求线性规划问题初始可行基的一种新方法

何　岳　山

（基　础　课　部）

摘　　要

本文提出的方法，其特点是不引进人工变量，直接由线性规划问题约束方程组的增广矩阵〔Ab〕求得可行基或判其无解。新方法可节省计算时间并降低对计算机容量的要求。

一　引　言

设有线性规划问题

$$\min\{x_0 \mid x_0 = CX,\ AX = b,\ X \geqslant \mathbf{0}\}$$

为了求得一个初始可行基以便开始使用单纯形方法，目前的作法是构造辅助规划问题[1]。

$$\begin{cases} \min Y^T \mathbf{1} \\ (I A)\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = b \\ Y \geqslant \mathbf{0},\ X \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

其中，Y为新引入的人工变量，I为人造基。

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{m \times m} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

通过求辅助规划问题的最优解来获得原问题的一个可行基或判其无解。

本文于1989年3月14日收到

由于Smale证明了，采用单纯形法求解线性规划问题，在概率平均意义下，转轴次数为变量数目的线性函数[2]，所以，下面介绍的不引进人工变量而直接由原问题的约束方程组的增广矩阵〔Ab〕求出可行基的新方法也在此意义下减少了计算量。另一方面，由于不必处理规模为$(m+n)\times m$的辅助规划问题，从而此法也降低了对计算机容量的要求。

不失一般性，以下我们设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=m$，且$b\neq 0$。

二 计算步骤

计算分下述三个步骤进行：

（一）将增广矩阵〔Ab〕用初等行变换化为丁克诠——王洁夫形矩阵[3]。

所谓丁——王形矩阵是指形如

$$A_1=\begin{pmatrix} & b^{(1)} \\ A^{(1)} & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵。其中$b^{(1)}>0$；$A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$，其$J_i$列为m维列向量$e_i=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}\,i\,\text{维}}}{1},0,\cdots,0)^T$，$i=2,3,\cdots,m$。

注意，$A^{(1)}$第一行元素是$a_{1j}^{(1)}$，$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，其中列标为$J_i(i=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$的元素$a_{1J_i}^{(1)}=0$①。

（二）判别。分下述三种情形：

1．若$a_{1j}^{(1)}\leqslant 0$，$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则由非负条件和$b^{(1)}>0$知原问题无可行基，停止计算。

2．在所有的$a_{1j}^{(1)}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$中有些为正数，但其中某正数$a_{1J_1}^{(1)}$的下方列向量$(a_{2J_1}^{(1)},\ a_{3J_1}^{(1)},\ \cdots,\ a_{mJ_1}^{(1)})^T\leqslant 0$，则对$A_1$作下列行变换：

a）将A_1的第一行除以$a_{1J_1}^{(1)}$；

b）再作行变换：

$$r_k-a_{kJ_1}^{(1)}\cdot r_1 \qquad k=2,\ 3,\ \cdots,\ m$$

设经上述变换后的矩阵为$[\overset{\frown}{A}\ \overset{\frown}{b}]$，则显然有：

1° $\overset{\frown}{A}$的第J_1列为m维单位向量$e_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$；

2° $\overset{\frown}{b}=(\lambda,\ -\lambda a_{2J_1}^{(1)},\ \cdots,\ -\lambda a_{mJ_1}^{(1)})^T\geqslant 0$，$\lambda=b^{(1)}/a_{1J_1}^{(1)}$。

3° $\overset{\frown}{A}$的第J_1，J_2，$\cdots J_m$列是一个$m\times m$单位矩阵B。

B即欲求之初始可行基，与之对应的解是

---

① 在文献〔3〕、〔5〕中，$J_2=2$，$J_3=3$，…，$J_m=m$。这是因为交换了列的位置。

$$X_: \begin{cases} x_{J_1} = \lambda \\ x_{J_2} = -\lambda a_{2J_1}^{(1)} \\ \cdots \\ x_{J_m} = -\lambda a_{mJ_1}^{(1)} \\ x_j = 0 \quad j \neq J_1, J_2, \cdots, J_m。 \end{cases}$$

顺便指出，在第二阶段，即用单纯形方法解所给线性规划问题时，我们可改求

$$\min\{x_0 | x_0 = CX, \ \overset{\frown}{A}X = \overset{\frown}{b}, \ X \geqslant 0\}$$

而不必回到原问题。这是因为$[\overset{\frown}{A} \ \overset{\frown}{b}]$和$[A \ b]$所确定的方程组为同解方程组且$\overset{\frown}{A}$中的基是单位矩阵B。众所周知，此时的T(B)是最简单的。

3．如果$a_{1j}^{(1)}(j=1, 2, \cdots, n)$中，有些为正数，而且这些正数下方的列向量中都有正的分量。这时要作旋转变换。

（三）旋转变换的作法与单纯形算法中的换基迭代[4]完全相同。这里$a_{1j}^{(1)}(j=1, 2, \cdots, n)$作检验数。

定理：上述旋转变换必在有限次后出现步骤（二）的情形1或2。

证：对于矩阵A_1，考虑辅助规划问题

$$\begin{cases} \min \overline{C}X \\ S.T. \ \overset{\frown}{A}^{(1)}X = 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

