两邻边铰支两邻边固支矩形板的几何非线性分析

杨 加 明

(建 工 系)

摘 要

本文运用双重Fourier级数分析了受横向均布载荷作用下两邻边铰支两邻边固支的矩形板的非线性弯曲问题。利用该级数的正交性，可以把非线性偏微分控制方程化为含级数系数的非线性代数方程组并通过迭代解出所有系数。最后给出了位移和应力的电算结果。

关键词：富里哀级数，矩形板，几何非线性。

引 言

自从1910年von－Karman首次提出几何非线性方程以来，许多的数学和力学工作者都致力于解决板的大挠度问题。目前，除了个别简单的边界条件找到了精确解外，大多数问题还只能得到近似解。Niyogi〔1〕找到了解决正交各向异性矩形板的一种方法；而Chia〔5〕较系统地对层合板的弯曲、屈曲和振动进行了研究；文献〔2〕、〔3〕、〔6〕分别讨论了不同边界条件的板的非线性问题。但是，对于两邻边铰支两个边固支矩形板的非线性弯曲还很少有人研究。基于上述情况，本文利用Galerkin方法，找出能够满足边界条件的位移函数，把非线性偏微分方程组化为代数方程组，求出未知系数，从而找到问题的解。

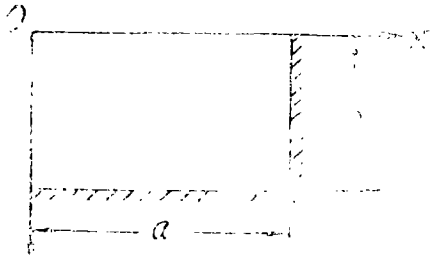

图1 两邻边铰支两邻边固支矩形板

本文于1989年9月2日收到

中国知网 https://www.cnki.net

一 控制方程及边界条件

设有一两边铰支两边固支的各向同性矩形板（如图1），受横向均布载荷的作用，a、b、h分别为板的长、宽和厚度，选取如下无量纲参数：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = a/b, \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/b \\ &Q = 2\sqrt{3}\frac{qa^4}{Dh}, \quad U = \frac{12au^0}{h^2} \\ &V = \frac{12av^0}{h^2}, \quad W = 2\sqrt{3}\frac{w}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

其中，u^0、v^0：分别为板中面上的点沿x、y方向的位移

w：板横向位移也就是挠度

q：板所承受的均布横向载荷

D：板的抗弯刚度，$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$，E和ν分别为材料的杨氏横量和泊松比。

板的非线性问题的控制方程由无量纲位移表达的形式为：

$$U_{,\xi\xi} + C_1\lambda^2 U_{,\eta\eta} + C_2\lambda V_{,\xi\eta} = -W_{,\xi}(W_{,\xi\xi} + C_1\lambda^2 W_{,\eta\eta}) - C_2\lambda^2 W_{,\eta}W_{,\xi\eta} \qquad (2)$$

$$C_1 V_{,\xi\xi} + \lambda^2 V_{,\eta\eta} + C_2\lambda U_{,\xi\eta} = -\lambda W_{,\eta}(C_1 W_{,\xi\xi} + \lambda^2 W_{,\eta\eta}) - C_2\lambda W_{,\xi}W_{,\xi\eta} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} W_{,\xi\xi\xi\xi} + 2\lambda^2 W_{,\xi\xi\eta\eta} + \lambda^4 W_{,\eta\eta\eta\eta} &= Q + (U_{,\xi} + \nu\lambda V_{,\eta})W_{,\xi\xi} + \lambda^2(\lambda V_{,\eta} + \nu U_{,\xi})W_{,\eta\eta} + \\ &+ \lambda(1-\nu)(\lambda U_{,\eta} + V_{,\xi})W_{,\xi\eta} + \frac{1}{2}(W_{,\xi}^2 + \nu\lambda^2 W_{,\eta}^2)W_{,\xi\xi} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}(\nu W_{,\xi}^2 + \lambda^2 W_{,\eta}^2)W_{,\eta\eta} + \lambda^2(1-\nu)W_{,\xi}W_{,\eta}W_{,\xi\eta} \end{aligned} \qquad (4)$$

