级数$S_k(n)=\sum\limits_{p=1}^{n-1}P^k$的一般解的又一公式

周　学　松

（数学研究科）

摘　　要

本文利用定积分的离散型的Newton—Leibniz公式给出极数$\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^k$的一般解公式。

引　　言

关于级数$\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^k$的计算，国内外已有多种方法。但一般地说，当$k>5$时，计算都比较复杂。1984年陈景润给出的一种方法[1]，使$S_1(n)$到$S_{10}(n)$的计算大为简化，如果继续计算$S_{11}(n)$，$S_{12}(n)$，…，计算量将会急剧增大。1987年石啸生给出一个比较简便易记的递推法[2]，但其主要结论需要6个引理来证。本文利用定积分的离散型的Newton—Leibniz公式（见〔3〕）得到一个求解$\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^k$的简便通式。该通式（定理1）不仅在理论证明上是简明易懂的，而且在计算上也是简单易记的。另外，尽管由$\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^k$可计算$\sum\limits_{p=1}^{n-1}(2p+1)^k$，但在k较大时，这种计算也是较繁的。所以本文同时也给出了计算级数$\sum\limits_{p=0}^{n-1}(2p+1)^k$的通式（定理2）。

一　主要结果

定理1：设$S_k(n)=\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^k$，$k\geqslant1$为整数。则

i）$k\geqslant2$为偶数时，即$k=2t$，$t\geqslant1$为整数时，

本文于1989年2月16日收到

$$S_{2t}(n)=\sum_{p=1}^{n-1}p^{2t}=\frac{1}{4^t}\left[\sum_{i=1}^{t}(-1)^{t+i}m_i(t-i+1)(2n-1)^{2i+1}+(-1)^t m_0(t)(2n-1)\right] \quad (1)$$

其中$m_i(l)=\frac{1}{2(i+l)-1}\sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{l+j-1}C_{2(i+l)-1}^{2(l-j)+1}m_i(j)$

$$m_i(1)=\frac{1}{2(2i+1)},\quad (i=1,2,\cdots,t)$$

$$m_0(t)=\frac{1}{2t+1}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{t+j-1}C_{2t+1}^{2(t-j)+1}m_0(j)+(-1)^{t+1}\frac{1}{2(2t+1)}$$

$$m_0(1)=\frac{1}{6}$$

ii) 当$k\geqslant1$为奇数时，即$k=2t-1$，$t\geqslant1$为整数时，

$$S_{2t-1}(n)=\sum_{p=1}^{n-1}p^{2t-1}=\frac{1}{2^{2t-1}}\left[\sum_{i=2}^{t}(-1)^{t+i}m_i(t-i+1)(2n-1)^{2i}\right.$$
$$\left.+(-1)^{t+1}(\overline{m}_1(t)n(n-1)+\overline{m}_0(t)\right] \quad (2)$$

其中

$$m_i(l)=\frac{1}{2(i+l-1)}\sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{l+j-1}C_{2(i+l-1)}^{2(l-j)+1}m_i(j)$$

$$m_i(1)=\frac{1}{4}\qquad (i=2,3,\cdots,t)$$

$$\overline{m}_1(t)=\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{t+j-1}C_{2t}^{2t-(2j+1)}\overline{m}_1(t)$$

$$\overline{m}_0(t)=\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{t+j-1}C_{2t}^{2t-(2j+1)}\overline{m}_0(j)+(-1)^{t+1}\frac{1}{4t}$$

$$\overline{m}_1(1)=1,\quad \overline{m}_0(1)=\frac{1}{2}$$

定理2：设$\overline{S}_k(n)=\sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^k$，$k\geqslant1$为整数。则

i) $k\geqslant2$为偶数时，即$k=2t$，$t\geqslant1$为整数时，

$$\overline{S_k}(n)=\sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^{2t}=\sum_{i=1}^{t}(-1)^{t+i}m_i(t-i+1)N^{2i} \quad (3)$$

