

关于线性陀螺保守系统的稳定性

圣 小 珍

(建工系)

摘 要

如何判别陀螺保守系统 $\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = 0$ 的稳定性, 是一个理论上和应用上都十分重要的问题, 得到了广泛的研究。本文依据李亚普若夫稳定性定理建立了一个新的判别准则。算例表明, 新的判别准则十分有效, 能得到很大的稳定参数区, 比现有准则优越。

关键词: 陀螺保守系统, 稳定性。

一 引 言

经过适当的变换, 陀螺保守系统可表为

$$\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

此处, $x \in R^N$, N 为任意正整数, K , G 为 N 阶方阵, 且 $G^T = -G$, $K^T = K$ (T 表示转置)。当 K 有奇数个负特征根时, (1)总是不稳定的。当 K 有偶数个负特征根时, 虽然对应的保守系统是不稳定的, 但(1)可能稳定也可能不稳定^[1]。原则上, 通过解出(1)的全部特征根即可判定(1)的稳定性, 但当 N 很大时, 这种办法是不合适的。因此, 如何直接根据 G 和 K 来判别(1)的稳定性, 成为运动稳定性研究的一个重要问题, 许多作者对此进行了研究, 得到了一些判别准则^[2, 3, 4]。这些准则都有较多的条件限制。本文根据李亚普若夫稳定性定理, 在没有任何条件限制下建立一个新的判别准则, 并举例说明准则的应用与现有准则的比较。

本文于1990年元月5日收到

二 一个新的判别准则

先来证明一个引理。

引理：设 T_1, T_2, T_3 均为 $N \times N$ 阶实方阵，且 $T_1^T = T_1, T_3^T = T_3$ 。矩阵

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2^T \\ T_2 & T_3 \end{bmatrix}$$

是正定的充要条件是 T_1 和 $T_3 - T_2 T_1^{-1} T_2^T$ 均为正定。

证：矩阵 T 为正定的充要条件是对任何 $z \neq 0, z \in R^{2N}$ ，有

$$V = z^T T z > 0$$

现作变换

$$z = \begin{bmatrix} I & -T_1^{-1} T_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix} y$$

此处， $y^T = (y_1^T, y_2^T)$ ， $y_1, y_2 \in R^N$ ， I 为单位矩阵。显然变换是非奇异的。在新的变量下，

$$\begin{aligned} V &= y^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ -T_2 T_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2^T \\ T_2 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -T_1^{-1} T_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix} y \\ &= y_1^T T_1 y_1 + y_2^T (T_3 - T_2 T_1^{-1} T_2^T) y_2 \end{aligned}$$

由此显见引理正确。

现在来证明本文结果。

定理：如果存在实数 ε 使

$$Q_1 = K^2 + \varepsilon K > 0 \quad (">0" \text{表示正定, } "<0" \text{表示负定}) \quad (2)$$

$$Q_2 = K + \varepsilon I - \varepsilon G(K + \varepsilon I)^{-1} G > 0 \quad (I \text{ 为单位矩阵}) \quad (3)$$

则陀螺保守系统 (1) 是稳定的。

证：取李亚普若夫函数

$$V = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} + \frac{1}{2} x^T S x + \frac{1}{2} (A \dot{x} + B x)^T (A \dot{x} + B x) \quad (4)$$

其中矩阵 $M (= M^T)$ ， $S (= S^T)$ ， A ， B 待定。上式可改写成

$$2V = x^T (S + B^T B) x + 2 x^T B^T A \dot{x} + \dot{x}^T (M + A^T A) \dot{x} \quad (5)$$

V 关于 (1) 的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T (M + A^T A) \ddot{x} + x^T (S + B^T B) \ddot{x} + \dot{x}^T B^T A \ddot{x} + x^T B^T A \ddot{x} \\ &= \dot{x}^T (M + A^T A) (-G \dot{x} - K x) + x^T (S + B^T B) \dot{x} + x^T B^T A \dot{x} \\ &\quad + x^T (B^T A) (-G \dot{x} - K x) \\ &= V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned} \quad (6)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -\dot{x}^T [(M + A^T A) G - B^T A] \dot{x} \\ V_2 &= -x^T B^T A K x \\ V_3 &= x^T [-K(M + A^T A) + S + B^T B - B^T A G] \dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

现令

$$M + A^T A = K - G^2 + \varepsilon I, \quad A = G, \quad B = K, \quad S + B^T B = K^2 + \varepsilon K \quad (8)$$

由于 G^3, KGK, G 都是反对称矩阵, 故

$$V_1 = -\dot{x}^T [KG - G^3 + \varepsilon G - KG] \dot{x} = 0$$

$$V_2 = -x^T (KGK)x = 0$$

$$V_3 = x^T (-K^2 + KG^2 - \varepsilon K + K^2 + \varepsilon K - KG^2) \dot{x} = 0$$

这样, 由 (6) 可知 $\dot{V} = 0$, 而由 (5) 有

$$\begin{aligned} 2V &= x^T (K^2 + \varepsilon K)x + 2x^T KG\dot{x} + \dot{x}^T (K - G^2 + \varepsilon I)\dot{x} \\ &= (x^T \quad \dot{x}^T) \begin{pmatrix} K^2 + \varepsilon K & KG \\ -GK & K - G^2 + \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

