Adam猜想的又一类反例

周 尚 超

（基础课部）

摘 要

本文构造出一类循环图，这些循环图是同构的但不是Adam同构的。

设G是无向简单图，其顶点集是｛0,1,2…,p－1｝。我们将$|i-j|$与$p-|i-j|$的最小者称为边ij的长度。如果G含有一条长为a的边，则G就含有所有长为a的边，则称G为循环图。设G是循环图，如果G的边的不同长度为$a_1,a_2,\cdots,a_K$，则记为$G=C_P\langle a_1,a_2,\cdots,a_K\rangle$。G的顶点的运算对P取模。令$A^+=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_K\}$，$A^{-1}=\{-a_1,\ -a_2,\ \cdots,\ -a_K\}$，$A=A^+\cup A^{-1}$。我们也将$C_P\langle a_1,a_2,\cdots,a_K\rangle$记为$C_P\langle A\rangle$。易知$ij\in E(G)$（G的边集）当且仅当$-j\in A$。设$G_i=C_P\langle A_i\rangle(i=1,2)$。若r与p互素且$rA_1=A_2$，那么映射$j\to rj$是$G_1$到$G_2$的同构映射。这时称$G_1$与$G_2$是Adam同构的。Adam猜想：如果$G_1$与$G_2$同构，则存在与p互素的r，使$rA_1=A_2$，即$G_1$与$G_2$是Adam同构的。下面的定理1说明了Adam猜想成立的条件。

定理1〔1,2,3〕设$C_P\langle A\rangle$与$C_P\langle A_2\rangle$同构，且满足下列条件之一，则$C_P\langle A_1\rangle$与$C_P\langle A_2\rangle$是Adam同构的：

（1）p是素数，

（2）p是两个不同的素数之积，

（3）$p=n_1n_2\cdots n_m$是m个不同的素数之积，且$n_1n_2\cdots n_r<n_{r+1}$（对任意r，$1\leqslant r\leqslant m-1$），以及$\phi(p)$与p互素，这里是$\phi(p)$欧拉函数，

（4）$A_1=\{a_1,a_2,-a_1,-a_2\}$，

（5）$A_1=\{a_1,\ a_2,\ \frac{p}{2},\ -a_1,\ -a_2\}$这里p为偶数。

在一般情况下，Adam猜想是不成立的。如果G_1与G_2同构但不是Adam同构，则由定理1的(5)和(4)，知G_1至少是6度正则图，因此$p\geqslant 13$，再由定理1的(2)，知$p\geqslant 16$。这就是说，最小的反例有16个顶点。Elspas和Turner〔4〕注意到$C_{16}\langle 1,2,7\rangle$和$C_{16}\langle 2,3,5\rangle$同构但不是Adam同构。这就是顶点最少且度数最小的反例。当p被大于3的素数的平方整除时，Godsil，Alspash和Parsons〔1，5〕得到Adam猜想的一族反例。下面我们要构造一

本文于1988年9月26日收到

类反例，这类反例的顶点数p被8整除。

在下文中，设$p=4n+4$，n为奇数，$n\geqslant 3$。设$A_0\sqsubseteq\{2, 4, \cdots, p-2\}$，即$A_0$是偶数顶点集，$A_1=A_0\cup\{1, -1, 2n+1, 2n+3\}$，$A_2=A_0\cup\{n, n+2, 3n+4, 3n+2\}$

定理2　设$G_1=C_p\langle A_1\rangle$，$G_2=C_p\langle A_2\rangle$，则$G_1$与$G_2$同构。如果$nA_0\neq A_0$，$(n+2)A_0\neq A_0$，则$G_1$与$G_2$不是Adam同构。

证明　作映射f：$2i\longrightarrow 2i$，$j\longrightarrow j+n+1$，j是奇数。设$kt\in E(G_1)$，则$k-t\in A_1$。若$k-t\in A_0$，则$f(k)-f(t)=k-t\in A_0\sqsubseteq A_2$，因此$f(k)f(t)\in E(G_2)$。若$k-t\in\{1, -1, 2n+1, 2n+3\}$，则$f(k)-f(t)=k-t-n-1\in\{-n, -n-2, n, n+2\}=\{3n+4, 3n+2, n, n+2\}\sqsubseteq A_2$。因此$f(k)f(t)\in E(G_2)$。这说明f是$G_1$到$G_2$的同构映射。

设G_1与G_2是Adam同构的，则存在r与p互素，使$rA_1=A_2$，因此$r\cdot 1\in A_2$。因为r是奇数，所以$r\in\{n, n+2, 3n+4, 3n+2\}$。又因$(-r)A_1=A_2$，因此可设$r\in\{n, n+2\}$。这样由$G_1$与$G_2$Adam同构可推得$nA_0=A_0$或$(n+2)A_0=A_0$.因此当$nA_0\neq A_0$以及$(n+2)A_0\neq A_0$时，$G_1$与$G_2$不是Adam同构的。

定理3　设$p=4n+4$，$n\geqslant 3$是奇数，则对任意$r(6\leqslant r\leqslant p-7)$，存在r度正则的循环图$G_1=C_p\langle A_1\rangle$和$G_2=C_p\langle A_2\rangle$，使得$G_1$与$G_2$同构但不是Adam同构。

证明　设G_1与G_2是定理2中的，但A_0如下：$A^+_0=\{2j|1\leqslant j\leqslant m\}\cup\{2n+2\}$或$A^+_0=\{2j|1\leqslant j\leqslant m\}$。这里$m<n$。因为$2n\in nA_0$，$2n\notin A_0$，因此$nA_0\neq A_0$。同样可得$(n+2)A_0\neq A_0$，因此$G_1$与$G_2$同构但不是Adam同构。当m取尽$1,2,\cdots,n-1$时，$G_1$的正则度取尽$6, 7, \cdots, 2n+3$。$\overline{G_1}$（$G_1$的补图）与$\overline{G_2}$同构且不是Adam同构，$\overline{G_1}$的正则度取尽$2n, 2n+1, \cdots, p-7$。

参　考　文　献

〔1〕F.Boesch and R.Tindell, J.Graph. Theory 4(1984)487—499.

〔2〕孙良，科学通报 1986, 23. p1834.

〔3〕周尚超，长沙铁道学院学报，2(1987)11—18.

〔4〕B.Elspas and J.Turner., J.Combinatorial Theory 9(1970)297—307.

〔5〕B.Alspash and T.D.Parsons., Discrete Math. 25(1979)97—108.