

线性规划单纯形法的简易解法

吴 滨 邑

(建筑工程系)

线性规划问题自1947年丹捷格 (C.B.Dantzig) 提出单纯形法后, 理论上趋于成熟, 应用上日益广泛。今在单纯形法的基础上, 不列单位矩阵, 同时利用对偶原理, 既不引入人工变量, 也不需利用罚因子或进行两阶段计算, 而直接迭代求算, 甚称简便。现就其迭代方法, 框图步骤, 计算实例及主要优点分述如后。

一 方 法

最大化的通式可写为:

$$\text{目标函数: } \text{Max} Z = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k + \dots + c_n x_n \dots \quad (1)$$

$$\text{约束条件: } \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{L1}x_1 + \dots + a_{Lk}x_k + \dots + a_{Ln}x_n \leq b_L \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\text{非负条件: } x_j \geq 0 \quad (j=1 \dots k \dots n) \dots \quad (3)$$

注: 在本计算中 b_i 亦可为负值 ($j=1 \dots L \dots m$)

(2) 式不等式加进松弛变量成为等式

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \vdots \\ a_{L1}x_1 + \dots + a_{Lk}x_k + \dots + a_{Ln}x_n + x_{n+L} = b_L \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{array} \right\} \quad (4)$$

以 $x_{n+1} \dots x_{n+L} \dots x_{n+m}$ 为基本变量, 将 (4) 式移项, 并与 (1) 式并列写成矩阵式

$$\left. \begin{array}{l} Z \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+L} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} c \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_L \\ \vdots \\ b_m \end{array} \begin{array}{l} x_1 \dots x_k \dots x_n \\ c_1 \dots c_k \dots c_n \\ -a_{11} \dots -a_{1k} \dots -a_{1n} \\ \vdots \\ -a_{L1} \dots -a_{Lk} \dots -a_{Ln} \\ \vdots \\ -a_{m1} \dots -a_{mk} \dots -a_{mn} \end{array} \quad (5)$$

本文于1988年9月30日收到

以第0行系数为检验数, 设 $c_k = \max_j c_j$ ($c_j > 0$), 则以k列为主元列, 且设

$$\theta_L = \frac{b_L}{-a_{Lk}} = \min_i \left| \frac{b_i}{-a_{ik}} \right| \quad (-a_{ik} < 0) \quad (\text{如所有检验数为正值的列, 其相应的各行系数无}$$

负值者, 则该题最优解无界), 则以L行为主元行, $-a_{Lk}$ 为主元素, 进行基变换, 用非基变量 x_k 与基本变量 x_{n+L} 交换, 同时进行以下系数变换得新矩阵 (6)

i) 原主元素所在元取原主元素倒数, 即 $a_{Lk}' = -\frac{1}{a_{Lk}}$

ii) 原主元行所在各元 (主元素本身除外) 以原系数被原主元素除并变号, 即

$$a_{Li}' = -\frac{-a_{Li}}{-a_{Lk}} = -\frac{a_{Li}}{a_{Lk}}$$

iii) 原主元列所在各元 (主元素本身除外) 以原系数被原主元素除, 即

$$a_{ik}' = \frac{-a_{ik}}{-a_{Lk}} = \frac{a_{ik}}{a_{Lk}}$$

iv) 其它各行各列所在各元, 新元 = 原元 - (对角元之积 ÷ 主元), 即

$$a_{ij}' = -a_{ij} - \frac{(-a_{ik})(-a_{Li})}{-a_{Lk}} = -a_{ij} + \frac{a_{ik}a_{Li}}{a_{Lk}}$$

