

麦也尔电弧数学模型参数的 数值计算及麦氏模型的校正

熊 翔 葆

(电气工程系)

摘 要

本文由瞬时功率 $B(t)$ 和瞬时电阻 $r(t)$ (或电导 $g(t)$) 推导出一些用计算麦也尔电弧数学模型参数(τ 和 N)的表达式。分析表明,利用两个关于时间 t 的多项式拟合任何时刻麦尔电弧数学模型参数的办法来计算电弧上的电压和电流是可行的。此外,文中对当初麦氏推导数学模型时假定为常数的所谓参考含热量 Q_0 提出了校正方法。

文[1]在详细地介绍了麦也尔电弧数学模型之后推导出计算参数 τ 和 N 的两个方程式

$$\tau = \frac{\frac{d(ui)}{dt}}{\frac{d(ui)}{dt} - \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} - ui \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} \right)} \quad (1)$$

$$N = ui - \frac{1}{g} \frac{d}{dt} \frac{\frac{d(ui)}{dt}}{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} \right)} \quad (2)$$

式中:

u ——电弧电压

i ——电弧电流

$$\tau = Q_0 / N \quad (3)$$

Q_0 ——某参考含热量。在麦也尔数学模型的推导中假定为常数⁽¹⁾

——弧柱散发的功率

g ——电弧电导

本文于1988年10月27日收到

以上各量均为瞬态值, 即它们均为时间的函数。令

$$B = B(t) = ui \quad (4)$$

并注意

$$r = 1/g \quad (r \neq 0, g \neq 0) \quad (5-1)$$

$$\dot{g} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \quad (5-2)$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{g^2} \dot{g} \quad (5-3)$$

$$\ddot{g} = \frac{d}{dt} \dot{g} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{r^2} \dot{r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{2}{r} \dot{r}^2 - \ddot{r} \right) \quad (5-4)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{g^2} \dot{g} \right) = \frac{1}{g^2} \left(\frac{2}{g} \dot{g}^2 - \ddot{g} \right) \quad (5-5)$$

$$\frac{r}{r^2 - r \ddot{r}} = \frac{\frac{1}{g} \left(-\frac{1}{g^2} \dot{g} \right)}{\frac{1}{g^4} \dot{g}^2 - \frac{1}{g} \frac{1}{g^2} \left(\frac{2}{g} \dot{g}^2 - \ddot{g} \right)} = \frac{g \dot{g}}{-\dot{g}^2 + 2g \dot{g}^2 - g \ddot{g}} = \frac{g \dot{g}}{g^2 - g \ddot{g}} \quad (5-6)$$

将(4)、(5-1)~(5-6)各式的值代入(1)~(3)式整理后可得到 τ 和 N 以及 Q_0 的两组表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(B, g) = \frac{-\dot{B}g^2}{\dot{B}g\dot{g} + B(\dot{g}^2 - g\ddot{g})} \end{array} \right. \quad (6-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N(B, g) = B + \frac{\dot{B}g\dot{g}}{\dot{g}^2 - g\ddot{g}} \end{array} \right. \quad (6-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0(B, g) = \tau N = \frac{-\dot{B}g^2}{\dot{g}^2 - g\ddot{g}} \end{array} \right. \quad (6-3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(B, r) = \frac{\dot{B}r^2}{\dot{B}r\dot{r} + B(\dot{r}^2 - r\ddot{r})} \end{array} \right. \quad (7-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N(B, r) = B + \frac{\dot{B}r\dot{r}}{\dot{r}^2 - r\ddot{r}} \end{array} \right. \quad (7-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0(B, r) = \tau N = \frac{\dot{B}r^2}{\dot{r}^2 - r\ddot{r}} \end{array} \right. \quad (7-3)$$

