

以群为特征的图

周 尚 超

(基础课部)

摘 要

如果两个简单图的自同构群恒等,则称这两个图共群。如果与一个图共群的只有它本身和它的补图,则称这个图以群为特征。本文得到了若干类以群为特征的图。

本文采用〔1〕中的记号和术语,除非另外说明。设 G 是简单图,如果图 G_1 的自同构群 $\text{Aut}G_1$ 与 G_2 的自同构群恒等,则称 G_1 与 G_2 共群。如果由 $\text{Aut}G_1 = \text{Aut}G_2$ 可推出 G_1 与 G_2 同构或 G_1 与 G_2 的补图 $\overline{G_2}$ 同构,则称 G_1 是以群为特征的图。如果由 $\text{Aut}G_1 = \text{Aut}G_2$ 可推出 G_1 与 G_2 同构,则称 G_1 是以群为强特征的图。以群为强特征的图是自补图。关于共群问题,已知有如下结果〔2〕:渐近地说,几乎对每一个图 G ,一定有图 H , H 不同构于 $\overline{G}$ 和 G ,但 $\text{Aut}G = \text{Aut}H$ 。这个结果又可叙述为:设 $\sigma(n)$ 是 n 点图的总数, $\delta(n)$ 是 n 个点的不以群为特征的图的总数,则 $\delta(n)/\sigma(n) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$ 。

本文讨论了哪些图是以群为特征的图。设 $x, y \in V(G)$ 。若存在 $f \in \text{Aut}G$,使 $f(x) = y$,则称 x 与 y 相似。按照相似关系, G 的顶点被划分为若干个轨道。如果只有一个轨道,则称 $\text{Aut}G$ 是可迁群或点传递群,称 G 是点对称图。如果对于任意 $xy, uw \in E(G)$,存在 $f \in \text{Aut}G$,使 $f(xy) = f(x)f(y) = uw$,则称 G 是线对称图。我们用 $G_1 \leq G_2$ 表示 G_1 是 G_2 的子图,用 $\text{Aut}G_1 \leq \text{Aut}G_2$ 表示 $\text{Aut}G_1$ 是 $\text{Aut}G_2$ 的子群。如果 $V(G_1)$ 中有一点与 $V(G_2)$ 中的一点邻接,则称 G_1 与 G_2 邻接(或 $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 邻接)。如果对任意 $u \in V(G_1), w \in V(G_2)$, u 与 w 邻接,则称 G_1 与 G_2 完全邻接。如果 $V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1 与 V_2 不交,则用 G_1 表示 $G - V_2$,即 G_1 是 G 的以 V_1 为点集的导出子图。

定理1 若 G 和 $\overline{G}$ 都是线对称图,则 G 是以群为特征的图。

证明 若 G 是完全图 K_p 或 $\overline{K}_p$,则 G 的群是 S_p (p 个文字的对称群)。群为 S_p 的图只有 K_p 和 $\overline{K}_p$,因此 G 以群为特征。设 G 不是 K_p ,也不是 $\overline{K}_p$ 。设 $\text{Aut}H = \text{Aut}G$, $ab \in X(G)$ 。因为 G 是线对称图,所以 $X(G) = \{f(ab) | f \in \text{Aut}G\}$ 。如果 $ab \in X(H)$,则 $X(G) \subseteq X(H)$ 。如果 $X(G) \neq X(H)$,则 $X(H) \supsetneq X(\overline{G})$, H 是完全图, $\text{Aut}H = S_p$,矛盾。因此 $G = H$ 。如果 $ab \in X(\overline{H})$,则可推出 $\overline{H} = G$ 。证毕。

本文于1988年11月28日收到

定理1是充分条件而不是必要条件。易知7边形 C_7 以群为特征,但 $\overline{C_7}$ 不是线对称图。 C_8 和 $\overline{C_8}$ 是线对称图。4个点的道路 P_4 不是线对称图。 P_4 和 C_5 是最小的两个以群为特征的自补图。

引理1 设 G 是点对称图,则 G 是线对称图的充分必要条件是对于与任意点 a 邻接的两条边 ab 和 ac ,存在 $f \in F = \text{Aut } G$,使 $f(ab) = ac$ 。