式中，$C_1 = 0.5(1-\nu)$，$C_2 = 0.5(1+\nu)$，“,”代表对相应的无量纲座标ξ或η进行微分。

该问题所对应的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned} &\text{当}\xi = 0\text{时：} \quad U = V = W_{,\xi\xi} = W = 0 \\ &\text{当}\xi = 1\text{时：} \quad U = V = W_{,\xi} = W = 0 \\ &\text{当}\eta = 0\text{时：} \quad U = V = W_{,\eta\eta} = W = 0 \\ &\text{当}\eta = 1\text{时：} \quad U = V = W_{,\eta} = W = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

二 应力的计算

由弯矩产生的应力若用σ_x^b、σ_y^b、σ_{xy}^b表示，由薄膜力产生的应力用σ_x^m、σ_y^m、σ_{xy}^m表示，同样地对它们无量纲化：

$$(\sigma_\xi^b,\ \sigma_\eta^b,\ \sigma_{\xi\eta}^b) = \frac{a^2 h}{D}(\sigma_x^b,\ \sigma_y^b,\ \sigma_{xy}^b)$$

中国知网 https://www.cnki.net

$$
\left.
\begin{aligned}
H_{4mn} &= -\frac{4C_2\lambda}{m^2+C_1\lambda^2n^2} \\
H_{5mn} &= \frac{4}{\pi^2(m^2+C_1\lambda^2n^2)} \\
H_{6mn} &= -\frac{4C_2\lambda}{C_1m^2+\lambda^2n^2} \\
H_{7mn} &= \frac{4\lambda}{\pi^2(C_1m^2+\lambda^2n^2)} \\
P_1^{mk} &= \int_0^1 X_m(\xi)X_k''(\xi)d\xi
\end{aligned}
\right\} \qquad (23)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
P_2^{mkr} &= \int_0^1 X_m(\xi)I_k'(\xi)X_r''(\xi)d\xi \\
P_3^{mkr} &= \int_0^1 X_m(\xi)I_k(\xi)X_r''(\xi)d\xi \\
P_4^{mkr} &= \int_0^1 X_m(\xi)I_k(\xi)X_r(\xi)d\xi \\
P_5^{mkr} &= \int_0^1 X_m(\xi)I_k'(\xi)X_r(\xi)d\xi \\
P_6^{mkr} &= \int_0^1 X_m(\xi)I_k(\xi)X_r'(\xi)d\xi \\
P_7^{mkr} &= \int_0^1 X_m(\xi)I_k'(\xi)X_r'(\xi)d\xi \\
P_8^{mikr} &= \int_0^1 X_mX_i''X_k'X_r'd\xi \\
P_9^{mikr} &= \int_0^1 X_mX_i''X_kX_rd\xi \\
P_{10}^{mikr} &= \int_0^1 X_mX_iX_kX_rd\xi \\
P_{11}^{mikr} &= \int_0^1 X_mX_iX_k'X_r'd\xi \\
P_{12}^{mikr} &= \int_0^1 X_mX_i'X_k'X_rd\xi \\
P_{13}^{mk} &= k\int_0^1 \sin m\pi\xi\cos k\pi\xi d\xi \\
P_{14}^{mkr} &= \int_0^1 I_m(\xi)X_k'(\xi)X_r''(\xi)d\xi \\
P_{15}^{mkr} &= \int_0^1 I_m(\xi)X_k'(\xi)X_r(\xi)d\xi \\
P_{16}^{mkr} &= \int_0^1 I_m(\xi)X_k(\xi)X_r'(\xi)d\xi
\end{aligned}
\right\} \qquad (24)
$$

