

弹塑性问题的有限元与边界元耦合的数值方法及其应用

雷 晓 燕

(建 工 系)

摘 要

本文以三维弹塑性问题为例,详细介绍了有限元与边界元耦合的数值方法,提出了将边界元区域的全部未知量凝聚到耦合面上的办法来实现两者的耦合,以达到节省内存的目的。文中还就耦合中利用对称性时方程组产生病态的原因作了讨论,提出了解决的方法,最后给出了几个应用实例。计算结果表明,该方法具有效率高,精度好的特点。

关键词: 有限元与边界元耦合、弹塑性。

引 言

在工程中,有大量涉及无限域或半无限域的应力分析问题,象坝基、隧道、地下工程结构都属于这类问题。这类问题有一个共同特点,这就是计算工作量大,如用有限元来进行计算,则需要划分足够多的单元才能近似无限域或半无限域,这将是很不经济的。因此,最近出现的用有限元法和边界元法来分析和计算工程中的问题已越来越受到人们的重视。这是因为有限元法在处理非线性问题上已趋于成熟,而且已经有了一系列的应用程序。而边界元法在处理非线性问题方面尚处于探索和研究阶段,迄今为止,尽管已经提出了许多求解的方法,但计算结果和计算效率还不能令人满意,计算程序也比较复杂,缺乏为工程师应用的通用性,但边界元法在处理线弹性问题中却显示出了巨大的优越性,一是计算简单,将问题降维求解;二是计算精度高,应力与位移具有同样的精度;三是可以精确处理无限域和半无限域的问题。因此人们很自然地提出了有限元与边界元的耦合问题。即对于需要进行非线性分析的区域采用有限元法,对需要进行非线性弹性分析或无限域,半无限域的地方采用边界元法,充分发挥各自的长处,从而使计算效率,计算精度得到大大的提高和改进,这点对工程

本文于1988年7月15日收到

实际应用是很有意义的。本文以三维弹塑性问题为例, 详细介绍和讨论了有限元与边界元耦合的方法及提高计算效率的途径。

一、线弹性问题的增量形式边界积分方程

由于材料和结构的弹塑性行为与加载以及变形的历史有关, 在进行结构的弹塑性分析时, 通常采用增量法, 即将载荷分成若干个增量, 然后对于每一载荷增量, 将弹塑性方程线性化, 从而使弹塑性分析这一非线性问题分解为一系列的线性问题。因此就必须建立线弹性问题的增量形式的边界积分方程。

假设对应于时刻 t 载荷条件下的位移 ${}^t u_i$, 应变 ${}^t \varepsilon_{ij}$ 及应力 ${}^t \sigma_{ij}$ 已经求得, 当时间过渡到 $t + \Delta t$ 载荷条件时, 要求解的位移, 应变和应力记为

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + \Delta u_i \\ {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = {}^t \varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij} \\ {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

则由加权余量法或Somigliana恒等式可建立增量形式的边界积分方程如下

$$c_{ij}({}^t u_j + \Delta u_j) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*({}^t u_j + \Delta u_j) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*({}^t T_j + \Delta T_j) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*({}^t b_j + \Delta b_j) d\Omega \quad (2)$$

式中: $c_{ij}(\xi) = \{\delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x)\}$, 当边界为光滑边界时, $c_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$; u_{ij}^* 和

T_{ij}^* 为Kelvin基本解或半无限域基本解, 对于三维Kelvin问题, 其表达式为 (1)

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \} \quad (3)$$

$$T_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \} \quad (4)$$

对于半无限域基本解, 其表达式可参见文献[1]附录。

将(2)式写成矩阵的形式, 用插值函数表示 Δu , ΔT , 即

$$\begin{cases} \Delta u = \underline{N} \Delta u^e \\ \Delta T = \underline{\Psi} \Delta t^e \end{cases} \quad (5)$$