证明:必要性是显然的,对充分性设 $ab, cd \in X(G)$ 。因为 G 是点对称图,因此存在 $f \in F$,使 $f(c) = a$ 。根据假设,对于 $af(d)$,存在 $g \in F$,使 $g(af(d)) = ab$,因此自同构 gf ,使 $gf(cd) = ab$ 。证毕。

设 $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ 是 f 的不交的轮换分解,则称 f 是 $(|f_1|, |f_2|, \dots, |f_n|)$ 型。

定理2 设 G 是点对称图。如果 G 有一个自同构是 $(1, m, n)$ 型,则 G 以群为特征。

证明 设 G 不是 K_p 也不是 $\overline{K_p}$, $f = (a)(a_1 a_2 \cdots a_m)(b_1 b_2 \cdots b_n) \in \text{Aut } G$ 。因为 G 是点对称图,所以 G 是 m 度正则图或 n 度正则图。设 G 是 m 度正则图,与 a 邻接的点集是 $\{a_1 a_2 \cdots a_m\}$,则 $f^{i-1}(aa_1) = aa_i$,即存在 G 的自同构,把与 a 邻接的任意两条边互变。对任意点 c ,存在 $g \in \text{Aut } G$, $g(a) = c$,则 $g^{-1}fg$ 也是 $(1, m, n)$ 型且它的不动点是 c ,因此存在 G 的自同构,把与 c 邻接的两条边互变。 G 是线对称图(引理1)同理 $\overline{G}$ 也是线对称图。因此 G 以群为特征(定理1)。证毕。

系1 设 G 是点对称图。若 G 有一个自同构是 $(1, m, n)$ 型,则 G 和 $\overline{G}$ 都是线对称图。

系2 nK_p 是以群为特征的图。这里 $n \geq 1$ 。

定理3 设 $p \equiv 1 \pmod{4}$ 。若 p 是素数。则存在以群为特征的 p 阶自补点对称图 G 。

证明 设 $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, 4n\}$, $p = 4n + 1$,是 G 的顶点集。顶点的运算按模 p 进行。因为 p 是素数,因此存在 $e \in Z_p$,使得 $\{1, e, e^2, \dots, e^{4n-1}\} = \{1, 2, \dots, 4n\}$ 且 $e^{4n} = 1$,这里 e 是 p 的一个原根。 G 的边集是这样的:若 $i \in Z_p$,则与 i 邻接的顶点集是 $\{i+1, i+e^2, i+e^4, \dots, i+e^{4n-2}\}$ 。按照 G 的作法, $i-1$ 与 $i-1+1 = i$ 邻接, $i-e^2$ 与 $i-e^2+e^2 = i$ 邻接, ..., 即与 i 邻接的还有 $i-1, i-e^2, \dots, i-e^{4n-2}$ 。由于 $e^{2n}(e^{2n}+1) = 1+e^{2n}$, $e^{2n} \neq 1$,所以 $1+e^{2n} = 0$,继而 $e^2+e^{2n+2} = 0, \dots$,因此 $\{1, e^2, e^4, \dots, e^{4n-2}\} = \{-1, -e^2, -e^4, \dots, -e^{4n-2}\}$ 。这说明我们对图 G 的定义是合理的。显然 $f = (0, 1, 2, \dots, 4n) \in \text{Aut } G$, G 是点对称图。设 $h = (0)(1, e, e^2, \dots, e^{4n-1})$ 。若 $ij \in X(G)$,则存在 k ,使 $j-i = e^{2k}$ 。 $f(j-i) = e(j-i) = ej-ei = e^{2k+1}$, ej 与 ei 在 $\overline{G}$ 邻接,即 $h(j)$ 与 $h(i)$ 在 $\overline{G}$ 邻接, h 是 G 到 $\overline{G}$ 的同构映射。 G 是自补图。易知 $h^2 = (0)(1, e^2, e^4, \dots, e^{4n-2})(e, e^3, \dots, e^{4n-1}) \in \text{Aut } G$ 。 G 以群为特征(定理2) 证毕。

