

有限元一边界元耦合中刚度 矩阵对称化的方法及其应用

雷 晓 燕

(建 工 系)

摘 要

本文提出了一种适用于无限域,半无限域中有限元一边界元耦合时刚度矩阵对称化的方法,并将其推广到了一般情况。文中还对文献[1]的方法作了评述,指出[1]的方法成立是有条件的。最后给出了两个计算实例,计算表明,该方法具有简单易行,节约容量和精度高的优点。

关键词:对称化,有限元与边界元耦合

引 言

关于用有限元与边界元耦合方法求解工程实际问题的优越性已在很多文献中作了介绍,如文献[1]、[2]。但是,在现行的一般有限元与边界元耦合数值方法中,至今还有一个问题没有得到很好的解决,这就是如何处理刚度矩阵的非对称性问题。造成刚度矩阵非对称的原因是由于边界元方程的系数矩阵是非对称的,在将边界元方程化成等效的有限元方程后,所得到的等效刚度矩阵也是非对称的。因此,耦合以后,总刚度矩阵为非对称的刚度矩阵,必须按非对称的求解方法解线性方程组,这将导致计算机的存储量增加,给计算带来很多困难。不妨让我们以三维非线性问题为例来说明这一点,对于三维问题,若采用20节点的等参元,则有限元的单元刚度矩阵就是 60×60 的矩阵,耦合后的总刚度矩阵则更大。如果线性代数方程组的系数矩阵非对称,则要求计算机多存储近一倍的元素,而且增加了计算工作量,加上进行非线性分析时需要反复进行平衡迭代,耗费的机时也将大大增加。要求计算机具有如此之大的存储量和需要耗费大量的机时,以致使分析三维非线性问题成为不可能。因此寻求刚度矩阵对称化的方法是有意义的。

本文从能量的观点出发,提出了一种适用于无限域,半无限域中有限元与边界元耦合时

本文于1989年4月28日收到

刚度矩阵对称化的方法,并推广到了一般耦合的情况。利用该方法,我们试算了两个考题,并给出了与精确解,其它数值解的比较结果。

一 有限元-边界元耦合方法简介

由最小势能原理可建立有限元方程如下

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} + \underline{Q} \quad (1)$$

$$\text{其中: } \begin{cases} \underline{K} = \sum_e \int_{\Omega} \underline{e}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega \\ \underline{a} = \sum_e \underline{a}^e \\ \underline{F} = \sum_e \int_{\Gamma_0} \underline{N}^T \underline{p} \, d\Gamma \\ \underline{Q} = \sum_e \int_{\Omega} \underline{e}^T \underline{N}^T \underline{b} \, d\Omega \end{cases}$$

由加权余量法或Somigliana恒等式可建立边界元方程如下

$$\underline{H} \underline{a}' = \underline{G} \underline{t} + \underline{B} \quad (2)$$

其中: $\underline{a}'$ 为节点位移向量, $\underline{t}$ 为节点面力向量, $\underline{H}$, $\underline{G}$ 为包含有基本解积分的系数矩阵, $\underline{B}$ 为体力向量。

在现行的耦合方法中,一种常用的做法是将边界元方程化为等效的有限元方程,为此用 $\underline{M}\underline{G}^{-1}$ 左乘 (2) 式两端,并令

$$\begin{cases} \underline{K}' = \underline{M}\underline{G}^{-1}\underline{H} \\ \underline{F}' = \underline{M} \underline{t} \\ \underline{Q}' = \underline{M}\underline{G}^{-1}\underline{B} \end{cases} \quad (2')$$

其中: $\underline{M} = \sum_e \underline{M}^e = \sum_e \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{\psi} \, d\Gamma$, $\underline{N}$, $\underline{\psi}$ 分别为节点位移和节点面力插值函数矩阵。

则 (2) 式成为

$$\underline{K}' \underline{a}' = \underline{F}' + \underline{Q}' \quad (3)$$

上式即为等效的有限元方程。利用耦合面上位移和力的平衡条件,即

$$\underline{a} = \underline{a}', \quad \underline{F} + \underline{F}' = 0 \quad (4)$$

只要将 (3) 式按标准的有限元集成规则迭加到有限元方程中,即完成了两者的耦合。

二 耦合法中刚度矩阵对称化方法

在引言中我们已说明了总刚度矩阵的非对称性是由于边界元系数矩阵的非对称而造成。

的, 因此我们只须对边界元部分加以处理。这里我们从能量出发, 写出系统的总位能, 引用边界积分方程, 利用最小位能原理来建立等效的有限元方程, 从而达到使刚度矩阵对称化的目的。

