泊松方程数值求解的一种新思路

刘 平

（工程力学研究室）

摘 要

本文讨论了泊松方程转化为拉普拉斯方程的一种数值求解途径。思路是针对弹性扭转问题的控制方程——泊松方程，将其作变换，巧妙地应用边界单元法进行回代求解。方法简单易行，且精度较高。同时，文中还通过算例得出了解法的结论。

引 言

在工程中，如电学、声学、热学以及物质传输等问题中，经常会遇到泊松方程的求解问题[1]。有限域的泊松方程的求解比较困难。因为找不到其对应的格林函数，尤其是当右端分布函数事先未知（或要通过别的方程来确定，而这个方程又依赖于泊松方程）时，其求解的难度就更大，即使现代流行的数值方法，如有限元或边界元[2]，也难以解决。为了解决这一问题，不失一般性，本文就弹性力学中的扭转问题作具体的讨论。利用边界单元法的技巧，进行回代求解。

作为具体问题——弹性扭转，按泊松方程的求解，只能求出应力函数（在数值解中）。此时若直接由应力函数来定应力，就不得不用差分方法，这自然会带来误差。为了避免这一不足，本文利用所考虑问题的性质——应力分量满足拉普拉斯方程，和编程序的技巧，最后求得的是点的应力。按照边界单元法的说法，它是解析的，从而提高了精度。

一、势 函 数 的 构 造

在研究扭转问题时，圣维南曾经讨论过将泊松方程[6]化为拉普拉斯方程进行求解，得到了几个多项式的经典的解答。但是，只有对于截面是规则的构件才能得出精确的应力分量。

本文于1988年6月25日收到

现将理论列式归纳如下：

在弹性扭转问题中[3]，只存在应力分量τ_{xy}，τ_{yz}，设有一应力函数ϕ，则应力可表示为：

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \tau_{yz} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

相容方程为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \tau_{yz} = 0 \\ \nabla^2 \tau_{xz} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

将（1）代入（2）得：

$$\nabla^2 \phi = C$$

边界条件可表示为：

$$l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \tau_{yz} = 0 \tag{3}$$

由（1）式又可得到：

$$\phi_s = C_0$$

其中C和C_0都为积分常数，l和m为边界外法向量，ϕ_s表示边界上的ϕ值。在单连域中可取$C_0 = 0$。最后得到问题的控制方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = C \\ \phi_s = 0 \end{cases} \tag{4}$$

在方程（4）中，右端量C要通过平衡方程来确定。平衡方程：

$$2\iint \phi \, dx dy = M \tag{5}$$

其中M为外加扭矩。方程（4）和（5）是相互依赖的。求不出ϕ，也就无法利用（4）式，而求ϕ就必须事先知道右端量C。但C要由（5）式来定，故按常规的方法无法求解。我们暂且不考虑（5）式，而把注意力集中在（4）式上。

设有一函数ψ：

$$\psi = \phi - \frac{C}{4}(x^2 + y^2) \tag{6}$$

则（4）式可表示为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 \\ \psi_s = \phi_s - \dfrac{C}{4}(x^2 + y^2)_s \\ \quad = -\dfrac{C}{4} R_s \end{cases} \tag{7}$$

其中$R_s = (x^2 + y^2)_s$。这样我们就构造了势函数ψ，但目前还不能按（7）式求解，因为边界

条件中含有C。假设我们取C = 1（C在回代求解时再定，若是一分布函数，也同样可设一已知的）。于是，泊松方程（4）就转化成为一可解的势问题——拉普拉斯方程（7）。

二、边界单元法

拉普拉斯方程可以通过加权余量法化为边界积分方程，详见〔4〕：

$$C_{ij}\psi_j+\int_\Gamma q_{ij}^*\psi_j d\Gamma=\int_\Gamma u_{ij}q_j d\Gamma \tag{8}$$

其中带*号的量为权函数或称基本解[4]。q_j 为 ψ_j 的法向导数，C_{ij} 为边界上的几何参数[5]。Γ 为问题的边界。

在边界上进行离散，方程（6）写成矩阵形式：

$$[H]\{\psi\}_s=[G]\{q\}_s$$

$$\{q\}_s=[G]^{-1}[H]\{\psi\}_s$$

$$=[D]\{\psi\}_s \tag{9}$$

上面都是在边界上进行的。域内的 ψ 可表示为：

$$\psi_i=\int_\Gamma u_{ij}^*q_j d\Gamma-\int_\Gamma q_{ij}^*\psi_j d\Gamma$$

$$\{\psi\}=[G]'\{q\}_s-[H]'\{\psi\}_s \tag{10}$$

将（9）式代入（10）式：

$$\{\psi\}=([G]'[D]-[H]')\{\psi\}_s$$

$$=[B]\{\psi_s\} \tag{11}$$

从而就可以求出全域上任意一点的 ψ 值，于是也就可求出 ϕ 的值。

三、回代求解

在方程（7）中我们取C = 1，由此可求出全域上的应力函数 ϕ，但此时的 ϕ 不是最终的量，因为右端项C未定。现在我们将预求的 ψ 或 ϕ 回代到平衡方程中，定出C。