定义1 设 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, H 与 H_1 同构, $i = 1, 2, \dots, p$ 。 $G[H]$ 是把 $H_1, H_2, \dots, H_p$ 按如下方式邻接而得的图:如果 $u_i u_j \in X(G)$,则 H_i 与 H_j 完全邻接,如果 $u_i u_j \in X(\overline{G})$,则 H_i 与 H_j 不邻接。 $G[H]$ 又称为 G 按 H 膨胀而得的图。在 $G[H]$ 中,如将 $H_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 等同为一个点 u_i ,则得到图 G 。

下面的引理是显然的。

引理2 设 H 是 G 的导出子图。若对 $a \in V(G) - H$, a 与 H 不邻接或 a 与 H 完全邻接,则 $\text{Aut } H \leq \text{Aut } G$ 。特别地,在图 $G(H)$ 中, $\text{Aut } H_i \leq \text{Aut } G(H)$ 。

定理4 设 G 是以群为特征的点对称图, H 是以群为特征的自补点对称图,则 $G(H)$ 是以群为特征的点对称图。

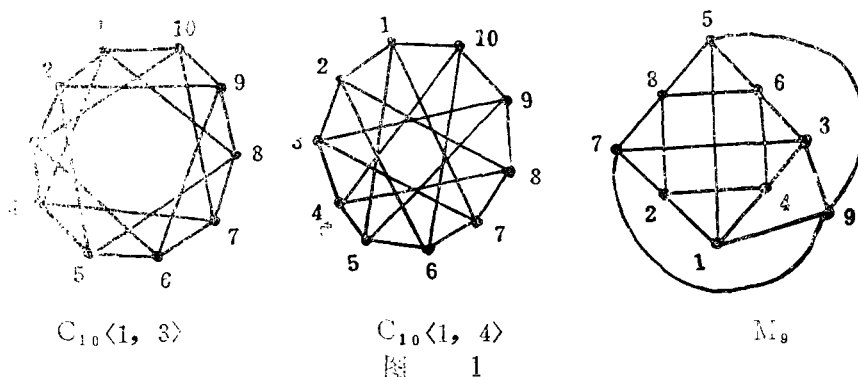
证明 设 $\text{Aut } G(H) = \text{Aut } M = F$ 。与 $H_1, H_2, \dots, H_p$ 相对应的 M 的导出子图是 $M_1, M_2, \dots, M_p$ (相对应指 $V(H_i) = V(M_i)$)。因为 $\text{Aut } H_i \leq F$ (引理2),所以 $\text{Aut } H_i \leq \text{Aut } M_i$ 。

因为 $\text{Aut} H_i$ 是可迁群, 所以若 $a \in V(M_i)$, a 与 M_i 邻接, 则 a 与 M_i 完全邻接, $\text{Aut} W_i \leq F$. 由此又可推出 $\text{Aut} M_i \leq \text{Aut} H_i$, $\text{Aut} M_i = \text{Aut} H_i$, M_i 与 H_i 同构, $i = 1, 2, \dots, p$. 设 $f \in \text{Aut} G$, 则 f 诱导出 F 中这样的元素: 若 $f(u_i) = u_j$, $\bar{u} \in V(H_i)$, 则 $\bar{f}(\bar{u}) = g_{ij}(\bar{u})$, 这里 g_{ij} 是 H_i 到 H_j 的同构映射. 如果将 $M_i = (1, 2, \dots, p)$ 等同为一个点 u_i 后得到图 M/M_i , 则 $f \in \text{Aut} M/M_i$. 反之若 $f \in \text{Aut} M/M_i$, 则 $f \in \text{Aut} G$, 因此 $\text{Aut} G = \text{Aut} M/M_i$. 如果 M/M_i 与 G 同构, 则 M 与 $G[H]$ 同构, 如果 M/M_i 与 $\bar{G}$ 同构, 则 M 与 $\bar{G}$ 同构. 易知 $G[H]$ 是点对称图.

类似地可证如下定理.

定理 5 设 G 和 H 都是以群为特征的图, 则有: 1) 若 H 是自补点对称图, 则 $G[H]$ 是以群为特征的图. 2) 若 G 是自补图, H 是点对称图, 则 $G[H]$ 以群为特征. 3) 若 G 是自补图, H 是自补点对称图, 则 $G[H]$ 是以群为特征的自补图.