其中

$$N^{2i}=[n(2n)^{2i}-1]$$

$$m_i(l)=\frac{1}{2(i+l)-1}\sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{l+j-1}C_{2(i+l)-1}^{2(l-j)+1}m_i(j)$$

$$m_i(1)=\frac{1}{2i+1},\quad (i=1, 2, \cdots t)$$

ii）$k\geqslant 1$为奇数时，即$k=2t-1$，$t\geqslant 1$为整数时，

$$\overline{S_k}(n)=\sum_{p=1}^{n-1}(2p+1)^{2t-1}=\sum_{i=2}^{t}(-1)^{t+i}m_i(t-i+1)(2n)^{2i}+(-1)^{t+1}m_0(t)n^2 \tag{4}$$

其中

$$m_i(l)=\frac{1}{2(i+l-1)}\sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{l+i-1}C_{2(i+l-1)}^{2(l-j)+1}m_i(j)$$

$$m_i(1)=\frac{1}{4i},\quad (i=2, 3, \cdots, t)$$

$$m_0(t)=\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{t-1}(-1)^{t+j-1}C_{2t}^{2(t-j)-1}m_0(j)$$

$$m_0(1)=1$$

二　预备知识

定积分的离散型的Newton－Leibniz公式：

若 $\dfrac{F(x+L)+F(x-L)}{2L}=f(x)$，则

$$2L\sum_{i=0}^{m-1}f(a+(2i+1)L)=F(b)-F(a) \tag{5}$$

其中$L>0$，$m=\dfrac{b-a}{2L}$

三　定理的证明

定理 1 的证明：

首先来证明（1）式，为了证明（1）式，只须证明下式：

$$\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2t}=\sum_{i=1}^{t}(-1)^{t+i}m_i(t-i+1)(2n-1)^{2i+1}+(-1)^{t+1}m_0(t)(2n-1) \tag{1'}$$

为了证明（1′），在（5）中取

$$F(x)=X^{2t+1}$$

$$f(x)=C_{2t+1}^{1}x^{2t}+C_{2t+1}^{3}x^{2t-2}+\cdots+C_{2t+1}^{2t-1}x^2+1$$

$a=-1,\ b=2n-1,\ L=1$

则显然有：

$$\frac{F(x+L)-F(x-L)}{2L}=f(x)$$

$m=n$

所以（5）可写为：

$$2\sum_{p=0}^{n-1}f(2p)=(2n-1)^{2t+1}+1$$

即

$$\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2t}=\frac{1}{2t+1}\left[\frac{1}{2}(2n-1)^{2t+1}+\frac{1}{2}-C_{2t+1}^{3}\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2t-2}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots-C_{2t+1}^{2t-1}\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2}-\sum_{p=0}^{n-1}1\right]$$

$$=\frac{1}{2t+1}\left[\frac{(2n-1)^{2t+1}}{2}-C_{2t+1}^{3}\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2t-2}-\cdots-C_{2t+1}^{2t-1}\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2}-\frac{1}{2}(2n-1)\right]\tag{6}$$

下面利用（6）对t进行归纳证明。

$t=1$时

$$\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(2n-1)^{2+1}+\frac{1}{2}-n\right]=\frac{1}{6}(2n-1)^{3}-\frac{1}{6}(2n-1)$$

∴ $(1')$式成立

假设$t\leqslant T-1$时$(1')$成立

下面来证明$t=T$时$(1')$也成立

由于

$$\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2T}=\frac{1}{2T+1}\left[\frac{(2n-1)^{2T+1}}{2}-C_{2T+1}^{3}\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2T-2}-\cdots-\right.$$

$$\left.-C_{2T+1}^{2T-1}\sum_{p=1}^{n-1}(2p)^{2}-\frac{1}{2}(2n-1)\right]$$

再由归纳假设可得：

$$\text{上式}=\frac{1}{2(2T+1)}(2n-1)^{2T+1}-\left(\frac{C_{2T+1}^{3}}{2T+1}m_{T-1}(1)\right)(2n-1)^{2T-1}+$$

$$\left(\frac{C_{2T+1}^{3}}{2T+1}m_{T-2}(2)-\frac{C_{2T+1}^{5}}{2T+1}m_{T-2}(1)\right)(2n-1)^{2T-3}$$