则(2)式成为

$$\underline{H}({}^t \underline{u} + \Delta \underline{u}) = \underline{G}({}^t \underline{t} + \Delta \underline{t}) + ({}^t \underline{B} + \Delta \underline{B}) \quad (6)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} \underline{Q}^e = \underline{G} \underline{t} - \underline{H} \underline{u} + {}^t \underline{B} \\ \underline{Q}^i = \Delta \underline{B} \end{cases}$$

(6) 式可写成

$$\underline{H} \underline{\Delta u} = \underline{G} \underline{\Delta t} + \underline{Q}^e + \underline{Q}^i \quad (7)$$

上式中, $\underline{\Delta u}$, $\underline{\Delta t}$ 分别为节点增量位移和节点增量面力向量; $\underline{Q}^i$ 为含增量体力向量; $\underline{Q}^e$ 是考虑 $\underline{u}$, $\underline{t}$, $\underline{B}$ 因数值计算误差而造成的可能不精确满足平衡而引入的校正项; $\underline{H}$, $\underline{G}$ 为包含有基本解积分的系数矩阵。

二、弹塑性增量分析的有限元格式

利用增量形式的虚位移原理, 可建立 $t + \Delta t$ 时刻载荷条件下的有限元方程, 即利用

$$\int_{\Omega} ({}^t\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \delta(\Delta\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} ({}^t\bar{b}_i + \Delta\bar{b}_i) \delta(\Delta u_i) d\Omega - \int_{S_\sigma} ({}^t\bar{T}_i + \Delta\bar{T}_i) \delta(\Delta u_i) d\Gamma = 0 \quad (8)$$

引入增量形式的本构关系和几何方程, 再将各单元内的位移增量表示成本节点位移增量的插值形式, 即可得到增量形式的有限元方程

$$\underline{{}^tK} \underline{\Delta u} = \underline{\Delta P} + \underline{\Delta Q} \quad (9)$$

$$(t \leq \tau \leq t + \Delta t)$$

式中:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{{}^tK} &= \sum_e \underline{{}^tK}^e = \sum_e \int_{\Omega_e} \underline{B}^T \underline{D}_e \underline{B} d\Omega \\ \underline{\Delta u} &= \sum_e \underline{\Delta u}^e \\ \underline{\Delta P} &= \sum_e \int_{S_\sigma} \underline{N}^T \Delta\bar{T} d\Gamma \\ \underline{\Delta Q} &= \sum_e \left(\int_{\Omega_e} \underline{N}^T {}^{t+\Delta t}\bar{b} d\Omega + \int_{S_\sigma} \underline{N}^T {}^t\bar{T} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \underline{B}^T {}^t\sigma d\Omega \right) \end{aligned} \right.$$

求解有限元方程, 即可得到位移增量 $\underline{\Delta u}$, 进而可求出 $\underline{\Delta\sigma}$, $\underline{\Delta\varepsilon}$ 及 $t + \Delta t$ 时刻载荷条件下的位移, 应变和应力。

三、有限元方程与边界元方程的耦合

在有限元与边界元的耦合方法中, 最常用的方法是将边界元方程化为等效的有限元方程, 这里我们采用将边界元方程全部凝聚到耦合面上的方法来实现两者的耦合, 以求达到节省计算机内存, 提高计算效率的目的。

考察如图 1 所示的情况, Ω_1 为有限元区域, Δu_1 , Δt_1 为有限元部分的位移和面力; Ω_2 为边界元区域, Δu_2 , Δt_2 为边界元部分的位移和面力;

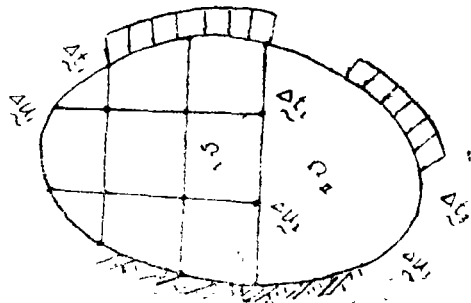


图 1

Δu_2 , Δt_2 为耦合面的位移和面力。

将有限元方程 (6) 式写成分块的形式

$$\begin{pmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{u}_1 \\ \Delta \underline{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{P}_1 \\ \Delta \underline{P}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \underline{Q}_1 \\ \Delta \underline{Q}_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