例 1 顶点数不大于 4 的所有图和顶点数不大于 7 的所有点对称图都是以群为特征的图. 阶数不大于 11 的以群为特征的点对称图还有下列图和它们的补图: K_p , $p = 8, 9, 10, 11$. 立方体 Q_3 , 彼得森图, $C_{10} \langle 1, 3 \rangle$, $C_{10} \langle 1, 4 \rangle$ 和 M_9 (图 1).



M_9 是自补点对称图. $f = (a)(1357)(2468)$, $g = (3)(1934)(2576) \in \text{Aut} M_9$, $h = (a)(12345678)$ 是 M_9 到 M_9 的同构映射. 9 不是素数, 因此 M_9 不是按定理 3 的方式得到的点对称自补图. 定理 3 中的图称为参数 $1, e^2, e^4, \dots, e^{(n-2)}$ 的循环图, 记为 $C_n \langle 1, e^2, e^4, \dots, e^{(n-2)} \rangle$. 图 1 中的 $C_{10} \langle 1, 3 \rangle$ 是 $C_{10} \langle 1, 3, 7, 9 \rangle$ 的简记. $C_{10} \langle 1, 4 \rangle$ 是 $C_{10} \langle 1, 4, 6, 9 \rangle$ 的简记. M_9 也不是循环图.

例 2 图 2 画出了 $P_4[C_5]$ 和它的补图. 两个 C_5 之间的邻接表示这两个 C_5 是完全邻接的. 它们的顶点用 a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 标记.

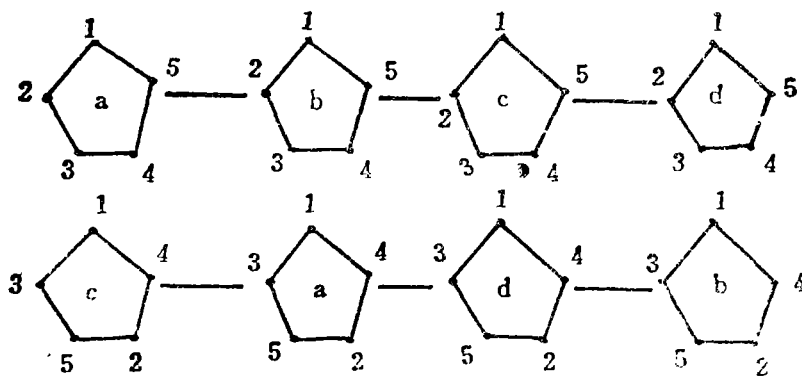


图 2 $P_4[C_5]$ 和它的补图

例3 设 G 是以群为特征的自补图, 则 nG 是以群为特征的图, 因为 $nG = \overline{K_n}[G]$ 。如 G 不是点对称图, 则 nG 不必是以群为特征的图。例如 $2P_4$ 不是以群为特征的图。图3中的图的群与 $2P_4$ 的群恒等, 但它与 $2P_4(\overline{2P_4})$ 不同构。

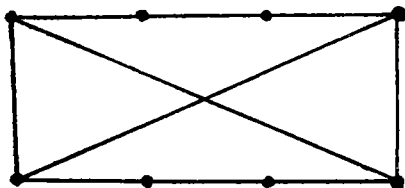


图 3

定理6 设 $p_i \equiv 1 \pmod{4}$, $i=1, 2, \dots, m$, p_i 是素数或 $p_i=9$ 。设 $p=p_1p_2\cdots p_m$, 则存在以群为特征的 p 阶自补点称图和 $4p$ 阶自补图。

证明 设 G_1 和 G_2 分别是 p_1 和 p_2 阶以群为特征的自补点称图, 则 $G_1[G_2]$ 和 $G_2[G_1]$ 是 p_1p_2 阶的以群为特征的自补点称图(定理4, 5)。如果 G_1 和 G_2 分别是 p_1 和 p_2p_3 阶图, 则 $G_1[G_2]$ 和 $G_2[G_1]$ 是 $p_1p_2p_3$ 阶图。如此类推可得 p 阶图。如果 G_1 和 G_2 分别是 4 阶自补图和 p 阶的以群为特征的自补图, 则 $G_1[G_2]$ 是 $4p$ 阶以群为特征的自补图。证毕。

