

用减少弯曲刚度法研究反对称角铺层合板

杨 加 明

(建工系)

摘 要

本文用减少弯曲刚度方法用于解决反对称角铺层合板的弯曲问题。分别得出了不同物理参数的电算结果。同精确解比较,减少弯曲刚度方法对任意4层以上的反对称层合板,其误差小于1.5%。

引 言

随着科学技术的发展,复合材料日益被人们广泛地重视,角铺层合板则是最常见的一种。对于多层对称层合板的变形,由于不存在耦合刚度系数,因此无论是求解板的静态挠度问题,还是板的屈曲或自由振动问题,都带来了很大的方便。但是,对于非对称层合板(包括反对称层合板),由于有耦合系数的存在,就需求解偏微分方程组,这样使问题变得复杂多了。为了简化求解过程,而又不影响结果的精度,减少弯曲刚度(Reduced Bending Stiffness)方法则可以满足上述要求。RBS方法首先由 Chamis⁽¹⁾提出解决了复合材料层合板的屈曲问题,之后有一些学者利用这种办法致力于解决板的弯曲、振动等问题。计算结果表明,减少弯曲刚度方法对解决反对称角铺层合板的线性问题(有耦合作用)尤为利索和准确。

一 基本方程

对于一般的层合板,有以下本构关系:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{pmatrix} \quad (1)$$

这里N是平面应力的合力, M是弯矩;

本文于1989年1月3日收到

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

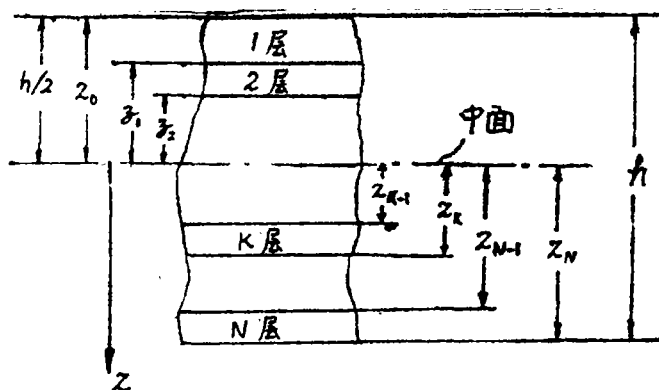
ε 和 K 是相应的一组中面应变和中面曲率:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

N 和 M 通过以下积分求得:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (5)$$



n 层层合板图

中面应变与中面位移相关:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (6)$$

而中面曲率与横向位移（即挠度 w ）有以下关系。

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

在(1)中,

$$[A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \quad (8)$$

[B] 和 [D] 的表达同 [A] 相类似。

A_{ij} 称为拉伸刚度, B_{ij} 为耦合刚度, D_{ij} 为弯曲刚度

$$\begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{pmatrix} = - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_k - Z_{k-1}) \\ \frac{1}{2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \\ \frac{1}{3} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (9)$$

上式中, $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ 为第 K 层的偏轴模量。

根据力的平衡关系, 我们有:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = \rho \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} \quad (12)$$

这里 ρ 指单位面积的质量。

考虑到式(1)、(3)、(6)、(7)、(8)和(10)、(11)、(12)可以得到三个位移表达的层合板的控制方程

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (13)$$

L_{ij} 为线性偏微分算子

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{22} &= A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{13} &= -B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_{23} &= -B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ N &= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (14)$$

如果相应保留 (13) 式右边的一些项, 我们就可以分别得到板的弯曲、屈曲或振动的控制方程。在本文的数值计算中, 为了方便地说明问题, 仅计及右边的第一项。

二 减少弯曲刚度后的控制方程

对板的本构关系 (即 (1) 式) 进行变换, 可得出以下的形式

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ -(B^*)^T & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ K \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A]^{-1} \\ [B^*] &= -[A]^{-1} [B] \end{aligned} \quad (16a-c)$$

$$[D^*] = [D] - [B] [A]^{-1} [B]$$

右上标“-1”代表逆阵，“T”代表转置。

从(15)式很容易得到[M]与[N]和[K]的关系

$$[M] = -[B^*]^T [N] + [D^*] [K] \quad (17)$$

减少弯曲刚度法就是基于假设(17)式中右边的第一项同第二项相比，小得可以忽略不计，也就是

$$[M] \approx [D^*] [K] \quad (18)$$

[D*]可以写成以下的对称矩阵的形式：

$$[D^*] = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

把式(3)、(7)、(18)、(19)代入(12)式中，得出

$$\begin{aligned} & D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (20)$$

上式就是利用减少弯曲刚度法得出的层合板的控制方程。同(7)式相比较，求解的方程数由三个变成一个，求解的位移也由三个变为一个。(20)式在形式上没有耦合作用，实际含于 D_{ij}^* 中。这样，问题就大大地被简化。

三 反对称层合板的精确解

反对称层合板包含有两种情况。一种是反对称正交铺设层合板，另一种是反对称角铺设层合板。对于反对称正交铺设层合板，我们有：

$$A_{16} = A_{26} = B_{12} = B_{26} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad (21)$$