同样将边界元方程 (7) 式也写成分块形式, 并将非耦合节点的已知面力和已知位移放到方程的右端, 对应的未知分量放到方程的左端。对耦合节点, 方程的左端为未知位移向量, 右端则为未知面力向量, 即

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{H}}_{11} & \hat{\underline{H}}_{12} \\ \hat{\underline{H}}_{21} & \hat{\underline{H}}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{u}_2 \\ \Delta \underline{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{G}}_{11} & \hat{\underline{G}}_{12} \\ \hat{\underline{G}}_{21} & \hat{\underline{G}}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{t}_2 \\ \Delta \underline{t}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{Q}_2^e \\ \underline{Q}_3^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{Q}_2^i \\ \underline{Q}_3^i \end{Bmatrix} \quad (11)$$

展开上式, 由其中的第二式可得 $\Delta \underline{u}_3$, 再将其代入 (11) 中的第一式, 则得到

$$\underline{H}^* \Delta \underline{u}_2 = \underline{G}^* \Delta \underline{t}_2 + \underline{Q}^* \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} \underline{H}^* = \hat{\underline{H}}_{11} - \hat{\underline{H}}_{12} \hat{\underline{H}}_{22}^{-1} \hat{\underline{H}}_{21} \\ \underline{G}^* = \hat{\underline{G}}_{11} - \hat{\underline{H}}_{12} \hat{\underline{H}}_{22}^{-1} \hat{\underline{G}}_{21} \\ \underline{Q}^* = \hat{\underline{G}}_{12} \Delta \underline{t}_3 + \underline{Q}_2^e + \underline{Q}_2^i - \hat{\underline{H}}_{12} \hat{\underline{H}}_{22}^{-1} (\hat{\underline{G}}_{22} \Delta \underline{t}_3 + \underline{Q}_3^e + \underline{Q}_3^i) \end{cases}$$

将 $\Delta \underline{t}_2$ 化成等效节力, 为此用 $\underline{M} \underline{G}^{*-1}$ 左乘 (12) 式两端, 则有

$$\underline{K}^2 \Delta \underline{u}_2 = \Delta \underline{P}_2 + \underline{Q}^2 \quad (13)$$

其中:

$$\begin{cases} \underline{K}^2 = \underline{M} \underline{G}^{*-1} \underline{H}^* \\ \Delta \underline{P}_2 = \underline{M} \Delta \underline{t}_2 \\ \underline{Q}^2 = \underline{M} \underline{G}^{*-1} \underline{Q}^* \end{cases}$$

且 $\underline{M} = \sum_e \underline{M}^e = \sum_e \int_{\Gamma} \underline{N} \underline{\Psi}^T d\Gamma$, 其中 e 对耦合单元总数求和。

耦合面上须满足位移和力的相容条件, 即

$$\begin{cases} \Delta u_2^1 = \Delta u_2^2 \\ \Delta P_2^1 = \Delta P_2^2 \end{cases}$$

为此, 只要将 (13) 式按标准的有限元集成规则迭加到 (9) 中, 即可得到

$$\underline{K} \Delta u = \Delta P + \Delta Q \quad (14)$$

到此, 完成了两者的耦合。

四、利用对称性时方程组产生病态的处理

在有限元与边界元的耦合中, 对称性的利用将大大简化计算过程, 节省单元, 节约机时, 对于一般工程中的问题, 大多具有对称性质, 因此利用对称性求解实际问题是经常使用的。但是在耦合方法中, 如不采取特殊的处理方法, 在将边界元方程转化为等效的有限元方程时, 将产生奇异性, 也即方程组出现病态, 导致无法求解, 现以具有一个对称轴的二维问题为例说明如下。

图 2 示一受均布内压作用的圆盘, 内部区域为有限元, 外部域为边界元, 利用对称性取二分之一考虑, y 轴为对称轴。对于有限元部分, 对称性条件意味着在位于对称轴的节点上受有沿 x 方向的约束, 边界元部分则无须施加任何约束, 如图 2 所示。