定理7 设 G 是以群为特征的点称图, H 与 $\overline{G}$ 同构且 H 与 G 点不相交, 则 $G \cup H$ 是以群为特征的图。

证明 如果 G 是自补图, 则 $G \cup H$ 与 $\overline{K_2}[G]$ 同构, 因而以群为特征。设 G 不是自补图且 $\text{Aut } G \cup H = \text{Aut } M$ 。 M 的与 G, H 相应的两个子图是 G' 和 H' 。因为 $\text{Aut } G \leq \text{Aut } M$ 且 $\text{Aut } G$ 是可迁群, 所以如 G' 与 H' 邻接, 则 G' 与 H' 完全邻接。 $\text{Aut } M = \text{Aut } G' + \text{Aut } H'$ 不是可迁群。如果 G' 与 H' 同构, 则 $\text{Aut } M$ 是可迁群, 矛盾。因此 G' 与 H' 中有一个与 G 同构, 另一个与 H 同构。当 G' 与 H' 完全邻接时, M 与 $\overline{G \cup H}$ 同构, 当 G' 与 H' 不邻接时, M 与 $G \cup H$ 同构。

证毕。

类似定理7可得定理8。

定理8 1) 设 G_i ($i=1, 2$) 是以群为特征的自补点称图, 则 $G_1 \cup G_2, K_1 \cup G_1$ 都是以群为特征的图。2) $K_1 \cup K_p$ 是以群为特征的图。3) 设 G_i ($i=1, 2, 3$) 是以群为特征的自补点称图, G_1 与 G_2 不同构, G_2 与 G_3 同构, 则 $G = G_3 \cup (G_1 + G_2)$ 是以群为特征的图。4) $K_1 \cup (K_1 + \overline{K_p})$ 是以群为特征的图。5) 设 G 是以群为特征的点称图, 若 $\overline{G}$ 不连通, 则 nG 是以群为特征的图。这里 $G \cup H$ 总是表示两个点不相交的图的并, K_1 也可看作是以群为特征的自补点称图。

例4 图4给出的两个图是定理8的3) 所述的那种图。 $2C_4$ 是定理8的5) 所述的那种图。

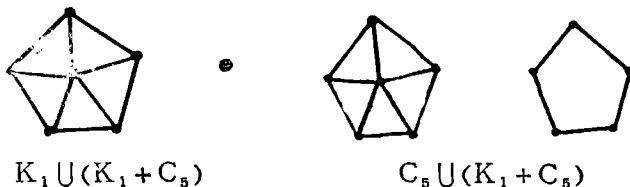


图 4

定义 2 设 G 的点集有两个轨道 V_1, V_2 , 相应的 G 的两个导出子图是 G_1 和 G_2 , G 的一个顶点在 V_1 另一个顶点在 V_2 的边集为 X_{12} , G 的补图的这个边集用 $\overline{X}_{12}$ 表示。设 $V(G^c) = V(G)$, $X(G^c) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_{12}$, 这里 $Y_{12} = X_{12}$ 或 $\overline{X}_{12}$, $Y_i = X(G_i)$ 或 $Y_i = X(\overline{G_i})$ 。 G^c 称为 G 的广义补图。类似地, 如 G 有 n 个轨道, 也可定义 G^c 。例如当 $n = 3$ 时, $X(G^c) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_{12} \cup Y_{13} \cup Y_{23}$ 。按定义, G^c 可以是 G 或 $\overline{G}$ 。 G 的广义补图有 2^t 个, $t = n + n(n-1)/2$ 。

例 4 设 $P_4 = 1\ 2\ 3\ 4$ 是 4 个点的道路, $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ 是它的两个轨道。它有 8 个广

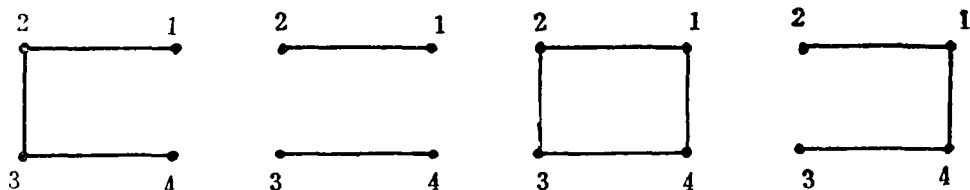


图 5

义补图, 图 5 画出了 4 个, 另外 4 个是它们的补图。

下面的定理 9 是易证的。

定理 9 设 G 有 n 个轨道 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$, G^c 是 G 的广义补图, 则 $\text{Aut } G \leq \text{Aut } G^c$ 。如果 $f \in \text{Aut } G^c$ 。且 $f(V_i) = V_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $f \in \text{Aut } G$ 。

