井群渗流分析

陈文英

（建工系）

摘 要

本文论述了井群渗流的计算原理。着重指出了井群渗流势函数不是以各单井中心为坐标原点的单井势函数的叠加，而需建立井群渗流场中各井同一的坐标系。而且叠加成的井群势函数必须由井群渗流场中同一坐标系的边界条件来确定函数式中的积分常数C。

给水工程中取用地下水时，需要应用井群的计算理论。如井群产水量的计算，分析井群互阻影响时要引用的水位降深叠加原理等。在工程上有时为了降低地下水位也要用到井群，而需作一些相应的计算。尽管为给排水专业及土建专业所编写的水力学书中都涉及到了这部份内容，但看来在所做的理论分析上尚有待完整，且有的书在叙述中存在着易使人误解之处，应怎样论述也有待商榷。

井群渗流计算为势流叠加原理的具体应用。井群渗流势函数可由单井渗流势函数叠加而得，叠加成的势函数必须满足井群渗流中同一坐标系的边界条件。这是井群渗流计算理论的基本点。

那么被叠加的是单井渗流什么样的势函数，又具体取用哪个函数式来进行叠加呢？这需要按无压井（潜水井）井群与承压井井群两种情况分别进行处理。

1、对水平不透水层上的无压完全井来说，在单井抽水过程，井周围形成漏斗形浸润曲面。这种具有浸润曲面的无压地下水的流动，严格说来为三维流动。如果在渗流场中取六面体微小空间，按质量守恒定律分析其流出流入质量之差为零，得出的连续性微分方程将为：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

但为了简化计算，略去z方向流速不计，可从浸润面范围内的整个含水层厚度中取一微小柱体进行分析。这时可置坐标系xyzo的xoy面于无压含水层的不透水底面上，如图1所示，浸润面方程为$z=f(x,y)$。于是地下水通过此微柱体时，可近似认为只有x，y两个方向的流速

本文于1988年9月23日收到

中国知网 https://www.cnki.net

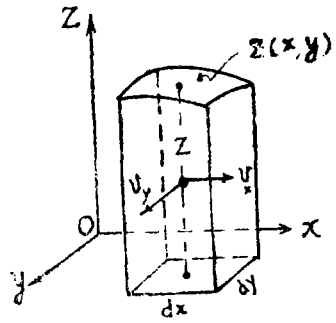

图　1

分量。通过分析单位时间内流经此微柱体的质量，依质量守恒定律知其流出流入质量差应为零，从而得出

$$\frac{\partial(v_x z)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y z)}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

此即我们所要采用的无压渐变渗流连续性微分方程。

而渐变渗流速度公式（裘布衣公式）为

$$\begin{cases} v_x = u_x = -k\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ v_y = u_y = -k\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases} \qquad (2)$$

将（2）代入（1）式，即得潜水井无压渐变渗流的基本方程：

$$\frac{\partial^2(\frac{k}{2}z^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\frac{k}{2}z^2)}{\partial y^2}=0$$

即

$$\frac{\partial^2 z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z^2}{\partial y^2}=0 \qquad (3)$$

可见z^2满足拉普斯方程。拉普拉斯方程为线性方程，它的解可以叠加，所以潜水井井群渗流的水头平方函数$z^2(x,y)$，可由各单井渗流之水头平方函数$z_i^2(x,y)$叠加而得，即

$$z^2=\sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

显然，上式应是同一坐标系中函数的叠加。

那么z^2是什么性质的势函数呢？如令$\Phi=\frac{-k}{2}z^2$，

则：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{-k}{2}\frac{\partial z^2}{\partial x}=(z\cdot 1)(-k\frac{\partial z}{\partial x})=\omega_x\cdot kJ_x=q_x$$

式中ω_x为垂直于x轴的单宽面积，q_x为x方向的单宽流量。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{-k}{2}\frac{\partial z^2}{\partial y}=(z\cdot 1)(-k\frac{\partial z}{\partial y})=\omega_y\cdot kJ_y=q_y$$

式中ω_y为垂直于y轴的单宽面积，q_y为y方向的单宽流量。所以$\Phi=\frac{-k}{2}z^2$可称为“流量势函数”。

由于$\frac{-k}{2}$为一常量，叠加式“$-\frac{k}{2}z^2=\sum_{i=1}^{n}(-\frac{k}{2}z_i^2)$”与“$z^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$”是等价的，所以水头平方函数的叠加可表征为流量势函数的叠加。