对于反对称角铺设层合板：

$$A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad (22)$$

由于有上两式的关系，线性偏微分算子 L_{11} 就变得简单多了。

在此仅考虑一矩形板(长、宽、厚分别为a、b、h)的静态弯曲问题， $N = \rho = 0$ 。为便于分析计算，把方程组(13)式化为无量纲形式。因此设：

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \lambda = a/b, \quad Q = \frac{qa^4}{D_{11}h}$$

$$U = u/h, \quad V = v/h, \quad W = w/h \quad (23)$$

把 (22) 和 (23) 代入 (13) 得到无量纲化的控制方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + a_3 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + a_4 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + b_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + b_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + b_3 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + b_4 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + c_1 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + c_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + c_3 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^2 \partial \eta} + c_4 \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^3} + c_5 \frac{\partial^3 V}{\partial \xi^2 \partial \eta} + c_6 \frac{\partial^3 V}{\partial \xi \partial \eta^2} = Q \quad (26)$$

a_i 、 b_i 、 c_i 是与材料有关的无量纲系数。

考虑一四边固定支承的矩形层合板。在四周的边界上, 没有挠度, 转角为零。另外, 我们讨论较常见的情况, 使这些固支边界沿法向和切向无位移, 即:

$$\text{当 } \xi = 0, 1 \text{ 时 } W = \frac{\partial W}{\partial \xi} = U = V = 0 \quad (27)$$

$$\text{当 } \eta = 0, 1 \text{ 时 } W = \frac{\partial W}{\partial \eta} = U = V = 0$$

位移由下列式子表示时, 边界条件 (27) 就可得到满足:

$$U = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (28)$$

$$V = \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (29)$$

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn} \phi_m(\xi) \psi_n(\eta) \quad (30)$$

这里 ϕ_m 、 ψ_n 都为梁函数

$$\phi_i(x) = \psi_i(x) = (\sin\beta_1 x - \sinh\beta_1 x) - v_1(\cos\beta_1 x - \cosh\beta_1 x) \quad (31)$$

把 (28)、(29)、(30) 代入 (24)、(25)、(26) 中, 即得以系数 u_{mn} 、 v_{mn} 、 w_{mn} 为未知数的代数方程组

$$u_{mn} = \frac{4}{\pi^2(m^2 + a_1 n^2)} \sum_{k,l=1}^{\infty} [a_2 \pi^2 k l v_{kl} P_1^{mk} P_1^{nl} + w_{kl} (a_3 P_2^{mk} Q_3^{nl} + a_4 P_3^{mk} Q_3^{nl})] \quad (32)$$

$$v_{mn} = \frac{4}{\pi^2(m^2 + b_1 n^2)} \sum_{k,l=1}^{\infty} [b_2 \pi^2 k l u_{kl} P_1^{mk} P_1^{nl} + w_{kl} (b_3 P_3^{mk} Q_3^{nl} + b_4 P_2^{nl} Q_2^{mk})] \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
w_{mn} + H_{1mn} \sum_{k,l=1}^{\infty} w_{kl} P_4^{mk} P_4^{nl} &= Q_{mn} + \\
+ H_{2mn} \sum_{k,l=1}^{\infty} [u_{kl} P_3^{kn} Q_1^{ml} (c_3 k^2 + c_4 l^2) + v_{kl} Q_3^{mk} P_2^{ln} (c_5 k^2 + c_6 l^2)] \quad (34)
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
H_{1mn} &= \frac{c_1}{(\beta_m^4 + c_2 \beta_n^4)} H_m H_n \\
H_{2mn} &= \frac{\pi^3}{(\beta_m^4 + c_2 \beta_n^4)} H_m H_n \\
Q_{mn} &= \frac{Q}{(\beta_m^4 + c_2 \beta_n^4)} H_m H_n \int_0^1 \int_0^1 \varphi_n(\xi) \psi_m(\eta) d\xi d\eta \\
P_1^{mk} &= \int_0^1 \cos k\pi x \sin m\pi x dx \\
P_2^{mk} &= \int_0^1 \varphi_k''(x) \sin m\pi x dx \\
Q_2^{mk} &= \int_0^1 \varphi_k'(x) \sin m\pi x dx \\
P_3^{mk} &= \int_0^1 \varphi_k(x) \sin m\pi x dx \\
Q_3^{mk} &= \int_0^1 \varphi_k'''(x) \sin m\pi x dx \\
P_4^{mk} &= \int_0^1 \varphi_k''(x) \varphi_m(x) dx \\
Q_5^{mk} &= \int_0^1 \varphi_m(x) \cos k\pi x dx
\end{aligned} \quad (35a-j)$$

这里的 H_i 为 φ_i 的范数。

根据上述步骤, 可以求出(30)式 W 的精确解。

四 求解减少弯曲刚度后的控制方程

对于方程(20) ($\rho = N = 0$), 还可以作进一步的简化。讨论反对称角铺设层合板, 参考式(22)