若 r, B, g 用三个关于 t 的多项式拟合之, 比如用最小二乘法拟⁽²⁾。也即设

$$r = r(t) \approx \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad (8-1)$$

$$B = B(t) \approx \sum_{j=0}^n b_j t^j \quad (8-2)$$

$$g = g(t) \approx \sum_{k=0}^n c_k t^k \quad (8-3)$$

这里的 n 为三个多项式中次数最高者。次数低于 n 的多项式，可令其高次项的系数为零。

这样，我们以下的书写简化成 $\sum$ 以代表 $\sum_{i=0}^n$ 。将(8—1)~(8—3)的值代入(6—1)~(6—3)以及(7—1)~(7—3)。经整理后可得：

$$\left\{ \begin{aligned} \tau(t) &= \frac{-\sum \sum \sum i b_i c_j c_k t^{i+j+k-1}}{\sum \sum \sum [i b_i c_j c_k + b_i c_j c_k - b_i c_j k(k-1) c_k] t^{i+j+k-2}} \\ &= \frac{-\sum i b_i \sum c_j \sum c_k t^{i+j+k-1}}{\sum b_i \sum c_j \sum k(i+j-k+1) c_k t^{i+j+k-2}} \end{aligned} \right. \quad (9-1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} N(t) &= \frac{\sum \sum \sum [b_i c_j c_k - b_i c_j k(k-1) c_k + i b_i c_j c_k] t^{i+j+k-2}}{\sum \sum [i b_i b_j - b_i j(j-1) b_j] t^{i+j-2}} \\ &= \frac{\sum b_i \sum c_j \sum k(i+j-k+1) c_k t^{i+j+k-2}}{\sum b_i \sum j(i-j+1) b_j t^{i+j-2}} \end{aligned} \right. \quad (9-2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_0(t) &= \frac{-\sum \sum \sum i b_i c_j c_k t^{i+j+k-1}}{\sum \sum [i c_i c_j - c_i j(j-1) c_j] t^{i+j-2}} \\ &= \frac{-\sum i b_i \sum c_j \sum c_k t^{i+j+k-1}}{\sum c_i \sum j(i-j+1) c_j t^{i+j-2}} \end{aligned} \right. \quad (9-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau(t) &= \frac{\sum i b_i \sum a_j \sum a_k t^{i+j+k-1}}{\sum b_i \sum a_j \sum k(i+j-k+1) a_k t^{i+j+k-2}} \end{aligned} \right. \quad (10-1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} N(t) &= \frac{\sum b_i \sum a_j \sum k(i+j-k+1) a_k t^{i+j+k-2}}{\sum a_i \sum j(i-j+1) a_j t^{i+j-2}} \end{aligned} \right. \quad (10-2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_0(t) &= \frac{\sum i b_i \sum a_j \sum a_k t^{i+j+k-1}}{\sum a_i \sum j(i-j+1) c_j t^{i+j-2}} \end{aligned} \right. \quad (10-3)$$

通过断路器开断试验示波图，即 $u(t)$ 、 $i(t)$ 曲线，可得到 $B(t)=u(t) \cdot i(t)$ 和 $g(t)=i(t)/u(t)$ （或 $r(t)=u(t)/i(t)$ ）曲线。开断过程中任一时刻 $t=t_i$ 时的 $B(t_i)$ 、 $B(t_i)$ 、 $g(t_i)$ 、 $g(t_i)$ 等可以通过数值计算的办法求得。那么通过(6—1)~(6—3)即可算出 $\tau(t_i)$ 、 $N(t_i)$ 、 $Q_0(t_i)$ 。如果已知 $t=t_i$ 时的 $B(t_i)$ 和 $r(t_i)$ ， $r(t_i)$ 、 $r(t_i)$ 等值则通过(7—1)~(7—3)算出 $\tau(t_i)$ 、 $N(t_i)$ 、 $Q_0(t_i)$ ，其计算的结果应是相同的。如果将根据示波图算出的一系列离散点的 g 值与 B 值用二个 n 次多项式拟合时，计算电弧参数 τ 、 N 、 Q_0 可按(9—1)~(9—3)或(10—1)~(10—3)诸式进行。 τ 、 N 、 Q_0 与电路其它各量（如 u 、 i ，等）的关系也不准确定。麦也尔电弧数学模型假定 N 、 τ 、 Q_0 均为常数。其考虑的出发点是略去某些因素影响下的热量平衡。实际的情况可能有所出入。其误差的大小显然为具体断路器有关。上述的计算方法可对任何断路器的 τ 、 N 、 Q_0 值进行校验。对大量断路器的开断试验示波图进行 τ 、 N 、 Q_0 值的测定在现代电子计算机的帮助下是十分容易办到的事。