由（11）式可知：

$$\{\psi\}=[B]\{-\frac{R_s}{4}\}\cdot C$$

又由（6）式：

$$\{\psi\}=\{\phi\}+\{-\frac{r_s}{4}\}\cdot C$$

故此有：

$$\{\phi\}=([B]\{-\frac{R_s}{4}\}+\{\frac{r_s}{4}\})\cdot C \tag{12'}$$

其中$r_s = x^2 + y^2$。

由平衡方程：

$$M = 2\iint \phi \, dxdy$$

所以：

$$C = \frac{M}{\iint \left([B]\left\{ -\frac{R_s}{2} \right\} + \left\{ \frac{r_s}{2} \right\} \right) dxdy} \tag{12}$$

有了C就可由（12）′式得到实际φ的值。在一般的问题中，若C是分布函数，可能还要按(12)′、(12)两式进行多次回代。

在力学问题中，最终所要求的是应力分量，在这里就是τ_{xz}和τ_{yz}。由相容方程可知，应力分量也满足拉氏方程，若边界上的量已知，则可求出内部任一点的值（这种关系是解析的）。若可按照这一思路求解，那么前面在求ψ时的系数矩阵都可利用，不必再重新列阵，当然也不必要解方程，于是就可花极少的时间求得应力。但这是在边界上应力分量为已知的前提下。下面我们来考察边界上的应力分量，由边界条件：

$$l \cdot \tau_{xz} + m \tau_{yz} = 0 \tag{13}$$

又由（6）式（对其法向微分）：

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{C}{2}(x \cdot l + y \cdot m)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot m - \frac{C}{2}(x \cdot l + y \cdot m)$$

由（9）式可求出边界上某一点q^i的值，于是上式化为：

$$q^i + \frac{C}{2}(x^i \cdot l + y^i \cdot m) = -\tau_{yz} \cdot l + \tau_{xz} \cdot m \tag{14}$$

设：$$D_i = q^i + \frac{C}{2}(x^i \cdot l + y^i \cdot m)$$

由（13）和（14）两式可得到：

$$\begin{cases} \tau_{xy}{}^i = m \cdot D_i \\ \tau_{yz}{}^i = -l \cdot D_i \end{cases} \tag{15}$$

于是，应力的拉氏方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy}{}^s = m^s D^s \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \nabla^2 \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{yz}{}^s = -l^s D^s \end{cases}$$

由前面（11）式已经形成的矩阵[B]，就可求得内部任意一点的应力分量：

$$\begin{cases} \{\tau_{xz}\} = [B]\{\tau_{xz}\}_s \\ \{\tau_{yz}\} = [B]\{\tau_{yz}\}_s \end{cases} \tag{16}$$

四、数值结果及结论

按照前面描述的方法，来计算两个算例。为了便于比较，计算了圆形以及椭圆两种截面杆的扭转。

在圆形截面杆中，边界上划分成12单元，外加扭矩为10个单位。计算了x，y两个断面上的应力，计算结果见图1。在（4）式中，右端量C应该等于$-2KG$（K为扭率，G为剪切

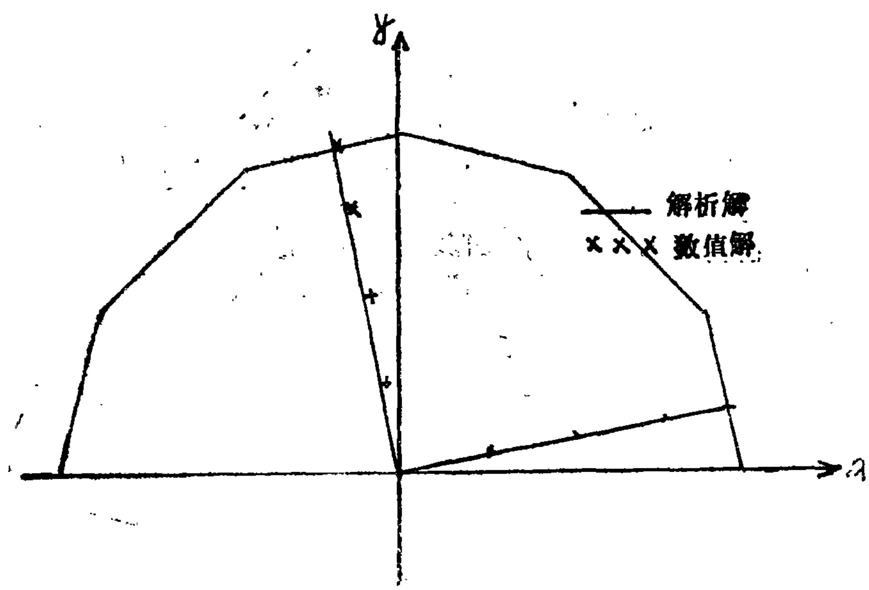

图1 计算简图及计算结果比较

模量）。本例计算的结果$C=-0.05075$，解析解$C=-0.04974$，相对误差为2%。

椭圆的计算简图见图2，长短轴分别为2.0和1.0，外加扭矩为40.0。为了同有限元[1]及一般边界单元法[4]进行比较，边界上取16个单元且节点同有限元在边界上节点重合，并取同