v) 以上系数变换包括第0行及第0列的各元

$$\left. \begin{array}{c|cccc} & c & x_1 & x_{n+L} & x_n \\ \hline Z & \frac{c_k b_L}{a_{Lk}} & c_1 - \frac{c_k a_{L1}}{a_{Lk}} & \dots & -\frac{c_k}{a_{Lk}} & \dots & c_n - \frac{c_k a_{Ln}}{a_{Lk}} \\ \hline x_{n+1} & b_1 - \frac{a_{1k} b_L}{a_{Lk}} & -a_{11} + \frac{a_{1k} a_{L1}}{a_{Lk}} & \dots & \frac{a_{1k}}{a_{Lk}} & \dots & -a_{1n} + \frac{a_{1k} a_{Ln}}{a_{Lk}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_K & \frac{b_L}{a_{Lk}} & -\frac{a_{L1}}{a_{Lk}} & \dots & \frac{1}{a_{Lk}} & \dots & -\frac{a_{Ln}}{a_{Lk}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n+m} & b_m - \frac{a_{mk} b_L}{a_{Lk}} & -a_{m1} + \frac{a_{mk} a_{L1}}{a_{Lk}} & \dots & \frac{a_{mk}}{a_{Lk}} & \dots & -a_{mn} + \frac{a_{mk} a_{Ln}}{a_{Lk}} \end{array} \right\} \quad (6)$$

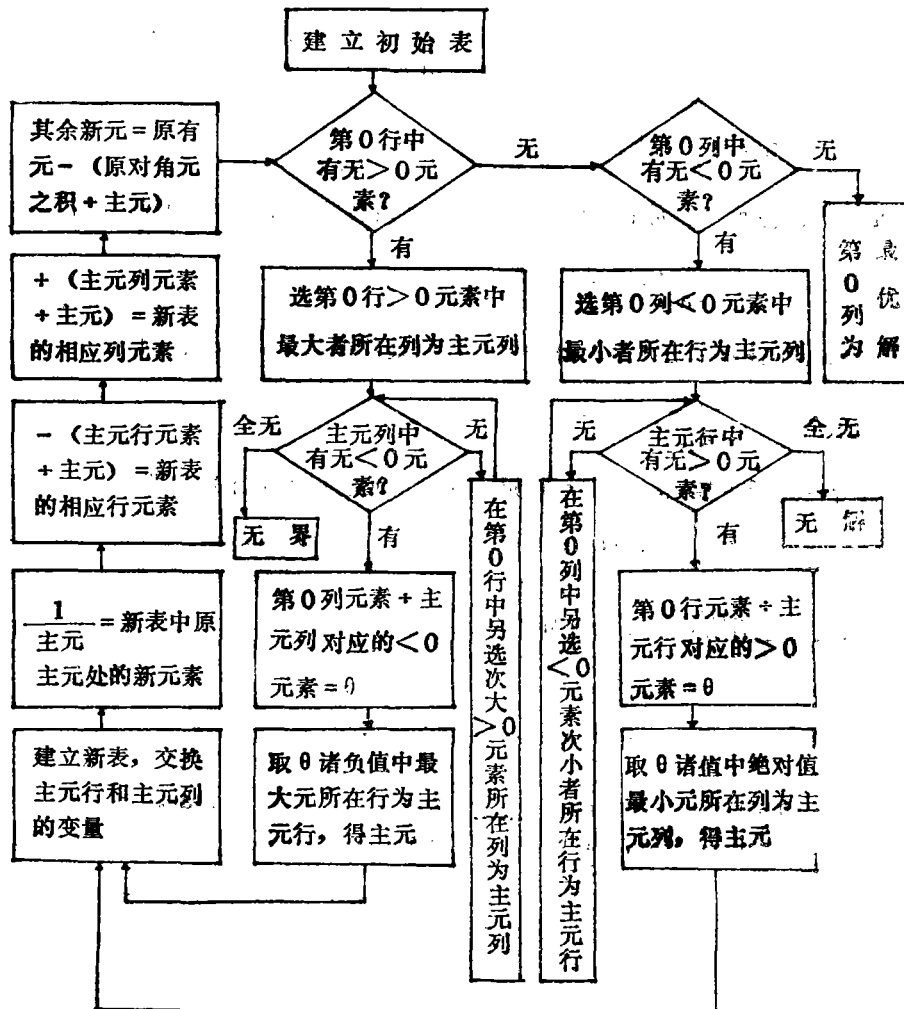
如此经过若干次迭代, 直至第0行各检验数均为负值或零, 则第0列各值为最优解。但除Z值外诸基本变量解中如出现负值, 其解为非可行解, 根据对偶原理, 不必引入人工变量,