中国知网 https://www.cnki.net

现在讨论潜水井单井的水头平方函数。由于井的渗流为轴对称流动，因而取用原点置于井中心的极坐标(r,θ)将带来很大方便，从而z = f(r)。

离井轴距离r处的过水断面积ω = 2πrz，而由裘布衣流速公式$v = k\frac{\partial z}{\partial r}$，得$Q = 2\pi rzk\frac{dz}{dr}$，分离变量后积分之，即得

$$z^2 = \frac{Q}{\pi k}Lnr + C \qquad (4)$$

利用单井渗流的边界条件：r = r_0时，z = h_0（式中r_0为井的半径，h_0为与抽水量Q相应的井中水深），可得出$C = h^2 - \frac{Q}{\pi k}Lnr_0$，将C代回（4）式，得

$$z^2 = \frac{Q}{\pi k}Ln\frac{r}{r_0} + h_0^2 \qquad (5)$$

现在为了求井群渗流的z^2，是否可直接用（4）或（5）式来进行叠加呢？这个问题进一步的分析如下：

首先要明确的是，只有属于同一坐标系的势函数才能叠加。现在无论是用（4）式还是（5）式来表达的各单井势函数，都是基于设在各井中心的不同坐标系而得出的渗流场中的z^2函数，因之不能直接按（4）式或按（5）式叠加以求出井群渗流场中的z^2函数。为此，应在渗流场中某点A设立对各井同一的坐标系，x′Ay′z，即井群坐标系，如图2所示。井群坐标系的x′Ay′面，与原点设在各井中心的单井坐标系xiyz的xiy面，均设在同一不透水底面上，所以两个坐标系的z值相同，但

$$x = x_A + x' \qquad y = y_A + y'$$

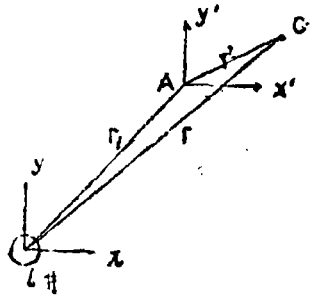

图　2

式中x_A，y_A为A点对于井中心坐标系xiyz的坐标值。以x,y代入（4）式，得出在单井i单独作用时渗流场中任一点C的z^2函数为

$$z^2 = \frac{Q_i}{\pi k}Lnr + C_i = \frac{Q_i}{\pi k}Ln(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + C_i$$

$$= \frac{Q_i}{\pi k}\left[(x_A+x')^2 + (y_A+y')^2\right]^{\frac{1}{2}} + C_i$$

$$= \frac{Q_i}{\pi k}\left[x_A^2 + y_A^2 + 2x_Ax' + 2y_Ay' + x'^2 + y'^2\right]^{\frac{1}{2}} + C_i$$

$$= \frac{Q_i}{\pi k}\left[r_i^2 + 2x_Ax' + 2y_Ay' + x'^2 + y'^2\right]^{\frac{1}{2}} + C_i$$

$$= \frac{Q_i}{\pi k}\left[r_i^2 + 2x_Ax' + 2y_Ay' + r'^2\right]^{\frac{1}{2}} + C_i$$

中国知网 https://www.cnki.net

式中r为任一点C离i井中心的距离；r_i为A点到i井中心的距离（i=1，2，…，n）。

对于A点的z^2，则因$x'=0$，$y'=0$而有

$$z_i^2=-\frac{Q_i}{\pi k}\ln r_i+C_i \qquad (6)$$

式中z_i为i井单独作用时A点的水位（i=1，2，…，n）。

应注意，式（4）与（6）虽然形式相同，但两式的含义已有很大的区别。式（4）的z^2是坐标系原点设在某井中心时，单井渗流场中的z^2函数，而（6）式中的z_i^2则是坐标原点设在A点时，距i井的距离为r_i的A点的i单井渗流的z^2函数值。

当井群中各井同时工作时，A点的z^2应按（6）式叠加。于是得井群工作时渗流场中A点的z^2函数值：

$$z^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\pi k}\ln r_i+C \qquad (7)$$