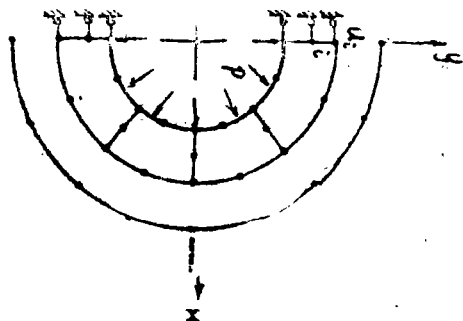


图 2

在耦合方法中, 须做特殊处理的是边界元部分。边界元对称性处理本质上就是将对称轴一侧的单元反射到另一侧, 将其作用分别迭加到边界元方程中的矩阵 $\underline{H}$ 和 $\underline{G}$ 中。

由基本解 u_{ij}^* 和 T_{ij}^* 的表达式及对称性质知, 在形成矩阵 $\underline{G}$ 时, 反射部分的单元对 $\underline{G}$ 的贡献可通过对称轴另一侧的已知单元加上适当的正负号来计算, 也即只要将

$$\begin{pmatrix} -G_{11} & -G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{对称轴是 } y \text{ 轴})$$

迭加至 $\underline{G}$ 中即可。对矩阵 $\underline{H}$ 中的元素除主对角线上的元素外也是作类似的处理, 主对角线上的元素仍采用给结构一刚体位移的方法来得到。

从上述形成 $\underline{H}$ 和 $\underline{G}$ 的过程中可以看出, 当耦合面上的节点处于对称轴上时, 如图中的节点 i , 则矩阵 $\underline{G}$ 中与沿 x 方向的变量相对应的一行元素 (如图中的变量 u_i , 对应于 $\underline{H}$, $\underline{G}$ 中的第 $(2i-1)$ 行) 全部变成零, 这时矩阵 $\underline{G}$ 将为奇异矩阵, 无法求逆, 从而导致耦合失败。

这时, 我们可以采用以下两种方法解决, 不妨仍以 i 节点, u_i 为例。一是将边界元方程中 $\underline{H}$, $\underline{G}$ 中的第 $(2i-1)$ 列和 $(2i-1)$ 行全部划去, 同时将有限元方程中与 u_i 相对应的行和列

也划去,最后令 $u_i = 0$ 即可。这种方法的好处是降低了方程组的阶数,但在程序上处理比较麻烦。另一种方法就是将 G 中的第 $(2i-1)$ 列上的元素全部改为零,而将 $(2i-1)$ 行上的主对角线上的元素改为1。这样做的结果,对其它变量无影响,仅对 u_i 本身产生影响,但由于 u_i 是通过有限元方程解出的,在有限元方程中, u_i 是有约束的,它的值将直接取约束值,也即为零,这种处理方法的优点是程序上容易实现。

五、数值算例

利用自编的三维弹塑性有限元与边界元耦合程序FEB,我们试算了两个考题,并给出了与精确解的比较结果。计算成果是令人满意的。

算例一:无限域中空腔球体受均匀压力作用弹塑性分析,见图3。球体内半径为2m, $E = 210 \text{ T/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\sigma_s = 8 \text{ T/m}^2$, 强化参数 H' 取为零,选用Mises屈服准则。采用增量法求解,迭代收敛精度控制参数为0.5%,荷载从 6 T/m^2 开始加载,以后分别为7.0, 8.0, 9.0, 10.0, 11.0, 12.0 T/m^2 。利用对称性,取八分之一部分的球体作为计算模型。有限元区域采用三个20节点等参元,外部无限域采用三个8节点等参边界元。其应力与精确解比较的结果见表一,计算结果表明,该方法具有非常好的精度,而且用时也比较少,在EL×SI计算机上运算,CPU时间不到2分钟。