当断路器的 τ , N 已知时, 可对电力系统的开断进行计算。我们考虑如图一所示的短路开断。设系统的电压为:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad (11-1)$$

并假定主触头分断时短路电流已达稳定值

$$i(t) = \frac{U_m}{R_0} \sin(\omega t + \psi) \quad (11-2)$$

这里的 R_0 为包括接地电阻在内的系统电阻。略去了系统的电感和电容。开断过程相当于求图二的稳定解。因此很容易列出方程

$$\begin{cases} iR_0 + u_a = U_m \sin(\omega t + \psi) \\ i = i_p + i_a = \frac{u_a}{R_p} + \frac{u_a}{r_a} \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{R_0 r_a U_m \sin(\omega t + \psi)}{R_0(r_a + R_p) + R_p r_a} \\ &= V_m \sin(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (11-3)$$

其中:

$$V_m = \frac{r_a R_0}{R_0 r_a + r_a R_p + R_p R_0} U_m \quad (11-4)$$

由于 V_m 是 $r_a(t)$ 的函数。故 V_m 也是 t 的函数。

由麦也尔数学模型可推出方程

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(r_a - \frac{u_a^2}{N} \right)^{(1)} \quad (11-5)$$

将(11-3)、(11-4)代入(11-5)经整理后可得:

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{1}{\tau} \left\{ r_a - \frac{1}{2N} \left(\frac{Mr_a}{Rr_a + S} \right)^2 [1 - \cos 2(\omega t + \psi)] \right\} \quad (11-6)$$

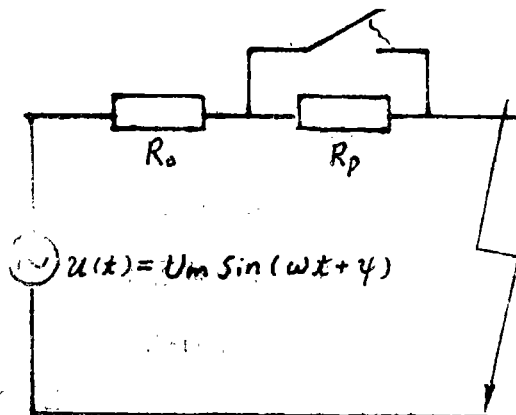
其中:

$$\begin{aligned} R &= R_0 + R_p \\ S &= R_0 R_p \\ M &= R_p U_m \end{aligned}$$

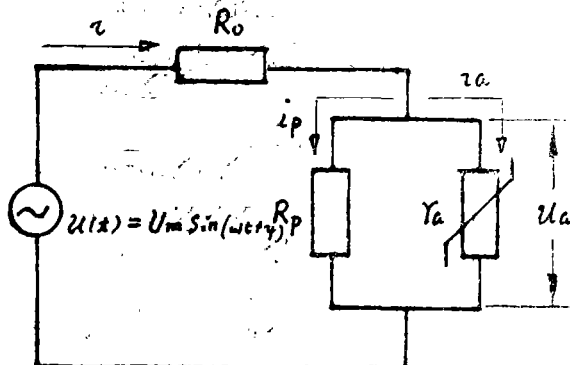
即使 τ , N 为常数, 求(11-6)的通解也是比较困难的。如果 τ , N 为时间的函数, (11-6)式的右端为 r_a 和 t 的二元函数

$$\frac{dr_a}{dt} = f(r_a, t) \quad (11-7)$$

考虑开关的主触头刚分开时, 动、静触头尚未分离, 即



图一



图二

$$r_a(0) = 0$$

我们可用解初值问题的算法求解(11—6)，以下用皮卡尔(Emile Picard)逐次逼近法解 (11—6)⁽⁴⁾。为此，将(11—6)两边自0至t积分：

$$r_a(z) = r_a(0) = \int_0^t \left\{ r_a - \frac{1}{2N} \left(\frac{Mr_a}{Rr_a + S} \right)^2 [1 - \cos 2(\omega z + \psi)] \right\} dz \quad (11-8)$$