式中待定常数C按井群渗流场的边界条件来确定：当A点离各井都很远时$r_1\simeq r_2\simeq\cdots\simeq r_n\simeq R$（R为井群的影响半径），这时$z=H$。并取各井抽水量相同的情况（$Q_i=Q$）。将上述条件代入（7）式，可得出$C=H^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{nQ}{\pi k}\mathrm{Ln}R$，再将C代回原式，即得井群渗流场中坐标系原点所在的A点的z^2算式：

$$z^2=H^2-\frac{nQ}{\pi k}\left[\mathrm{Ln}R-\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(r_1r_2\cdots\cdots r_n)\right] \qquad (8)$$

式中R为井群的影响半径，H为含水层厚度。

如果我们进一步把r_i（i=1，2，…，n）看作变量，那么（8）式即为井群渗流场中的z^2函数式。

如在某A点设立井群坐标系后，对（5）式进行坐标变换，也可得出与式（5）形式完全相同的单井z_i^2式（当然，此时的z_i^2为坐标系原点所在的A点的函数值）。如以此式进行叠加以求井群渗流的z^2，也未尝不可，但于叠加后必须再加上一个待定常数C，即

$$z^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\pi k}\mathrm{Ln}\frac{r_i}{r_{0i}}+\sum_{i=1}^{n}h_{0i}^2+C$$

然后按井群渗流场的边界条件来确定此C，仍可得出（8）式的结果。

如果在上叠加式中不加待定常数C，而象有的书[1][2][3]中所叙述的那样，取用了下式：

$$z^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{\pi k}\mathrm{Ln}\frac{r_i}{r_{0i}}+\sum_{i=1}^{n}h_i^2$$

因等式右边的各项全为正值，叠加的结果意味着：随着抽水井数的增多，渗流场中任一点钻孔中的水位z将愈来愈高，而不是愈来愈低。这与客观事实是完全违背的。

中国知网 https://www.cnki.net

错用此式的原因在于：因被叠加的z_i^2中的积分常数C_i，已分别按以各自井中心为坐标原点的单井渗流函数的边界条件加以确定，这些以各井井中心为坐标原点的单井边界条件所确定的C_i的叠加，并不符合对各井同一的坐标系的井群渗流场的边界条件。因而在叠加式中还必须再加上一个待定常数C。

可是为什么这些书中最后又导出一个与（8）式相同的正确结果呢？那是因为作者将错误的式子代入$r_i \simeq R$，$z = H$后，又与原错误的式子相减，这样正好消去了$\Sigma \ln r_{0i}$项与Σh_i^2项，而与正确的结果相偶合。

由（8）式即可导出潜水井井群的产水量$Q_0 = nQ$的计算公式：

$$Q_0 = \frac{1.36k(H^2 - z^2)}{\lg R - \frac{1}{n}\lg(r_1 r_2 \cdots r_n)} \qquad (9)$$

2、对承压井来说，如为不透水层上的完全井，而且为水平承压含水层，因而当井中抽水时，补给井中的地下水的流动完全可视作为平面流动，即$u_z = 0$。这种流动必然符合大家所熟知的二元连续性微分方程 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$，而不必再仿照潜水井渗流的分析方法从整个含水层厚度中取微柱体重新推导公式。以流速公式 $u_x = -k\frac{\partial z}{\partial x}$，$u_y = -k\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式后，即得拉普拉斯方程$\nabla^2 kz = 0$，即$\nabla^2 z = 0$，可见承压井的水头函数$z(x, y)$满足拉普拉斯方程，这样承压井井群的水头函数可由各单井的水头函数z_i叠加而得，即

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

我们知道渗流的速度势函数为$\phi = -kz$（因为$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -k\frac{\partial z}{\partial x} = u_x$；$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -k\frac{\partial z}{\partial y} = u_y$）。而k为常量，下述势函数的叠加“$(-kz) = \sum_{i=1}^{n}(-kz_i)$”与“$z = \sum_{i=1}^{n} z_i$”是等价的。因而承压井水头函数$z_i$的叠加可表征为速度势函数的叠加。

单井计算中，承压井的水头函数同样以取原点置于井中心的极坐标为宜。由于为轴对称流动，$z = f(r)$。单井承压井的水头曲线微分方程为$Q = 2\pi r k\frac{dz}{dr}$，分离变量后积分之，得

$$z = \frac{Q}{2\pi kt}\ln r + C \qquad (10)$$

式中t为承压含水层的厚度，C为待定积分常数。

对井群来说，为求井群渗流场中的水头函数z，需建立对各井同一的以A为原点的坐标系（A点离i井的距离为r_i，$i = 1, 2, \cdots n$）。将（10）式进行坐标变换，同样可得出形式与之相同的单井i的渗流在A点的z_i函数值（$i = 1, 2, \cdots n$）。

$$z_i = \frac{Q_i}{2\pi kt}\ln r_i + C_i \qquad (10)'$$

中国知网 https://www.cnki.net

从而得出井群渗流场中A点的水头函数值z

$$z=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{2\pi kt}\mathrm{Ln}r_i+C$$