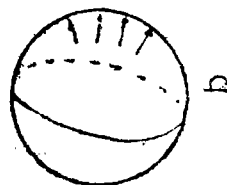


图3

无限域中($r = 2.212 \text{ m}$)处, 径向应力和切向应力表

表一

$P(T/m^2)$								
$r(m)$								
			5.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
2.212	σ_r	数值解	-3.684	-5.157	-6.118	-7.226	-8.294	-9.359
		解析解	-3.698	-5.177	-6.392	-7.392	-8.392	-9.392
	σ_θ	数值解	1.839	2.570	1.858	0.755	-0.315	-1.399
		解析解	1.849	2.589	1.608	0.608	-0.392	-1.392

算例二:无限域和半无限域中空腔球体(岩土材料)受均匀压力作用弹塑性分析,见图3及图4。对于无限域中的情形,结构的几何尺寸,单元划分与上例相同,其中材料常数为 $E = 18000 \text{ T/m}^2$, $\nu = 0.20$, 粘性系数 $C = 7.07 \text{ T/m}^2$, 内摩擦角为 $\phi = 62.73^\circ$, 强化参数 $H' = 0$, 利用Mohr-Coulomb屈服准则。对半无限域的情形,球体距离地平面的洞直径为两倍,利用对称性取四分之一部分作为计算模型。有限元区域采用六个20

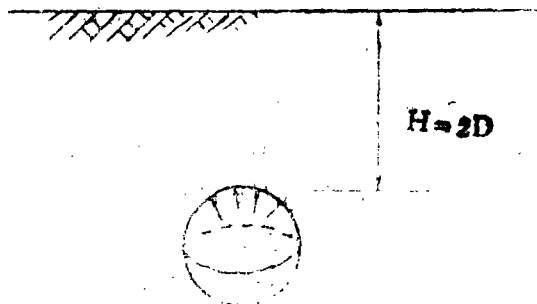


图4

节点等参元, 外部半无限域采用六个 8 节点等参边界元。其径向应力与环向应力见表 2。

无限域, 半无限域中($r=2.212\text{m}$)处, 岩土材料的径向应力和切向应力表 表二

P(T/m ²)			6.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
r(m)	σ_r	无限域数值解	-4.420	-5.893	-6.692	-7.522	-8.369	-9.204	-10.039
		半无限域数值解	-4.400	-5.867	-6.679	-7.505	-8.347	-9.179	-10.011
	σ_ϕ	无限域数值解	2.209	2.945	3.037	2.987	2.938	2.888	2.839
		半无限域数值解	2.208	2.984	3.037	2.989	2.939	2.890	2.841

由计算结果知, 半平面对球体附近处的位移和应力影响较小, 这可能是由于半平面距球体位置较远的缘故。该算例尽管无解析解, 但从计算结果可看出位移, 应力有规律变化的正确性, 此外, 可以验证, 所得的结果是满足Mohr-Coulomb屈服准则的。

本文是在杜庆华教授指导下完成的, 在此表示衷心的感谢!

参 考 文 献

- [1] C.A.Brebbia, I.C.F.Telles, and L.C.Wrobel, Boundary element engineering techniques, theory and applications in engineering, Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo. 1984.
- [2] D.R.J.Owen, E.Hinton, Finite elements in plasticity: Theory and practice, Pineridge press Limited, Swansea, U.K. 1980.
- [3] 杜庆华、岑章志、卢西林, “弹塑性边界元法的若干基本工程应用”, 第二届边界元会议论文集, 1985.12. 重庆。

Numerical method of solving elasto—plastic problem by method of coupling finite element with boundary element and applications

Lei Xiaoyan

Abstract

In the paper, the author, taking the three dimensional elasto-plastic problem as example, comprehensively introduces numerical method of coupling the finite element with the boundary element, and presents method of condensing the all unknowns in boundary element domain to coupling surface in order to save computer storage. The paper also discusses the singular cause of simultaneous equation, which is caused by utilizing symmetrization of geometry, and presents solvable method. Finally, several practical examples are studied. The numerical results manifest that the method has the advantage of high efficiency and well accuracy.