$$-\cdots+(-1)^{T+i}\left[\frac{C_{2T+1}^{3}}{2T+1}m_{i}(T-i)-\frac{C_{2T+1}^{5}}{2T+1}m_{i}(T-i-1)+\cdots+\right.$$

$$+(-1)^{i}\frac{C_{2T+1}^{2(T-i)+1}}{2T+1}m_{i}(1)\Big](2n-1)^{2i+1}$$

$$+\cdots+(-1)^{T+1}\Big[\frac{C_{2T+1}^{3}}{2T+1}m_{1}(T-1)+\frac{C_{2T+1}^{5}}{2T+1}m_{1}(T-2)+\cdots+$$

$$+(-1)^{T+1}\frac{C_{2T+1}^{2T-1}}{2T+1}m_{1}(1)\Big](2n-1)^{3}+(-1)^{T}\Big[\frac{C_{2T+1}^{3}}{2T+1}m_{0}(T-1)-$$

$$-\frac{C_{2T+1}^{5}}{2T+1}m_{0}(T-2)+\cdots+(-1)^{T}\frac{C_{2T+1}^{2T-1}}{2T+1}m_{0}(1)+(-1)^{T+1}\frac{1}{2(2T+1)}\Big](2n-1)$$

$$=m_{T}(1)(2n-1)^{2T+1}-m_{T-1}(2)(2n-1)^{2T-1}+m_{T-2}(3)(2n-1)^{2T-3}+\cdots+$$

$$+(-1)^{T+i}m_{i}(T-i+1)(2n-1)^{2i+1}+\cdots+(-1)^{T+1}m_{1}(T)(2n-1)^{3}+$$

$$+(-1)^{T}m_{0}(T)(2n-1)$$

由此可知，$t=T$时，(1′)也成立。故由归纳法可知(1′)对$t\geqslant1$为整数时均成立。即(1)对$t\geqslant1$为整数时均成立。

同理可证(2)式也成立。 (毕)

如果我们在（5）中取：

$$a=0,\quad b=2n,\quad L=1$$

$$F(x)=x^{2t+1}$$

$$f(x)=C_{2t+1}^{1}x^{2t}+C_{2t+1}^{3}x^{2t-2}+\cdots+C_{2t+1}^{2t-1}x^{2}+1$$

就可得到定理2中的（3）式。

再在（5）中取：

$$a=0,\quad b=2n,\quad L=1$$

$$F(x)=x^{2t}$$

$$f(x)=C_{2t}^{1}x^{2t-1}+C_{2t}^{3}x^{2t-3}+\cdots+C_{2t}^{2t-2}x$$

就可得到定理2中的（4）式。

四　计算举例

下面利用定理1，定理2及杨辉三角来分别求$\sum\limits_{p=1}^{n-1}p^{12}$与$\sum\limits_{p=0}^{n-1}(2p+1)^{12}$的和。

首先将杨辉三角的奇数行的每一个数除以该行的行数（两边的数1不除这个数），并重新写出该三角得：

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 2 \quad \underline{2} \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 16 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 3 \quad \underline{5} \quad 5 \quad \underline{3} \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 4 \quad \underline{\frac{84}{9}} \quad \frac{126}{9} \quad \underline{\frac{126}{9}} \quad \frac{84}{9} \quad \underline{4} \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 5 \quad \underline{15} \quad 30 \quad \underline{42} \quad 42 \quad \underline{30} \quad 15 \quad \underline{5} \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \quad 495 \quad 792 \quad 924 \quad 792 \quad 495 \quad 220 \quad 66 \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 6 \quad \underline{22} \quad 55 \quad \underline{99} \quad 132 \quad \underline{132} \quad 99 \quad \underline{55} \quad 22 \quad \underline{6} \quad 1 \quad 1
\end{array}
$$