式中C为待定常数，由井群渗流场的边界条件确定。

当各井抽水量相等，$Q_i=Q$时，以下列边界条件代入上式：$r_1\simeq r_2\cdots\simeq r_i\simeq R$，$z=H$，以此求得C后再代回原式，则可得

$$z=H-\frac{nQ}{2\pi kt}\left[\mathrm{Ln}R-\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\left(r_1r_2\cdots r_n\right)\right] \tag{11}$$

此即承压井井群渗流场中，离i井距离r_i处z的计算式（$i=1,2,\cdots n$）。

由（11）式可导得承压井井群产水量$Q_0=nQ$的计算公式

$$Q_0=\frac{2.73kt(H-z)}{\lg R-\frac{1}{n}\lg(r_1r_2\cdots r_n)} \tag{12}$$

式中R为井群的影响半径，H为承压含水层的测压管水头值。

又由于（H－z）为井群抽水时，离各井距离为$r_1,r_2,\cdots r_n$的某点钻孔中的水位降深S，所以由（11）式可得

$$\begin{aligned}S=H-z&=\frac{Q}{2\pi kt}\left[n\mathrm{Ln}R-\ln(r_1r_2\cdots r_n)\right]\\&=\frac{Q}{2\pi kt}\left[n\mathrm{Ln}R-(\mathrm{Ln}r_1+\mathrm{Ln}r_2+\cdots+\mathrm{Ln}r_n)\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{Q}{2\pi kt}\left[\mathrm{Ln}R-\mathrm{Ln}r_i\right]\end{aligned} \tag{13}$$

而由式（10）′代入单井渗流边界条件（$r_i=R$时，$z=H$）求得C后，得出距i井r_i处的该点钻孔中的水位降深$S_i(i=1,2,\cdots n)$为：

$$S_i=H-z_i=\frac{Q}{2\pi kt}(\mathrm{Ln}R-\mathrm{Ln}r_i) \tag{14}$$

对照（13）式与（14）式，可见

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i \tag{15}$$

此即水位降深叠加原理之由来。

中国知网 https://www.cnki.net

3、结束语

综上所述：

1）井群渗流的势函数为单井渗流势函数的叠加。对潜水井井群来说为水头平方函数z^2（表征为流量势函数）的叠加；对承压井井群来说为水头函数z（表征为流速势函数）的叠加。这些被叠加的势函数需为同一坐标系中的势函数。

2）叠加后的势函数方程必须满足井群渗流的边界条件。因而叠加后必须保留有待定常数C，最后按井群渗流场中同一坐标系的边界条件加以确定。

3）水平不透水层上的承压完全井之渗流，可看作为平面流动，因而可直接引用取微六面体空间分析得出之二维连续性微分方程$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$；而水平不透水层上的无压完全井，由于有浸润曲面，不能直接引用此方程。需取整个含水层厚度中的一个微柱体来作分析，使有可能忽略掉z方向流速分量，从而推导出另一形式的二元连续性微分方程。以裘布衣流速公式分别代入此两种情况下的连续微分方程，得出拉普拉斯方程$\nabla^2 z=0$与$\nabla^2 z^2=0$，从而确定了被叠加之势函数的内容。

参考文献

〔1〕西南交大水力学教研室，水力学（第三版），高等教育出版社，1984

〔2〕同济大学编，水力学，人民教育出版社，1982

〔3〕华东水利学院编，水力学（第二版）下册，科学出版社，1984

Theoretical Analysis of Multiple-well Seepage Flow

Chen Wenying

Abstract

Fundamentals for the calculation of multiple-well seepage flow are presented. Being intended to clarify some confused ideas, the following points are emphasized: First, the superposition of potenial flows for multiple-well seepage flow should be based on an identicle coordinate system being common to all indivdual wells. Secondly, the constant in the potential function of multiple-well seepage flow obtained by superposing individual wells' should be determined by the boundary condition of seepage flow field for multiple-well based on an identicle coordinate

中国知网 https://www.cnki.net