性问题, 当计算稳定时, 弹粘塑性解即为弹塑性解^[1]。由图 6 可以看出, 该方法具有较高的精度。

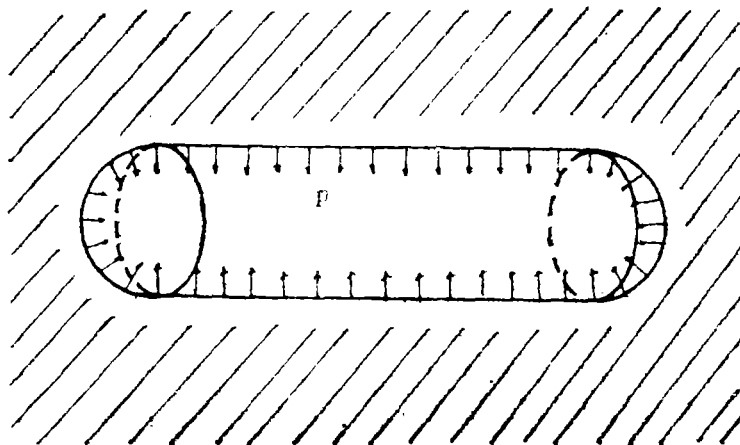


图 4

算例二, 半无限域

中受均匀内压作用的洞室问题的弹粘塑性分析, 见图 7。洞室距离地平面为一倍的洞直径, 由问题的对称性, 取 1/4 部分作为计算模型, 荷载强度 $p = 6.0\text{MPa}$ 。有限元区域采用 6 个 20 节点三维等参元, 外部半无限域采用 6 个等参边界元。 $E = 18000\text{MPa}$, $\nu = 0.2$, $C = 2.4\text{MPa}$, $\phi = 30^\circ$, $\gamma = 0.001$, 洞室的内径为 4 m, 其位移与弹塑性数值解比较的结果