假定通过开关的开断试验得出其 τ , N 与时间的关系曲线，经最小二乘拟合，它们分别表示为：

$$\tau = \sum_{j=0}^{\mu} \beta_j t^j \quad (11-9)$$

$$N = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k t^k \quad (11-10)$$

τ , N 为常数是 $\beta_j = 0$ ($j \geq 1$), $\alpha_k = 0$ ($k \geq 1$) 时的特殊情况。

将(11—9)和(11—10)代入(11—8)可得到函数系列 $\{r_{an}(t)\}$ ：

$$r_{a0}(t) = r_{a0} = 0$$

$$r_{a1}(t) = r_{a1} = r_{a0} + \int_0^t \frac{1}{\sum_{j=0}^{\mu} \beta_j z^j} \left\{ r_{a0} - \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k z^k} \left(\frac{Mr_{a0}}{Rr_{a0} + S} \right)^2 [1 - \cos 2(\omega z + \psi)] \right\} dz$$

$$r_{a2}(t) = r_{a2} = r_{a0} + \int_0^t \frac{1}{\sum_{j=0}^{\mu} \beta_j z^j} \left\{ r_{a1} - \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k z^k} \left(\frac{Mr_{a1}}{Rr_{a1} + S} \right)^2 [1 - \cos 2(\omega z + \psi)] \right\} dz$$

.....

$$r_{a\lambda}(t) = r_{a\lambda} = r_{a0} + \int_0^t \frac{1}{\sum_{j=0}^{\mu} \beta_j z^j} \left\{ r_{a(\lambda-1)} - \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k z^k} \left(\frac{Mr_{a(\lambda-1)}}{Rr_{a(\lambda-1)} + S} \right)^2 [1 - \cos 2(\omega z + \psi)] \right\} dz$$

当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，可得 $r_a(t) = r_{a\lambda}(t)$ ，即 r_a 在 $r_{a\lambda}$ 之值。但上述诸式要表示成 t 的一元函数是有困难的。

故只好用数值积分的方法求之。比如欲求 $t = t_i$ 之值可将 t_i 分成等分，即 $\Delta z = \frac{t_i}{m}$ 。计算出积分号内的对应函数值 $f(\Delta z)$, $f(2\Delta z)$, $f(m\Delta z)$ ，然后进行数值积分，当 $|r_{a(\lambda-1)} - r_{a\lambda}| < \varepsilon$ 即结束对 $t = t_i$ 的计算。（ ε 为任意给定的正数）。如此我们即可得出 $r_a(t)$ 曲线。

当然，直接用 N , τ 的离散数据。用其它更先进的初值问题的算法求解(11—6)也是可以的，甚至更好。

当 $r_a(t)$ 已算出，则由(11—4)可算出 $V_m(t)$ ，由(11—3)可算出 $u_a(t)$ 。由 $i_p = u_a(t)/R_p$ 可算出流入电阻的电流，由 $i = u_a/R_p + u_a/r_a$ 算出流过 R_0 的电流。而用式子

$$iR_0 + u_a = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

可校验我们的计算。

参 考 文 献

- [1] 尚振球 麦也尔电弧数学模型的表达形式及参数的确定方法 高压电器 1985 №6.
- [2] 杨篪引主编 电子计算机应用数学 (第一册) 冶金工业出版社 1979.
- [3] 南京大学数学系计算数学专业编 数值逼近方法 科学出版社 1978.
- [4] 近藤次郎等著 于溶渤译 微分方程 付里叶分析 辽宁科学技术出版社 1983.
- [5] 俞大光编 电工基础 (中册) p182 人民教育出版社 1981.

Numerical Computiom and Correction for Parameters of O. Mayr's Mathematic Model of Electrical Arc

Xiong Xiangbao

(Department of Electrical Engineering)

ABSTRACT

This article from instantaneous porwer and instantaneous resistance (or conductance) has dirived expressious used for computation of paramenterers(τ and N) of O. Mayr's mathematic model of electrical arc (PMMMEA). Analysis indicates, it is always possible to find out voltage and current in an electrical arc by two polynominals of degree n with respect to time t . Additionally, the article presents a method for correnting Q_0 that is called reference heat which was assumed a constance by O. Mayr in deriving the original methematic model.