系 3 设对任意 $f \in \text{Aut } G^c$, 都有 $f(V_i) = V_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\text{Aut } G = \text{Aut } G^c$ 。

系 4 G^c 的轨道不大于 n 个。

系 5 设 G 是有两个轨道的以群为特征的图, 如果 G^c 与 G 和 $\overline{G}$ 都不同构, 则 G^c 是点对称图。

根据定理 9, 如果 G 的轨道越多, 则群为 $\text{Aut } G$ 的图就可能越多。因此以群为特征的图的轨道不会太多。前面我们已列出的图最多只有 3 个轨道。

定义 3 设 G 是以群为特征的图且 G 具有 n 个轨道, 则称 G 是第 n 类图。

现将已知的这些图简列于下 (当然还有它们的补图)。

第 1 类图 K_p, C_7 , 立方体 Q_3 , Peterson 图, $C_{10} \langle 1, 3 \rangle, C_{10} \langle 1, 4 \rangle, nP$ (定理 6 所述及的 p 阶图用 P 表示), nK_p, nG (G 是以群为特征的点对称图且 $\overline{G}$ 不连通)。 $G[H]$ (G 和 H 都是第一类图且 G 和 H 至少有一个自补图)。

第 2 类图 这类图共有 2 种。第一种是它的群不能分解成两个群的和, 例如 P_4 和 $P_4[H]$, H 是第一类图。第二种是它的群可分解为两个可迁群之和 $F_1 + F_2$ 。它的两个相应的导出子图是 G_1 和 G_2 。这时有 $\text{Aut } G_i = F_i (i = 1, 2)$, 且 G_i 是第一类图。因此这一种只有下列几种情形 (以及它们的补图)。1) G_1 和 G_2 都是自补图且 G_1 和 G_2 不同构, 这种图记为 $G_1 \cup G_2$ 。2) G_1 和 G_2 都不是自补图, 此时 G_1 与 $\overline{G_2}$ 同构, 这种图记为 $G \cup \overline{G}$ 。例如 $K_p \cup \overline{K_p}, C_7 \cup \overline{C_7}, C_4 \cup \overline{C_4}$ 。3) $K_1 \cup K_p$ 。4) $K_1 \cup H$, H 是第一类自补图, 5) $G[H]$, 这里 G 是第二类 2 种图, H 是第一类自补图。

第三类图 $K_1 \cup (K_1 + \overline{K_p}), G_3 \cup (G_1 + G_2)$, 这里 G_1 是第一类自补图, G_1 与 G_2 不同构, G_3 与 G_2 同构。 $G[H]$, 这里 G 是第三类图, H 是第一类自补图。

上面列举的第三类图, 它们的群都是 3 个群之和。

定理 10 设 G 是第三类的且 $\text{Aut } G = F_1 + F_2 + F_3$, 则 G 或 $\overline{G}$ 是形状为 $G_3 \cup (G_1 + G_2)$ 的