见图 8。

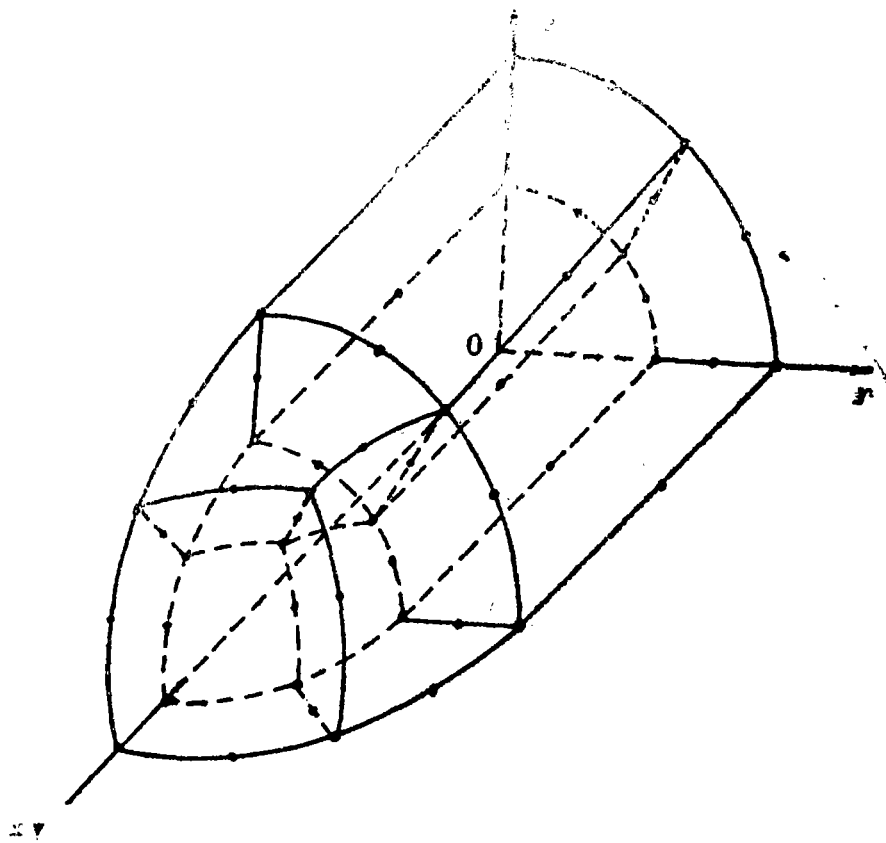


图 5

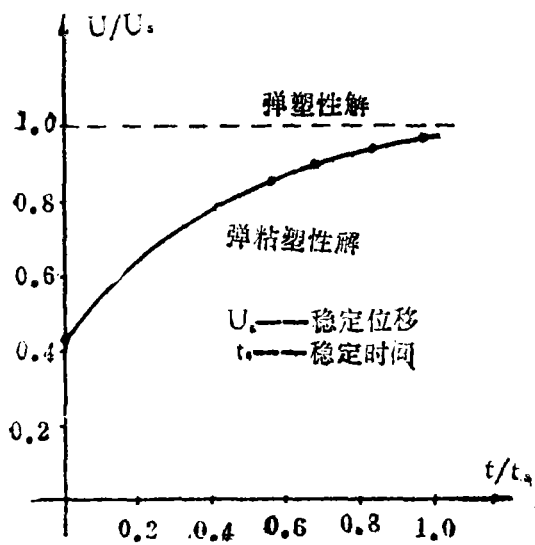


图 6

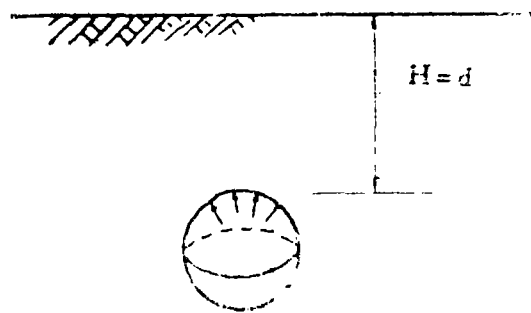


图 7

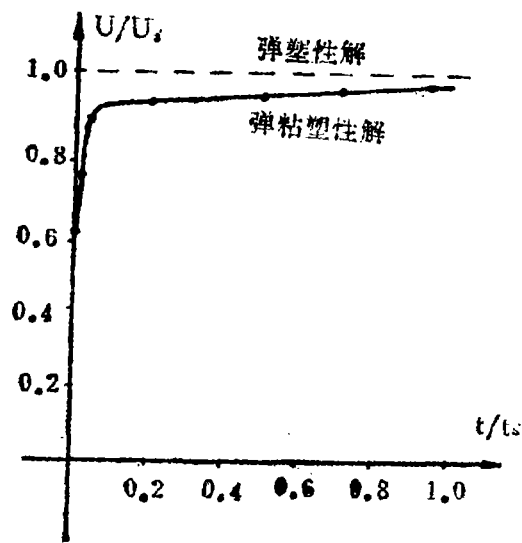


图 8

附录:

$\bar{S}$ 是一对称, 半负定矩阵的证明 (文献 [3] 没有给出证明过程)。

证明: 由于矩阵 K 是对称矩阵, $\bar{D}$, $\bar{C}$ 是对角对称矩阵, $\bar{S}$ 是一对称矩阵显然。

对于任一向量 $(\bar{C}\bar{B}a)$, 考察下式

$$\begin{aligned}
 (\bar{C}\bar{B}a)^T \bar{S} (\bar{C}\bar{B}a) &= (\bar{C}\bar{B}a)^T [\bar{D}\bar{B}K^{-1}\bar{B}^T\bar{D} - \bar{D}\bar{C}^{-1}] (\bar{C}\bar{B}a) \\
 &= (\bar{C}\bar{B}a)^T \bar{D}\bar{B}K^{-1}\bar{B}^T\bar{D} (\bar{C}\bar{B}a) - (\bar{C}\bar{B}a)^T \bar{D}\bar{C}^{-1} (\bar{C}\bar{B}a) \\
 &= (\bar{D}^{-1}\bar{D}\bar{C}\bar{B}a)^T \bar{D}\bar{B}K^{-1}\bar{B}^T (\bar{D}\bar{C}\bar{B}a) - a^T \bar{B}^T \bar{C}^T \bar{D}\bar{B}a \\
 &= (\bar{D}\bar{C}\bar{B}a)^T \bar{B}K^{-1}\bar{B}^T \bar{C} (\bar{D}\bar{B}a) - a^T K a \\
 &= (\bar{D}\bar{B}a)^T \bar{C}^T \bar{B}K^{-1}\bar{B}^T \bar{C} (\bar{D}\bar{B}a) - a^T K a \\
 &= (\bar{\Sigma}^T \bar{C}^T \bar{B}) K^{-1} (\bar{B}^T \bar{C} \bar{\Sigma}) - a^T K a \\
 &= (\bar{B}^T \bar{C} \bar{\Sigma})^T K^{-1} (\bar{B}^T \bar{C} \bar{\Sigma}) - a^T K a \\
 &= P^T K^{-1} P - a^T K a \\
 &= 2(\frac{1}{2} P^T K^{-1} P - \frac{1}{2} a^T K a)
 \end{aligned}$$

$$=2(U_C - U_P)$$

其中: U_C 为余能, U_P 为势能, 对于一般的稳定材料, 有 $U_P \geq U_C$, 见图 9。

因此, 有

$$(\overline{CB}a)^T \overline{S} (\overline{CB}a) \leq 0$$

所以 $\overline{S}$ 为一对称, 半负定矩阵, 证毕。

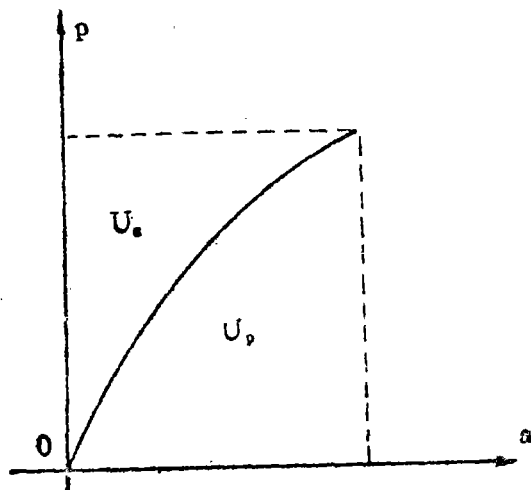


图 9

参 考 文 献

- [1] D.R.J.Owen, E. Hintor, Finite elements in plasticity, Theory and practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U. K. 1980.
- [2] Schofield, A. N. and Wroth, C. P. , Critical state soil Mechanics, McGraw-Hill, New York 1968.
- [3] Corneau, Numerical stability in quasi-static elasto-viscoplasticity, International Journal For numerical methods in engineering, Vol. 9. 109-127(1975).
- [4] O. C. Zienkiewicz and I. C. Corneau, Visco-plasticity and plasticity-An alternative for finite element solution of material nonlinearities, Colloque Meth. Calcul Scie. Tech., 171-199 IRIA, Paris(1973).
- [5] 叶彦谦, 常微分方程讲义, 高等教育出版社, 1982, 10.

Numerical stability criteria of critical state model in elasto-visco plasticity analysis

Lei Xiaoyan

Abstract

Using cormeau method, the author derives stability criteria of critical state model in elasto-visco plasticity numerical computation. Several practical examples are presented.

Key words: elasto-visco plasticity, critical state model, stability.