为此, 考察如图 1 所示的带孔洞的半无限域问题 (对于无限域问题可仿此进行), 假设不计体力作用, 将整个求解域 Ω 分成两部分 $\Omega_1 + \Omega_2$, 其中 Ω_1 为有限元求解域, Ω_2 为边界元求解域。

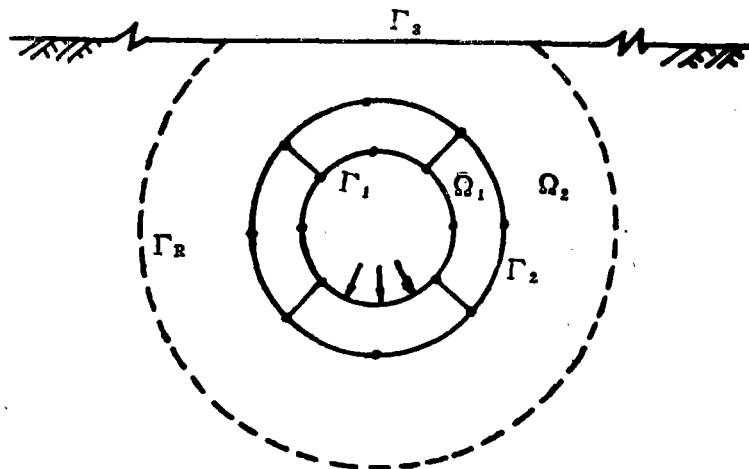


图 1

对区域 Ω_1 可写出系统的位能 Π_1

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \left(\int_{\Gamma_1} \bar{p}_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_i u_i d\Gamma \right) \quad (5)$$

对区域 Ω_2 , 系统的位能 Π_2 为

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \left(\int_{\Gamma_2} -p_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \bar{p}_i u_i d\Gamma + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} p_i u_i d\Gamma \right) \quad (6)$$

整个系统的总位能为

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (7)$$

由于 $\int_{\Gamma_2} p_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} -p_i u_i d\Gamma = 0$, 因此, 在系统的总位能 Π 中, $\int_{\Gamma_2} p_i u_i d\Gamma$ 与 $\int_{\Gamma_2} -p_i u_i d\Gamma$ 将相互抵消, 这样在 (5)、(6) 两式中可以不计及它们的作用。

又因为在边界 Γ_3 上, 有 $\bar{p}_i = 0$, 因此有

$$\int_{\Gamma_3} \bar{p}_i u_i d\Gamma = 0$$

同样, 在边界 Γ_R 上, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 有 $u_i = 0$, 这时有 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} p_i u_i d\Gamma = 0$

最后 (6) 式成为

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (8)$$

利用分部积分公式, (8) 式还可写成

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_2} -p_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \overline{p}_i u_i d\Gamma + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} p_i u_i d\Gamma \right) \quad (9)$$

根据与从 (6) 式推导 (8) 式的同样理由, 有

$$\int_{\Gamma_3} \overline{p}_i u_i d\Gamma = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} p_i u_i d\Gamma = 0$$

因此

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} -p_i u_i d\Gamma \quad (10)$$

将上式写成矩阵的形式, 则有

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} -\underline{u}_2^T \underline{p}_2 d\Gamma \quad (11)$$

式中, $\underline{u}_2$, $\underline{p}_2$ 中的下指标 “2”, 表示 $\underline{u}$, $\underline{p}$ 是域 Ω_2 中的量。

另一方面, 对域 Ω_2 利用加权余量法可建立边界积分方程如下

$$\underline{H} \underline{a}_2 = \underline{G} \underline{t}_2 \quad (12)$$

其中, $\underline{a}_2$, $\underline{t}_2$ 分别为节点位移和节点面力向量。

域内任一点处的位移和面力为

$$\underline{u}_2 = \underline{N} \underline{a}_2 \quad (13)$$

$$\underline{p}_2 = \underline{\psi} \underline{t}_2 \quad (14)$$

其中, $\underline{N}$, $\underline{\psi}$ 分别为位移和面力插值函数。

由 (12) 式可得

$$\underline{t}_2 = \underline{G}^{-1} \underline{H} \underline{a}_2 \quad (15)$$

将上式代入 (14) 中, 则有

$$\underline{p}_2 = \underline{\psi} \underline{G}^{-1} \underline{H} \underline{a}_2 \quad (16)$$