选择 b_i 中负值绝对值最大的L行为主元行, 以 $a_{Lk} > 0$ 者, 求 $\theta_k = \min_i \left| \frac{c_i}{a_{Li}} \right|$ ($a_{Li} > 0$)

(如所有 b_i 中负值的行, 其相应的各行系数无正值者, 则该题无解), 则以k列为主元列, 以 a_{Lk} 为主元素, 继续进行迭代变换, 直至第0行各检验数均为负值或零, 且除Z值外诸值全为正值或零, 则得最优解。

解最小化问题时, 将目标函数两端均乘以 -1 , 仍按上述办法列矩阵式迭代求算。

二 框 图



三 计算实例

例一：求解 $\text{Max } z = -11x_1 + 3x_2 + x_3$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

① 用一般单纯形法解

分别引入松弛变量, 剩余变量和人工变量

$$\text{Max} Z = -11x_1 + 3x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_7 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1$$

列单纯形表

C_j			-11	3	1	0	0	-M	-M	
C_B	x_B	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
-M	x_6	3	1	4	2	-1	0	1	0	3/4
-M	x_7	1	2	1	0	0	0	0	1	1
0	x_5	1	-1	[2]	1	0	1	0	0	1/2
σ_j			-11+3M	3+5M	1+2M	-M	0	0	0	
-M	x_6	1	3	0	0	-1	-2	1	0	1/2
-M	x_7	1/2	[5/2]	0	-1/2	0	-1/2	0	1	1/5
3	x_2	1/2	-1/2	1	1/2	0	1/2	0	0	—
σ_j			11M/2-19/2	0	-M/2-1/2	-M	-5M/2-3/2	0	0	
-M	x_6	2/5	0	0	[3/5]	-1	-7/5	1	-6/5	2/3
-11	x_1	1/5	1	0	-1/5	0	-1/5	0	2/5	—
3	x_2	3/5	0	1	2/5	0	2/5	0	1/5	3/2
σ_j			0	0	3M/5-12/5	-M	-7M/5-17/5	0	-11M/5+19/5	
1	x_3	2/3	0	0	1	-5/3	-7/3	3/5	-2	
-11	x_1	1/3	1	0	0	-1/3	-2/3	1/3	0	
3	x_2	1/3	0	1	0	2/3	4/3	-2/3	1	
σ_j			0	0	0	-4	-9	-M+4	-M-1	

$$\sigma_j \leq 0 \quad x_B > 0$$

$$\therefore \text{最优解} \quad x_1 = 1/3 \quad x_2 = 1/3 \quad x_3 = 2/3$$

$$\text{Max} Z = -11 \cdot 1/3 + 3 \cdot 1/3 + 2/3 = -2$$

② 按简易法解

分别引入松弛变量或剩余变量化为等式, 原为等式者分列成两式, 其一加松弛变量, 另一加剩余变量。将诸式列成基本变量在左, 常数及非基变量在右的等式

$$\text{Max} Z = 0 - 11x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$x_4 = -3 + x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$x_5 = 1 - 2x_1 + x_2$$

$$x_6 = -1 + 2x_1 + x_2$$

$$x_7 = 1 + x_1 - 2x_2 - x_3$$

按框图步骤进行迭代

	C	x_1	x_2	x_3		C	x_1	x_7	x_3	
Z	0	-11	3	1	⇒	Z	3/2	-19/2	-3/2	-1/2
x_4	-3	1	4	2		x_4	-1	[3]	-2	0
x_5	1	-2	-1	0		x_5	1/2	-5/2	1/2	1/2
x_6	-1	2	1	0		x_6	-1/2	5/2	-1/2	-1/2
x_7	1	1	[-2]	-1	⇒	x_7	1/2	1/2	-1/2	-1/2