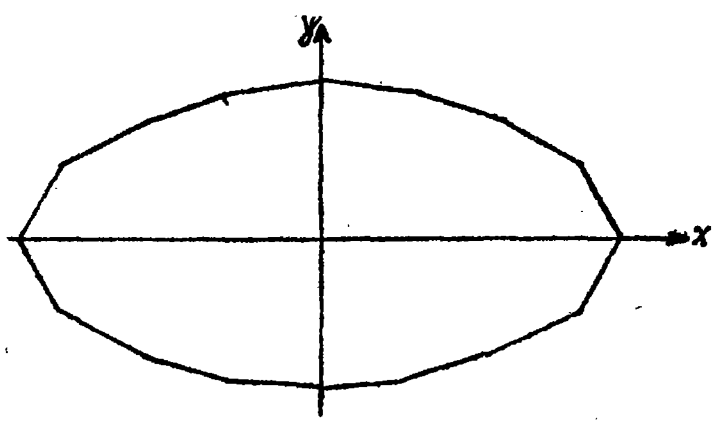

图 2

样的内部节点。主要参数比较见表1。

表1　主要参数比较表

	节点数	右端量C	C的误差	应　　力
有限元	33	－17.5439	10.23%	无
一般边界元	16	－17.8293	12.02%	无
本文方法	16	－15.7166	1.25%	有
解析解		－15.9155	0	有

从计和结果来看，（见表1）本文所提出的方法比别的数值方法误差将近小10倍。它为1.25%，可认为是离散引起的。而别的方法误差在10%以上，这样其计算可靠性就很难得到保证。在应力计算方面，有限元和一般边界元是不能直接求解的[4]，除非用差分，而这又要引起新的误差。但本文的方法却有这样的优点，直接求得，计算结果见图3。

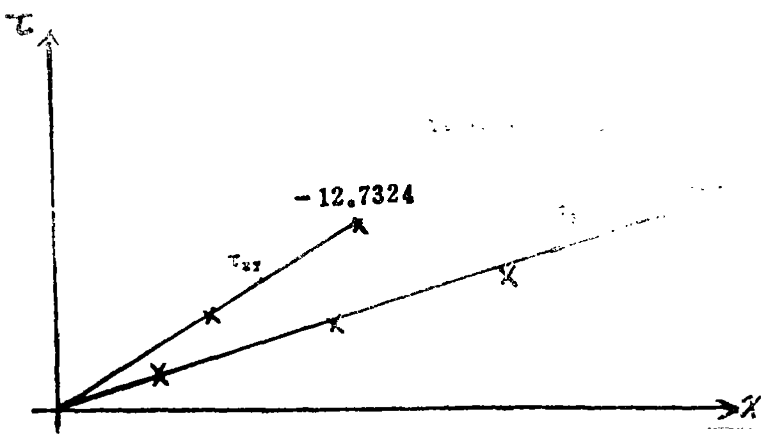

图3　应力数值结果比较

最后本文得出以下几点结论：

①本文通过对弹性扭转问题的讨论，发展了泊松方程的求解方法，使其简单易行，且精度较高，见结果比较图1—3。

②就泊松方程来讲，若直接按边界单元法求解，就无法得到最后的代数方程。本文提出的回代法克服了这一困难。

⑶作为力学中的扭转问题，按照本文所给的技巧可较快地求出应力。而一般边界单元法和有限元却不能做到这一点。另外，有了应力，本方法可望发展求解塑性问题。

参　考　文　献

〔1〕梁昆淼，《数学物理方法》，人民教育出版社1978.

〔2〕C.A. Brebbin,《The Boundary Element Method for Engineers》Peutech press, 1978

〔3〕徐艺纶，《弹性力学》上册，人民教育出版社 1979

〔4〕C.A. Brebbia and S. walker ,《Boundany Element Techniques in Engineering》1980.

〔5〕W.Geumay, Computing the C-Matrix in Nou-Smooth Boundany Points, Friedel Hartmam,Uni. of Dortumd.

〔6〕铁摩辛柯、古地尔，《弹性理论》人民教育出版社

鸣　　谢

本文的工作得到杨耀乾教授的指导，在此深表感谢。

新　刊　信　息

中国科学技术期刊编辑学会主办的《编辑学报》已经正式出版。

《编辑学报》是有关编辑学的综合性学术期刊，报道国内外有关编辑学，主要是科技期刊编辑理论研究成果，交流编辑实践经验，为培养编辑人才，提高期刊质量，促进科技交流服务。本刊设有理论研究、专题报告、编辑工程、期刊管理、出版知识、科技文章写作、海外信息、书刊评介等。

读者对象，主要是科技编辑人员，撰写各类科技文章的科技人员，大专院校编辑专业的师生等。

《编辑学报》为季刊，国内定价每本2.00元，全年4期，共计8.00元，本会团体和个人会员9折优惠。订阅者请邮局汇款至“100081，北京海淀区学院南路86号716室中国科学技术期刊编辑学会发行组”。