中国知网 https://www.cnki.net

$$P_{17}^{mkr}=\int_0^1 I_m(\xi)X_k(\xi)X_r(\xi)d\xi$$

$$P_{18}^{mkr}=\int_0^1 I_m(\xi)X_k(\xi)X_r''(\xi)d\xi$$

$$P_{19}^{mkr}=\int_0^1 I_m(\xi)X_r'(\xi)X_r'(\xi)d\xi$$

上式中“′”，表示对相应坐标的微分

问题最终归结为求解含系数v_{mn}、v_m和w_m的非线性代数方程组（20），（21），（22）。对于这组方程，给定初始参数E、ν、λ和Q进行修正迭代即可算出Fourier级数的系数。从理论上说，m、n所取的项数多（壁如数十项），用修正迭代法也能保证收敛，但计算量增加很大，实际上只要取级数的前几项就可以保证计算要求。

四　数值结果

本文对ν = 0.3时几种不同长宽比λ及不同载荷Q的位移和应力进行了分析计算。图2是无量纲的中心挠度与载荷的关系。由图可以看出，对于相同的载荷，随着λ的减小，非线性的程度在不断增加。对于λ = 1的方板，w/h为0.78时，非线性程度$\left(\frac{W_{线性}-W_{非线性}}{W_{线性}}\right)$达36%，而对于λ = 0.5的矩形板，w/h为同一值时非线性程度竟有43%。由此可见当挠度达到中等变形或大变形时，考虑板的非线性影响是意义重大的。

图3给出了方形板沿通过原点的对角线上的四点平面无量纲位移与无量纲载荷的曲线。计算表明，在这条对角线上的点的最大平面位移出现在（ξ = η = 0.3）这点附近，并且U = V，载荷不断加大，面内位移值增加很快。

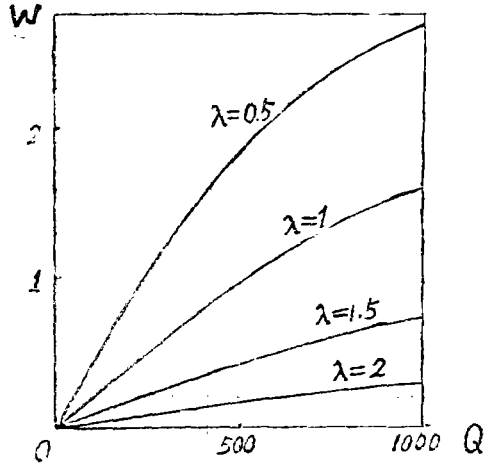

图2 载荷与中心挠的关系

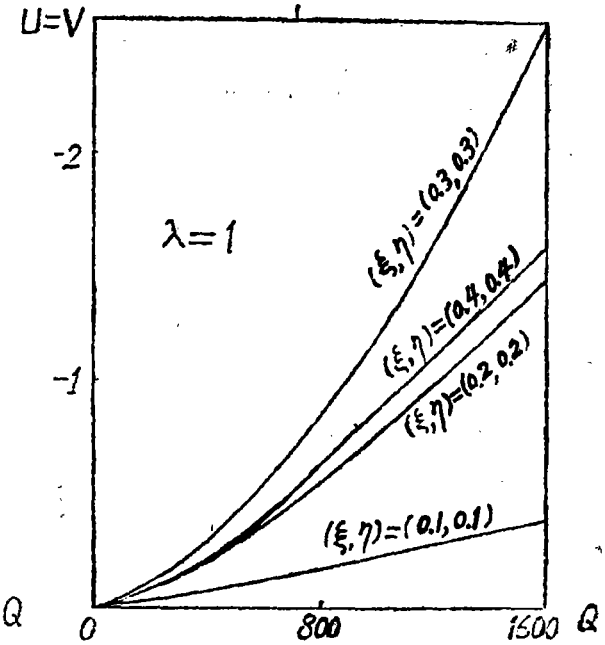

图3 载荷与平面位移的关系

中国知网 https://www.cnki.net

$$(\sigma_\xi^m, \sigma_\eta^m, \sigma_{\xi\eta}^m) = \frac{a^2 h}{D}(\sigma_x^m, \sigma_y^m, \sigma_{xy}^m) \tag{6}$$