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (36)$$

把上式代入 (16c) 中, 可以知道 $D_{16}^* = D_{26}^* = 0$, 无量纲化后 (20) 式化为:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + C_1^* \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + C_2^* \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = Q^* \quad (37)$$

这里

$$\begin{aligned} C_1^* &= 2\lambda^2 (D_{12}^* + 2D_{66}^*) / D_{11}^* \\ C_2^* &= \lambda^4 D_{22}^* / D_{11}^* \\ Q^* &= qa^4 / (D_{11}^* h) \end{aligned} \quad (38)$$

(37) 相对于 (24)、(25)、(26) 就非常简单明了。

对四边固定支承的边界条件 $W = W_{,n} = 0$, 我们仍设 W 为 (30) 式, (37) 式的解便可从以下线性方程组中求得 (m 的终值须等于 n 的终值)。

$$W_{mn} + H_{1(n)}^* \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} W_{kl} P_{4mk} P_{4l}^{-1} = Q_{mn}^* \quad (39)$$

这里的 $H_{1(n)}^*$, Q_{mn}^* 同 (35a) (35c) 相类似, 只要把 c_1 、 c_2 、 Q 换成 C_1^* 、 C_2^* 、 Q^* 即可。

五 数值结果及分析

本文计算了三种复合材料层合板。层合板的每一层都是正交各向异性, 它们的弹性常数 [2] [3] 分别为:

第一种材料: $E_1/E_2 = 3$, $G_{12}/E_2 = 0.5$, $\gamma_{12} = 0.25$

第二种材料: $E_1/E_2 = 25$, $G_{12}/E_2 = 0.5$, $\gamma_{12} = 0.25$

第三种材料: $E_1/E_2 = 40$, $G_{12}/E_2 = 0.6$, $\gamma_{12} = 0.25$

对于四边固支矩形层合板, 受均布横向载荷作用, 用 W_{max} 表示精确解的中心挠度, W_{max}^* 表示减小弯曲刚度法求得的近似中心挠度, 用近似方法求得的误差百分比为

$$\frac{W_{max} - W_{max}^*}{W_{max}} \times 100\%$$

表 1 到表 4 为各种情况下的误差百分比值。从表中可以清楚地看出:

1) 层合板的层数越多, 误差越小。

2) E_1/E_2 越小, 误差越小

3) 层合板的反对称铺设角为 0° 或 90° 时, 用减小弯曲刚度方法求得的最大挠度几乎等于精确解。

总之, 减小刚度方法不适宜只有两层且具有高模量比的层合板, 也就是说, 它适用于二层低模量比和四层以上任意模量比的反对称层合板。实践证明, 减小弯曲刚度法对解决反对称层合板是一种行之有效的方法。

表1: RBS方法所产生的误差百分比 ($\theta = \pm 45^\circ$, $E_1/E_2 \approx 3$)

层数N λ	2	6	50
1.0	-2.59	-0.24	0.00
1.5	-0.77	-0.07	0.00
2.0	-0.31	-0.03	0.00
8.0	-1.47	-0.16	0.00

表2: RBS方法所产生的误差百分比 ($N = 4$, $E_1/E_2 = 25$)

λ $\pm \theta^\circ$	1.0	1.5	3.0
0	0.00	0.00	0.00
15	-0.57	-0.28	-0.06
30	-0.70	-0.29	-0.14
45	-0.59	-0.20	-0.17

表3: RBS方法所产生的误差百分比 ($N = 6$, $\lambda = 1.5$)

$\pm \theta^\circ$ E_1/E_2	45	60	75	90
3	-0.07	-0.11	-0.10	0.00
25	-0.31	-0.23	-0.22	0.00
40	-0.36	-0.23	-0.19	0.00

表 4: RBS方法所产生的误差百分比 ($\theta = \pm 30^\circ$, $\lambda = 2$)

E_1/E_2 N	3	25	40
2	-0.59	-10.31	-18.01
4	-0.14	-1.27	-1.32
6	-0.08	-0.51	-0.52
8	-0.05	-0.28	-0.28

参 考 文 献

- [1] C. C. Chamis, Buckling of anisotropic composite plates, J. Struct. Div., Proc. ASCE, 95, 2119—2139, 1969
- [2] R. M. Jones, Mechanics of Composite Material, McGraw-Hill, New York, 1975
- [3] J. M. Whitney and N. J. Pagano Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, J. Appl. Mech., 4, 1031—1036, 1970
- [4] C. Y. Chia, Finite deflections of uniformly loaded clamped rectangular anisotropic plates, AIAA Journal, 10, 1399—1400, 1972

Analysis of Antisymmetrically Laminated Angle—ply Plates Using Reduced Bending Stiffness Method

Yang Jiaming

(Department of Civil Engineering)

Abstract-The Reduced Bending stiffness method has been used for solving the problem of antisymmetrically laminated angle-ply plates. Direct comparisons are made between exact solutions and those using from the RBS method. Numerical results for wide ranges of the physical parameters including aspect ratio, moduli ratio, lamination orientation angle, numbers of plies are obtained in the paper. We find that the method has sufficient accuracy for any more than 4 plies of antisymmetrically laminated plates.