再将 (13)、(16) 两式代入 (11) 中, 得到

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \underline{a}_2^T \underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{H} \underline{a}_2 \quad (17)$$

$$\text{其中: } \underline{M} = \int_{\Gamma_2} \underline{N}^T \underline{\psi} d\Gamma$$

$$\text{由 } \frac{\partial \Pi_2}{\partial \underline{a}_2^T} = 0,$$

$$\underline{K}_2 \underline{a}_2 = 0 \quad (18)$$

$$\text{其中: } \underline{K}_2 = \frac{1}{2} \left\{ \underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{H} + (\underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{H})^T \right\} \quad (19)$$

显然 $\underline{K}_2$ 为对称矩阵。(18) 式即为边界元部分的等效有限元方程。

上述刚度矩阵对称化的方法也可推广到一般情况。对于图 2 所示的有限元与边界元耦合问题, 与 (5)、(6) 两式相类似的公式为

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_i u_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_2} p_i u_i d\Gamma - \int_{\Omega_1} b_i u_i d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_2} p_i u_i d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_3} \bar{p}_i u_i d\Gamma - \int_{\Omega_2} b_i u_i d\Omega \quad (21)$$

计及体力作用的边界积分方程为

$$\underline{H} \underline{a}_2 = \underline{G} \underline{t}_2 + \underline{B}_2 \quad (22)$$

利用以上各式, 按照前述的推导方法, 不难得到与 (18) 式相类似的方程

$$\underline{K}_2 \underline{a}_2 = \underline{F}_2 \quad (23)$$

其中, $\underline{K}_2$ 与 (19) 式相同, 但 $\underline{M} = \oint_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{\psi} d\Gamma$ (Γ 为 Ω_2 的边界), $\underline{F}_2$ 为

$$\underline{F}_2 = \int_{\Gamma_3} \underline{N}^T \underline{\bar{p}} d\Gamma + \frac{1}{2} \left\{ \underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{B}_2 + \int_{\Omega_2} \underline{N}^T \underline{b} d\Omega \right\} \quad (24)$$

显然 $\underline{K}_2$ 也是对称矩阵。

需要指出, 尽管边界积分方程是精确等式, 但经离散化后, 由于 $\underline{u}_2$ 、 $\underline{p}_2$ 是独立插值的, 因此式 (12) 或 (22) 只是近似等式, 由此而导出的刚度矩阵也带有一定的近似性, 为了改善精度, 可以用施加平衡约束的办法进行校正 [3], 但实际试算结果表明, 即使不作任何修正, 所得的结果也具有相当高的精度 (见算例), 完全能满足工程的要求。

三 几 点 说 明

1、以上所述的刚度矩阵对称化方法在数值计算中是容易实现的。在未进行刚度矩阵对称化以前, 边界元部分的等效有限元方程中的刚度矩阵, $\underline{K}' = \underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{H}$, 见 (2)' 式, 当

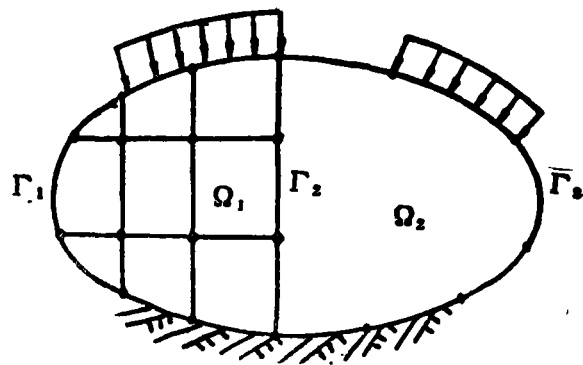


图 2

对刚度矩阵进行对称化处理时，仅须作一次两个矩阵的加法运算，即 $\underline{K} = \frac{1}{2} (\underline{K}' + \underline{K}'^T)$ 及对方程的右端项进行处理（对有限域情况而言），这在程序设计上是很容易做到的。

2、文献[1]的作者，从另一途径提出了刚度矩阵对称化的方法，为说明问题起见，现将该方法作一简单介绍。

为此将(3)式重写如下

$$\underline{K}' \underline{a}' = \underline{F}' + \underline{Q}'$$

其中， $\underline{K}' = \underline{M} \underline{G}^{-1} \underline{H}$ 是非对称矩阵。

设 K_{ij} 为对称化后所得到的对称矩阵 $\underline{K}$ 的元素，作

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(K_{ij} - K'_{ij}) + (K_{ji} - K'_{ji})]$$

使误差 ε_{ij} 的平方最小，即

$$\frac{\partial (\varepsilon_{ij})^2}{\partial K_{ij}} = 2K_{ij} - K'_{ij} - K'_{ji} = 0$$