然后利用$m_i(1)=\frac{1}{2(2i+1)}$，$m_0(1)=\frac{1}{6}$，及上面三角中横线上的数来算出$m_i(l)$。

$$\because \quad m_0(1)=\frac{1}{6}$$

$$m_0(2)=2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{7}{30}$$

$$m_0(3)=5\cdot\frac{7}{30}-3\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2\cdot 7}=\frac{31}{41}$$

$$m_0(4)=\frac{84}{9}\cdot\frac{31}{42}-\frac{126}{9}\cdot\frac{7}{30}+4\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{127}{30}$$

$$m_0(5)=15\cdot\frac{127}{30}-42\cdot\frac{31}{42}+30\cdot\frac{7}{30}-5\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2\cdot 11}=\frac{2555}{66}$$

$$\therefore \quad m_0(6)=22\cdot\frac{2555}{66}-99\cdot\frac{127}{30}+132\cdot\frac{31}{42}-55\cdot\frac{7}{30}+6\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2\cdot 13}=\frac{1414477}{2730}$$

$$\because \quad m_1(1)=\frac{1}{6}$$

$$m_1(2)=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$m_1(3)=5\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

$$m_1(4)=\frac{84}{9}\cdot\frac{7}{6}-\frac{129}{9}\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=\frac{62}{9}$$

$$m_1(5)=15\cdot\frac{62}{9}-42\cdot\frac{7}{6}+30\cdot\frac{1}{3}-5\cdot\frac{1}{6}=\frac{127}{2}$$

$$\therefore\quad m_1(6)=22\cdot\frac{127}{2}-99\cdot\frac{62}{9}+132\cdot\frac{7}{6}-55\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{2555}{3}$$

$$\because\quad m_2(1)=\frac{1}{10}$$

$$m_2(2)=5\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

$$m_2(3)=\frac{84}{9}\cdot\frac{1}{2}-\frac{126}{9}\cdot\frac{1}{10}=\frac{49}{15}$$

$$m_2(4)=15\cdot\frac{49}{15}-42\cdot\frac{1}{2}+30\cdot\frac{1}{10}=31$$

$$\therefore\quad m_2(5)=22\cdot 31-99\cdot\frac{49}{15}+132\cdot\frac{1}{2}-55\cdot\frac{1}{10}=\frac{4191}{10}$$

$$\because\quad m_3(1)=\frac{1}{14}$$

$$m_3(2)=\frac{84}{9}\cdot\frac{1}{14}=\frac{2}{3}$$

$$m_3(3)=15\cdot\frac{2}{3}-42\cdot\frac{1}{14}=7$$

$$\therefore\quad m_3(4)=22\cdot 7-99\cdot\frac{2}{3}+132\cdot\frac{1}{14}=\frac{682}{7}$$

$$\because\quad m_4(1)=\frac{1}{18}$$

$$m_4(2)=15\cdot\frac{1}{18}=\frac{5}{6}$$

$$\therefore\quad m_4(3)=22\cdot\frac{5}{6}-99\cdot\frac{1}{18}=\frac{77}{6}$$

$\because \quad m_5(5)=\frac{1}{22}$

$\therefore \quad m_5(2)=22\cdot\frac{1}{22}=1$

最后得：

$$\sum_{p=0}^{n-1}p^{12}=\frac{1}{4096}\left[\frac{1}{26}(2n-1)^{13}-(2n-1)^{11}+\frac{77}{6}(2n-1)^{9}-\frac{682}{7}(2n-1)^{7}+\frac{4191}{10}(2n-1)^{5}-\frac{2555}{3}(2n-1)^{3}+\frac{1414477}{2730}(2n-1)\right]$$

完全仿照以上做法可得：

$$\sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^{12}=n\left[\frac{1}{13}((2n)^{12}-1)-2((2n)^{10}-1)+\frac{77}{3}((2n)^{8}-1)-\frac{1364}{7}((2n)^{6}-1)+\frac{4191}{5}((2n)^{4}-1)-\frac{5110}{3}((2n)^{2}-1)\right]$$

参　考　文　献

〔1〕 陈景润，关于杨辉高斯级数，厦门数学通讯，1（1984）。

〔2〕 石啸生，级数$S_k(n)=\sum_{p=1}^{n}p^{k-1}$的计算与分解，数学的实践与认识，3（1987），92—95。

〔3〕 刘诗俊，关于“Q型微积分学”的设想，华东交通大学学报，2（1988）

〔4〕 Schultz, H.J,, The sum of thə k th Powers of the first n integers, The American Mathematical Monthly, 87 (1981), 478—481。