这里$\overset{\frown}{A}^{(1)}$是由$A^{(1)}$去掉第一行$(a_{11}^{(1)}, a_{12}^{(1)}, \cdots, a_{1n}^{(1)})$后形成的$(m-1)\times n$矩阵，而$\overline{C} = (-a_{11}^{(1)}, -a_{12}^{(1)}, \cdots, -a_{1n}^{(1)})$。

由于$\overset{\frown}{A}^{(1)}$中有一个现成的基$\overset{\frown}{B}$（由$J_2, J_3, \cdots, J_m$列组成）且是单位矩阵，所以

$$T(\overset{\frown}{B}) = \begin{pmatrix} \overline{C}_{\overset{\frown}{B}}\overset{\frown}{B}^{-1}\overset{\frown}{A}^{(1)} - \overline{C} & \overline{C}_{\overset{\frown}{B}}\overset{\frown}{B}^{-1}\cdot 0 \\ \overset{\frown}{B}^{-1}\overset{\frown}{A}^{(1)} & \overset{\frown}{B}^{-1}\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & 0 \\ & & & & 0 \\ & \overset{\frown}{A}^{(1)} & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 \\ A^{(1)} & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}$$

与A_1比较，仅右上角一个元素不相等，其余均相同。（这里利用了$\overline{C}_{\overset{\frown}{B}} = (a_{1J_2}^{(1)}, a_{1J_3}^{(1)}, \cdots, a_{1J_m}) = 0$，这在步骤（一）中曾提醒读者注意。）

由于从$T(\overset{\frown}{B})$开始，经有限次换基迭代后必出现

1．检验数均小于或等于0，或者

2．某个大于0的检验数下方所对应的列向量小于或等于0矢量[1]。

所以，A_1也会在经由上述有限次旋转变换后出现与之对应的步骤(二)的情形1或2。证毕。

三 若干算例

1．

$$〔Ab〕=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+\frac{1}{5}\times r_2 \\ r_2\times\frac{1}{5}}]{r_2-6\times r_1} \begin{pmatrix} 0 & -4/5 & 2/5 & 0 & 1 \\ 1 & -14/5 & \boxed{7/5} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -2/7 & 0 & 0 & -2/7 & 1 \\ 5/7 & -2 & 1 & 5/7 & 0 \end{pmatrix}$$

因为$(-2/7,\ 0,\ 0,\ -2/7)\leqslant\mathbf{0}$，原无题无可行基。

2．在$r(A)<m$时此法仍然有效。设

$$〔Ab〕=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & -2/3 & 2 \\ 3/2 & 0 & 3/4 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 3/4 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(Ab)=2$，删去第三行后有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 3/4 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3/4 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这已是丁——王形矩阵① 其第一行第三列的元素“1”下方的列向量显然小于等于零矢量。且已有$J_1=3$，$J_2=4$，两列为一单位矩阵，此即欲求之初始可行基。与之对应的初始可行解是$X=(0,\ 0,\ 4,\ 0)^T$。

3．

$$〔Ab〕=\begin{pmatrix} 5.25 & -960 & 0.76 & 39 & 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0.75 & -150 & -0.06 & 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5.0 & -900 & 0.8 & 30 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

本例系 Beale 为说明单纯形算法的循环问题给出的。本方法可以处理此类问题。传统的二阶段法在加入 3 个人工变量经 4 次换基后得一基础可行解。$X=(0.016,0,1,\ 0.004,\ 0,\ 0,\ 0)^T$（参见文〔5〕）而用本方法，在步骤（二）时即可得一基础可行解$X=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0.04,\ 0.02,\ 0)^T$。

在本文的写作过程中，刘诗俊、陈坚柏两位同志提出了宝贵意见，在此表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕 马仲蕃，魏权龄，赖炎连，数学规划讲义，中国人民大学出版社，1981。14—16，12。

〔2〕 Smale S. Mathematical Programming，1983，27，241—262。

〔3〕 丁克诠，王洁夫，关于线性规划初始基本可行解的构造，大连工学院学报，1985，12，16—18。

①将一个矩阵化为丁——王形的方法见文〔3〕中定理2的证明。注意，不要作列位置的交换。

〔4〕 中国人民大学数学教研室，线性规划，中国人民大学出版社，1981. 47—48.
〔5〕 晏晓焰，李秾，线性规划问题基础可行解的一种求法，数值计算与计算机应用，1984，9. 167—177.

注：文中五处文字的上角标上圆括号“( )”代表方括号“〔 〕”。

A New Method For Finding The Initial Feasible Base of Linear Programming

He Yueshan

(East China JiaoTong university)

Abstract

This paper proposed a new method for solving a standard form linear programming. The distinguishing feature of the new method is that it can generate a sequence of a feasible bases or judge no solution to the given problem directly from the matrix 〔A b〕 of the constraints instead of utilizing the man-made variables, The results of some calculation testing show that the new method can save the computing time and reduuce the requirement for computer memory.