由此得 $K_{ij} = \frac{1}{2} (K'_{ij} + K'_{ji})$

即 $\underline{K} = \frac{1}{2} (\underline{K}' + \underline{K}'^T)$

按这种方法得到的刚度矩阵与本文得到的刚度阵(19)式相同，但这里仅仅是从直观上处理了刚度矩阵 $\underline{K}'$ ，而对(3)式的右端项并未做任何修改。当我们考虑的是无限域或半无限域的问题时，这种方法是一致的，但当我们考虑的是有限域的情况时，除对 $\underline{K}'$ 修正外，还须对方程的右端荷载项作相应的修改，这时按文献[1]的方法计算时将带来较大的误差。

3、由(24)式可见，当不计体力，且边界元区域的边界上无外力作用时，等效节点力向量 $\underline{F}_2$ 为零，这时，只需对等效刚度矩阵 $\underline{K}_2$ 进行对称化处理，而无须修改右端项。这说明，文献[1]所述的方法成立是有条件的，其条件是，不计体力，且边界元区域的边界上无外力作用。在一般情况下，文献[1]的方法是不成立的。

4、如果我们所考虑的问题是无体力的情况，则为了简化计算、应尽量将有面力作用的区域划为有限元区，这样在用耦合法计算时，仅需修改刚度矩阵，而无须修改右端项。对图3所示的问题，我们应将 Ω_1 划成有限元区域， Ω_2 划成边界元区域。

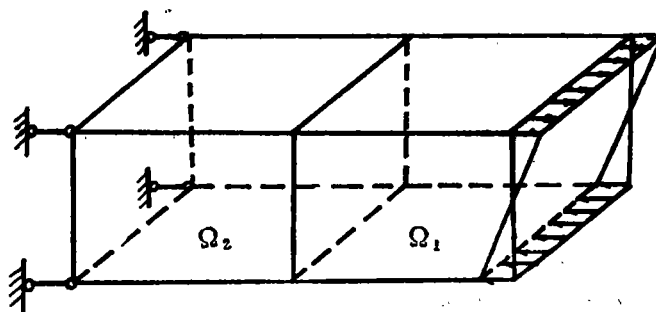


图 3

四 数 值 算 例

利用上述方法,我们编制了三维弹塑性有限元与边界元耦合程序FEB,并试算了两个考题,给出了与精确解比较的结果。

算例一:无限域中洞室问题受均匀压力作用的弹塑性分析(见图4)。洞室内径为4m,弹性模量 $E=210\text{ T/m}^2$,泊松比 $\nu=0.3$,屈服极限 $\sigma_s=8\text{ T/m}^2$,强化参数 $H'=0$,选用Mises屈服准则。采用增量法求解,平衡迭代收敛精度控制参数为0.5%,荷载从 5 T/m^2 开始加载,以后分别为7、8、9、 10 T/m^2 。利用结构的对称性,取八分之一部分的球体作为计算模型。内部弹塑性区域采用三个20节点等参有限元,外部无限域的内边界采用三个8节点等参边界元。其位移,应力与精确解和利用非对称刚度矩阵求解的数值解的比较见表1。计算表明,该方法具有较高的精度。

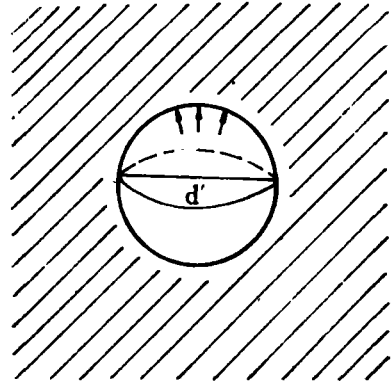


图 4

无限域中孔洞问题的边界元一有限元耦合弹塑性分析 表 1

$p(\text{T/m}^2)$			5.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$r = 2.2\text{ m}$	σ_r	本文数值解	-3.68	-5.15	-6.12	-7.21	-8.29
		非对称数值解	-3.68	-5.16	-6.12	-7.23	-8.29
		解析解	-3.70	-5.18	-6.39	-7.39	-8.39
	σ_θ	本文数值解	1.85	2.59	1.81	0.70	-0.37
		非对称数值解	1.84	2.57	1.86	0.75	-0.31
		解析解	1.85	2.58	1.61	0.61	-0.39
$r = 2.8\text{ m}$	σ_r	本文数值解	-1.87	-2.62	-3.23	-4.01	-4.78
		非对称数值解	-1.85	-2.55	-3.28	-4.06	-4.83
		解析解	-1.84	-2.58	-3.24	-3.91	-4.72
	σ_θ	本文数值解	0.93	1.31	1.59	1.91	2.34
		非对称数值解	0.87	1.22	1.56	1.88	2.92
		解析解	0.92	1.29	1.62	1.95	2.36
$r = 2\text{ m}$	u_r	本文数值解	3.08	4.32	6.21	8.00	9.74
		非对称数值解	2.98	4.18	6.00	7.64	9.28