总的应力为两者之和：

$$(\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_{\xi\eta},) = (\sigma_\xi^b + \sigma_\xi^m, \sigma_\eta^b + \sigma_\eta^m, \sigma_{\xi\eta}^b + \sigma_{\xi\eta}^m) \tag{7}$$

最外层的弯曲应力由下式决定：

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi^b &= \pm\sqrt{3}(W,_{\xi\xi} + \lambda^2 \nu W,_{\eta\eta}) \\
\sigma_\eta^b &= \pm\sqrt{3}(\nu W,_{\xi\xi} + \lambda^2 W,_{\eta\eta}) \\
\sigma_{\xi\eta}^b &= \pm\sqrt{3}(1-\nu)\lambda W,_{\xi\eta}
\end{aligned} \tag{8}$$

面力应力的计算公式为

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi^m &= U,_\xi + \lambda\nu V,_\eta + 0.5(W,_\xi{}^2 + \lambda^2 \nu W,_\eta{}^2) \\
\sigma_\eta^m &= \nu U,_\xi + \lambda V,_\eta + 0.5(\nu W,^2{}_\xi + \lambda^2 W,_\eta{}^2) \\
\sigma_{\xi\eta}^m &= C_1(V,_\xi + \lambda U,_\eta + \lambda W,_\xi W,_\eta)
\end{aligned} \tag{9}$$

三　分析

满足边界条件（5）的基本方程（2）、（3）、（4）的通解可用如下的双重级数表示：

$$U = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum u_{mn} I_m(\xi) J_n(\eta) \tag{10}$$

$$V = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum v_{mn} I_m(\xi) J_n(\eta) \tag{11}$$

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum w_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \tag{12}$$

上式中，u_{mn}、v_{mn}、w_{mn}为Fourier级数的系数。

$$I_m(\xi) = \sin m\pi\xi,\quad J_n(\eta) = \sin n\pi\eta \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
X_m(\xi) &= \sin\lambda_m\xi - \alpha_m \sinh\lambda_m\xi \\
Y_n(\eta) &= \sin\lambda_n\eta - \alpha_n \sinh\lambda_n\eta
\end{aligned} \tag{14}$$

(14)式中：

$$\alpha_i = \sin\lambda_i / \sinh\lambda_i \tag{15}$$

λ_i由以下超越方程获得：

$$\tan\lambda_i - \tanh\lambda_i = 0 \tag{16}$$

表1　超越方程(16)式的根

i	1	2	3	4	i>4
λ_i	3.9266	7.0686	10.2102	13.3518	$(i+0.25)\pi$

中国知网 https://www.cnki.net

$X_m(\xi)$、$Y_n(\eta)$为梁振动函数，它具有下面的正交性质：

$$\int_0^1 X_i(\xi)d\xi = \int_0^1 Y_i(\eta)Y_j(\eta)d\eta = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ H_i & i = j \end{cases} \tag{17}$$

H_i为$X_i(\xi)$或$Y_j(\eta)$的范数

为便于分析计算，把载荷也化为梁振动函数的Fourier级数形式

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\sum Q_{mn}X_m(\xi)Y_n(\eta) \tag{18}$$

利用$X_m(\xi)$、$Y_n(\eta)$正交性，Q_{mn}很容易被决定

$$Q_{mn} = \frac{Q}{H_m H_n}\int_0^1\int_0^1 X_m(\xi)Y_n(\eta)d\xi d\eta \tag{19}$$