	C	x_4	x_7	x_3		C	x_4	x_7	x_5	
Z	-5/3	-19/6	-47/6	-1/2	⇒	Z	-2	-4	-9	-1
x_1	1/3	1/3	2/3	0		x_1	1/3	1/3	2/3	0
x_5	-1/3	-5/6	-7/6	[1/2]		x_3	2/3	5/3	7/3	2
x_6	1/3	5/6	7/6	-1/2		x_6	0	0	0	-1
x_7	2/3	1/6	-1/6	-1/2		x_7	1/3	-2/3	-4/3	-1

得最优解 $Z = -2$ $x_1 = 1/3$ $x_2 = 1/3$ $x_3 = 2/3$

例二：求解 $\text{Min} Z = 3x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

① 用一般单纯形法解

分别引入松弛变量，剩余变量和人工变量

$$\text{Max}(-Z) = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_6 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + x_4 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 5$$

列单纯形表

c_j			-5	6	7	0	0	-M	-M	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
-M	x_6	15	1	[5]	-3	0	0	1	0	3
0	x_4	20	5	-6	10	1	0	0	0	—
-M	x_7	5	1	1	1	0	-1	0	1	5
σ_i			-5+2M	6+6M	7-2M	0	-M	0	0	
6	x_2	3	1/5	1	-3/5	0	0	1/5	0	—
0	x_4	38	31/5	0	32/5	1	0	6/5	0	95/16
-M	x_7	2	4/5	0	[8/5]	0	-1	-1/5	1	5/4
σ_i			-31/5+4M/5	0	53/5+8M/5	0	-M	-6/5-6M/5	0	
6	x_2	15/4	1/2	1	0	0	-3/8	1/8	3/8	—
0	x_4	30	3	0	0	1	[4]	2	-4	15/2
7	x_3	5/4	1/2	0	1	0	-5/8	-1/8	5/8	—
σ_i			-23/2	0	0	0	53/8	1/8-M-53/8-M		
6	x_2	105/16	25/32	1	0	3/32	0	5/16	0	
0	x_5	15/2	3/4	0	0	1/4	1	1/2	-1	
7	x_3	95/16	31/32	0	1	5/32	0	3/16	0	
σ_i			-527/32	0	0	-53/32	0	-51/16-M	-M	

$\sigma_i \leq 0$ $\therefore$ 最优解 $x_1 = 0$ $x_2 = 105/16$ $x_3 = 95/16$

$$\text{Min} Z = -6 \cdot 105/16 - 7 \cdot 95/16 = -1295/16$$

② 按简易法解

$$\text{Max}(-Z) = 0 - 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

$$x_4 = -15 + x_1 + 5x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 15 - x_1 - 5x_2 - 3x_3$$

$$x_6 = 20 - 5x_1 + 6x_2 - 10x_3$$

$$x_7 = -5 + x_1 + x_2 + x_3$$

按框图步骤进行迭代

	C	x_1	x_2	x_3		C	x_1	x_2	x_3	
-Z	0	-5	6	7	⇒	-Z	14	-17/2	51/5	-7/10
x_4	-15	1	5	-3		x_4	-21	5/2	16/5	3/10
x_5	15	-1	-5	3		x_5	21	-5/2	[-16/5]	-3/10
x_6	20	-5	6	[-10]	⇒	x_3	2	-1/2	3/5	-1/10
x_7	-5	1	1	1		x_7	-3	1/2	8/5	-1/10

	C	x_1	x_5	x_6
-Z	1295/16	-527/32	51/16	-53/16
x_4	0	0	-1	0
x_2	105/16	-25/32	-5/16	-3/32
x_3	95/16	-31/32	-3/16	-5/32
x_7	15/2	-3/4	-1/2	-1/4

得最优解 $Z = -1295/16$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 105/16$$

$$x_3 = 95/16$$

四 小 结

由上述介绍可知，简易法有如下优点：

i) 计算量大量减少；

ii) 不引入人工变量，也不出现罚因子M，计算过程中，只有常数项，既简便又不易发生错误；

iii) 目标函数值直接求得，不需另行计算或变号。