算例二, 半无限域中洞室问题受均匀压力作用的弹塑性分析。洞室内半径为 2 m, 孔洞距离地表面为两倍的洞直径, 利用对称性取四分之一计算, 如图 5 所示。其中材料常数为

弹性模量 $E = 1800 \text{ T/m}^2$

泊松比 $\nu = 0.20$

粘性系数 $C = 7.07 \text{ T/m}^2$

内摩擦角 $\phi = 62.73^\circ$

采用Mohr—Coulomb屈服准则。作用荷载分别为 6、8、9、10、11、12 T/m^2 。计算结果见表 2, 与利用非对称刚度矩阵求解的数值解比较, 可见两者是非常吻合的, 说明对称化的方法是成功的。该算例 尽管 无解析解, 但从计算结果可看出位移, 应力有规律变化的正确性。此外, 可以验证, 对于进入塑性状态的区域, 所得的结果是满足Mohr屈服准则的。

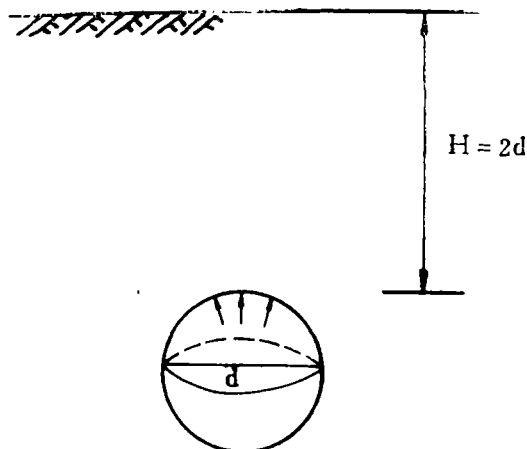


图 5

半无限域中孔洞问题的边界元—有限元耦合弹塑性分析

表 2

$P(\text{T/m}^2)$			6.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
$r = 2.2\text{m}$	σ_r	本文数值解	-4.40	-5.87	-6.67	-7.54	-8.36	-9.17
		非对称数值解	-4.40	-5.86	-6.68	-7.51	-8.35	-9.18
	σ_θ	本文数值解	2.23	2.98	3.04	2.99	2.94	2.89
		非对称数值解	2.24	2.98	3.04	2.98	2.94	2.89
$r = 2.8\text{m}$	σ_r	本文数值解	-2.13	-2.97	-3.31	-3.80	-4.29	-4.91
		非对称数值解	-2.20	-2.93	-3.38	-3.86	-4.35	-4.83
	σ_θ	本文数值解	1.11	1.40	1.68	1.95	2.11	2.37
		非对称数值解	1.06	1.41	1.63	1.88	2.09	2.33
$r = 2\text{m}$	u_r	本文数值解	3.84	5.12	5.85	6.70	7.48	8.27
		非对称数值解	3.74	4.99	5.63	6.36	7.09	7.81

注: 1、应力的单位为 T/m^2 , 位移的单位为 cm ;

2、表 2 中的 u_r 为图 5 中 A 点的径向位移。

参 考 文 献

[1] C.A.Brebbia, "Boundary Element Techniques", Theory and Applications

- in Engineering, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.
- [2] 雷晓燕, “有限元与边界元耦合中的几个问题”, 《上海铁道学院学报》No.2, 1988.
- [3] Zienkiewicz, O.C., “The Finite Element Method”, McGraw-Hill, London, 1977.
- [4] D.R.J. Owen, E. Hinton, “Finite Element in Plasticity”, Theory and Practice, Pineridge Press Limited Swansea, U.K.
- [5] 雷晓燕, “无限域和半无限域中洞室问题弹粘塑性有限元与边界元的耦合方法”, 《地下空间》Vol.9, No.1, 1989.

A Method Symmetrizing Coefficient Matrix in Coupling Finite Element with Boundary Element and Application

Lei xiaoyan

Abstract

In the paper, the author presents a method symmetrizing coefficient matrix in coupling finite element with boundary element, which is suitable for infinite and half infinite domain, and compares its results with analysis and other numerical results. The computation shows that the method has advantage of simplicity, economizing storage and high accuracy.

Key words: symmetrization, coupling finite element with boundary element