把表达式(10)、(11)、(12)代入方程(2)，两边同乘$I_m(\xi)J_n(\eta)$，并且对ξ和η分别从0到1积分，利用(17)式，可以得到

$$u_{mn} + H_{4mn}\sum_{kl=1}^{\infty}\sum v_{kl}P_{13}^{mk}P_{13}^{nl} =$$

$$H_{5mn}\sum_{k\,l\,r\,s=1}^{\infty}\sum\sum\sum\sum w_{kl}w_{rs}(P_{14}^{mkr}P_{17}^{nls} + C_1\lambda^2 P_{15}^{mkr}P_{18}^{nls} + C_2\lambda^2 P_{16}^{mkr}P_{19}^{nls}) \tag{20}$$

同样也可以把方程（3）、（4）化为一组代数方程：

$$v_{mn} + H_{6mn}\sum_{kl=1}^{\infty}\sum P_{13}^{mk}P_{13}^{nl}u_{kl} =$$

$$H_{7mn}\sum_{k\,l\,r\,s=1}^{\infty}\sum\sum\sum\sum w_{kl}w_{rs}(\lambda^2 P_{17}^{mkr}P_{14}^{nls} + C_1 P_{18}^{mkr}P_{15}^{nls} + C_2 P_{19}^{mkr}P_{16}^{nls}) \tag{21}$$

$$w_{mn} + H_{1mn}\sum_{kl=1}^{\infty}\sum w_{kl}P_1^{mk}P_1^{nl} = H_{2mn}Q_{mn} +$$

$$+ H_{3mn}\sum_{k\,l\,r\,s=1}^{\infty}\sum\sum\sum\sum u_{kl}w_{rs}(P_2^{mkr}P_4^{nls} + \lambda^2\nu P_5^{mkr}P_3^{nls} + \lambda^2(1-\nu)P_6^{mkr}P_7^{nls}) +$$

$$+ H_{3mn}\sum_{k\,l\,r\,s=1}^{\infty}\sum\sum\sum\sum v_{kl}w_{rs}(\lambda\nu P_3^{mkr}P_5^{nls} + \lambda^3 P_4^{mkr}P_2^{nls} + \lambda(1-\nu)P_7^{mkr}P_8^{nls}) +$$

$$+ H_{3mn}\sum_{i\,j\,k\,l\,r\,s=1}^{\infty}\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum w_{ij}w_{kl}w_{rs}\{0.5(P_8^{mikr}P_{10}^{njls} + \nu\lambda^2 P_9^{mikr}P_{11}^{njls} +$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda^2(\lambda^2 P_{10}^{mikr}P_8^{njls} + \nu P_{11}^{mikr}P_9^{njls}) + \lambda^2(1-\nu)P_{12}^{mikr}P_{12}^{nljs}\} \tag{22}$$