图。这里 G_i 是第1类图， G_1 与 G_2 不同构， G_3 与 G_2 同构。

证明 设 G 的三个导出子图是 $G_i(i=1, 2, 3)$ 且 $\text{Aut } G_i = F_i$ 。因为 F_i 可迁，所以 G_i 是点
对称图。 G_i 与 $G_j(i \neq j)$ 如果邻接，则 G_i 与 G_j 完全邻接。如果 G_1, G_2, G_3 都同构，则 G 不
会有3个轨道。设这3个图任意两个都不同构。如果 $G_i(i=1, 2, 3)$ 是连通图，则 $G_1 \cup G_2$
 $\cup G_3, (G_1 + G_2) \cup G_3$ 以及其补图的群都是 $\text{Aut } G$ ， G 不以群为特征。如果 $G_i(i=1, 2, 3)$
不连通，则 $\overline{G_1} \cup \overline{G_2} \cup \overline{G_3}, (\overline{G_1} + \overline{G_2}) \cup \overline{G_3}$ 的群都是 $\text{Aut } G$ 。如果 $G_i(i=1, 2)$ 不连通且与 $\overline{G_3}$
不同构，则 $\overline{G_1} \cup \overline{G_2} \cup G_3, (\overline{G_1} + \overline{G_2}) \cup G_3$ 的群都是 $\text{Aut } G$ 。因此， G 的3个子图中有且仅有
两个是同构的。设 G_2 与 G_3 同构且 $G_i(i=1, 2)$ 连通， G_2 与 G_1 不同构。如果 G_1 与 $G_i(i=2, 3)$
不邻接或完全邻接，则 G 有自同构把 G_2 映射为 G_3 ， G 就不会有3个轨道。因此 G_1 仅与 G_2 和
 G_3 中的一个邻接。设 G_1 与 G_2 完全邻接，在此情况下，有两种可能。1) G_1 与 nG_2 同构，
 $n > 1$ 。如果 G_2 与 G_3 完全邻接，则 G 与 $G_2 + (n+1)G_3$ 同构， G 只有两个轨道。因此 G_2 与 G_3
不邻接。 $G = G_3 \cup (G_1 + G_2)$ ， G 与 $(K_1 \cup (K_1 + \overline{K_n}))[G_3]$ 同构， G_3 是第1类自补图。
2) G_1 与 nG_2 不同构。这时 $G_3 \cup (G_1 + G_2), \overline{G_2} \cup (\overline{G_1} + \overline{G_2})$ 以及其补图的群都是 $\text{Aut } G$ 。
其补图是连通的。因为 G 以群为特征，因此 $G_3 \cup (G_1 + G_2)$ 与 $\overline{G_2} \cup (\overline{G_1} + \overline{G_2})$ 同构。由此
得 $\overline{G_2}$ 与 G_3 同构， G_1 与 $\overline{G_1}$ 同构， $G_i(i=1, 2, 3)$ 是自补图且以群为特征。

系6 设 G 是第三类图且 $\text{Aut } G = F_1 + F_2 + F_3$ ，则 G 或 $\overline{G}$ 是形状为 $G_3 \cup (G_1 + G_2)$ 的图
或形状为 $(K_1 \cup (K_1 + \overline{K_n}))[G_3]$ 的图。这里 $G_i(i=1, 2, 3)$ 是第1类的自补图， G_2 与 G_3 同
构，且 G_1 与 G_2 不同构。

定理11 设 G 是以群为特征的图。若 G 有4个轨道，则 $\text{Aut } G$ 不是4个群之和。

证明 设 $\text{Aut } G = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ 。如 G 的4个轨道导出的子图是 $G_i(i=1, 2, 3, 4)$ ，
则 $\text{Aut } G_i = F_i$ ，且 G 是将这4个图邻接而得的图。因为 F_1 是可迁群，所以如 G_1 与 G_j 邻接，则
 G_1 与 G_j 完全邻接。如果这4个子图都是同构，则 G 不会有4个轨道。如果任何两个 G_i 都不同
构，则可设 G_1 和 G_2 是连通的（否则可在 $\overline{G}$ 中来讨论）。这时 $G_1 \cup G_2 \cup (G_3 + G_4)$ 和 $(G_1$
 $+ G_2) \cup (G_3 + G_4)$ 以及它们的补图的群都是 $\text{Aut } G$ ， G 就不是以群为特征的图了。设 G_1 与
 G_2 同构且是连通的，又设 G_1 与 G_3 不同构。把它们按照图6的方式邻接得到的图以及它们的
补图的群都是 $\text{Aut } G$ ，因此 G 不是以群为特征的图。证毕。



图 6

最后，我们猜测，如果 G 是以群为特征的图，则 G 最多只有3个轨道。

参 考 文 献

- [1] Harary F., Graph theory Addison-Wesley, 1969. 中译本，图论，李
慰萱译，上海科学技术出版社，1980年。
- [2] 李乔，杜锡录，图的对称性，数学的实践与认识，1 (1981)，57—64。