在方程（20）、（21）、（22）中，所有的系数定义如下：

$$H_{1mn} = \frac{2\lambda^2}{H_m H_n(\lambda_m^4 + \lambda^4\lambda_n^4)}$$

$$H_{2mn} = \frac{1}{\lambda_m^4 + \lambda^4\lambda_n^4}$$

$$H_{3mn} = \frac{1}{H_{mn}(\lambda_m^4 + \lambda^4\lambda_n^4)}$$

中国知网 https://www.cnki.net

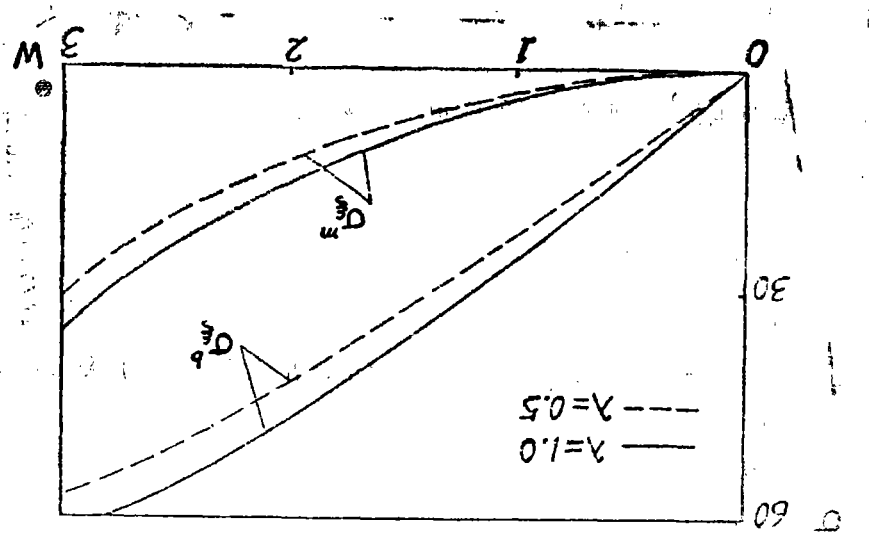

图4 中心挠度与应力的关系

图4显示了中心挠度与应力（在$\xi=\eta=0.4$处）的关系。σ_t^b是指最外层的应力，由于它是由弯矩产生的，σ_t^b的曲线也反映了弯矩与变形的变化趋势。同理，σ_t^m反映了薄膜力与变形的变化趋势。从图4可以清楚的看出，当变形很小，也就是在小挠度的情况下，中面内的应力较弯曲应力小得多而可以忽略不计，随着变形的加大，由小挠度变到中等挠度以至大挠度时，中面内的应力占了整个应力的相当一部分，甚至σ_t^m可能大于σ_t^b，这时薄板的变形由弯矩和薄膜力共同承担，这就是板的线性问题与非线性问题的主要区别所在，也是研究板的非线性问题的主要意义所在。

五 结论

本文所设的位移函数能够精确地满足边界条件，加上使用修正迭代法解非线性方程组所具有的收敛速度快、收敛区域宽的特点，从且保证了求解结果的计算精度。另一方面，可以说本文仅提供了一种方法，利用这种有效方法，可以推广应用于解决板的其它某些变形不同类型的问题，诸如各种不同边界条件的正交各向异性板的几何非线性问题，板的大振幅振动问题，板的屈曲和后屈曲问题等等。

最后，笔者对江苏工学院工程力学研究室主任孙锁泰教授所给予的帮助谨表衷心的谢意。

参 考 文 献

〔1〕 A.K. Niyogi, Nonlinear bending of rectangular orthotropic plate, Int. J. Solids Struct., Vol.9, 1133—1139, 1973

〔2〕 杨加明、孙锁泰，正交各向异性矩形板的大挠度分析，第四届华东固体力学会议论文集，1987

中国知网 https://www.cnki.net

〔3〕 Cangru Jiang and C.Y.Chia, Nonlinear bending of rectangular orthotropic plates with two free edges and the other edges having nonuniform rotational flexibility, Int.J.Non-linear Mech., 11/12, 1009—1019, 1984
〔4〕 孙锁泰、杨加明，四边简支正交各向异性矩形板弯曲解的一些推究，江苏工学院学报，1987
〔5〕 Chuan-yuan Chia Nonlinear analysis of plates, McGraw-Hill, 1980
〔6〕 E.L.Bernstein, On large deflection theories of plates, ASME J. Appl. Mech, vol.32, 695—697, 1965
〔7〕 黄克智等，板壳理论，清华大学出版社，1987

Nonlinear Bending of Rectangular Plates With Two Adjacent Edges Simply Supported And The Two Other Adjacent Edges Clamped

Yang Jiaming

Abstract

Based on double Fourier series, the nonlinear bending is analysed for an isotropic rectangular plate with two adjacent edges simply supported and the two other adjacent edges clamped under constant laterally distributed load. Using orthogonality relation of Fourier series, we reduce governing nonlinear partial differential equations to an infinite set of system of nonlinear algebraic equations containing Fourier cofficients. Numerical results of central deflection, bending stress and membrane stress are obtained by iterative computing method.

中国知网 https://www.cnki.net