由引理可知, V 正定等价于

$$Q_1 = K^2 + \varepsilon K > 0$$

$$Q_2 = K - G^2 + \varepsilon I + GK(K^2 + \varepsilon K)^{-1}KG > 0$$

而

$$\begin{aligned} Q_2 &= K - G^2 + \varepsilon I + GK[K(K + \varepsilon I)]^{-1}KG \\ &= K - G^2 + \varepsilon I + G(K + \varepsilon I - \varepsilon I)(K + \varepsilon I)^{-1}G \\ &= K - G^2 + \varepsilon I + G[I - \varepsilon(K + \varepsilon I)^{-1}]G \\ &= K + \varepsilon I - \varepsilon G(K + \varepsilon I)^{-1}G \end{aligned}$$

由此可知, 当 (2) (3) 成立时, V 正定, 又 $\dot{V} = 0$, 故由李亚普若夫稳定性定理知系统 (1) 是稳定的。证毕。

在很多情况下, 我们要讨论 K 负定时系统 (1) 的稳定性, 对此我们有如下两个推论 (简易判别准则)。

推论 1: 记 $\lambda_{\min} (> 0)$ 为 $-G^2$ 的最小特征值, 则当 K 负定, 且

$$K - \frac{1}{4}\lambda_{\min}I > 0 \quad (10)$$

时, 系统 (1) 是稳定的。

证明: 取 $\varepsilon = -\frac{1}{4}\lambda_{\min}$, 这时 $K + \varepsilon I$ 负定从而 $K^2 + \varepsilon K$ 正定, 即式 (2) 成立。又由 (10) 可知

$$K - \frac{1}{4}\lambda_{\min}I + \frac{1}{2}\lambda_{\min}I > 0$$

由此不难推出

$$(K - \frac{1}{4}\lambda_{\min}I)^{-1} + \frac{2}{\lambda_{\min}}I < 0$$

$$\text{即} \quad (K + \varepsilon I)^{-1} + \frac{2}{\lambda_{\min}}I < 0 \quad (11)$$

现任取 $x \in \mathbb{R}^n$, 由 (11) 并注意 $\varepsilon < 0$, 我们有

$$\begin{aligned} x^T Q_2 x &= x^T (K + \varepsilon I)x + \varepsilon (Gx)^T (K + \varepsilon I)^{-1} Gx \\ &> x^T (K + \varepsilon I)x + \varepsilon (Gx)^T \left(-\frac{2}{\lambda_{\min}}I \right) Gx \\ &= x^T (K + \varepsilon I)x + \frac{2\varepsilon}{\lambda_{\min}} x^T G^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^T [K - \frac{1}{4} \lambda_{\min} I + \frac{1}{2} (-G^2)] x \\
&\geq x^T (K - \frac{1}{4} \lambda_{\min} I + \frac{1}{2} \lambda_{\min} I) x \\
&= x^T (K + \frac{1}{4} \lambda_{\min} I) x
\end{aligned}$$

于是由(10)知, Q_2 正定, (3) 式成立, 由定理知系统(1) 稳定。

推论 2: 记 $\lambda_{\max} (\neq 0)$ 为 $-G^2$ 的最大特征值, 又设 G 非奇异, 则当 K 负定, 且

$$K - \frac{1}{4} \lambda_{\max} I + \frac{1}{2} (-G^2) > 0 \quad (12)$$

时, 系统(1) 是稳定的。

证明: 取 $\varepsilon = -\frac{1}{4} \lambda_{\max}$, 则(2) 成立。又由(12) 可推出

$$(K - \frac{1}{4} \lambda_{\max} I)^{-1} + 2(-G^{-2}) < 0 \quad (13)$$

事实上, 因为 $\frac{1}{2}(-G^2)$ 正定, 故存在非奇异矩阵 B 使

$$B^T B = \frac{1}{2}(-G^2) \quad (14)$$

又(12) 等价于

$$(B^{-1})^T (K - \frac{1}{4} \lambda_{\max} I) B^{-1} + I > 0$$

由此显然可知

$$B(K - \frac{1}{4} \lambda_{\max} I)^{-1} B^T + I < 0 \quad (15)$$

而(15) 又等价于

$$(K - \frac{1}{4} \lambda_{\max} I)^{-1} + B^{-1} (B^{-1})^T < 0$$

由此并(14) 知(13) 成立。

由(13) 即可证明推论 2, 证法与推论 1 同。

三 应用举例与比较

例 1、旋转系统的稳定性

旋转系统是用以检验陀螺保守系统稳定性判据的典型例子。先来考察二自由度系统, 运动方程为^[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{x} + 2\xi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} k_1 - \xi^2 - \eta & 0 \\ 0 & k_2 - \xi^2 - \eta \end{bmatrix} x = 0 \quad (16)$$

其中 ξ 表示旋转的角速度, η 表示外力参数, k_1, k_2 表示两个位移方向的弹性刚度, $k_1, k_2 > 0$ 。

作为算例, 取 $\xi = 2$, $\eta = 3$, 则

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 - 7 & 0 \\ 0 & k_2 - 7 \end{bmatrix}$$

不难算出

$$\begin{aligned}
Q_1 &= K^2 + \varepsilon K = \begin{bmatrix} (k_1 - 7)(k_1 - 7 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & (k_2 - 7)(k_2 - 7 + \varepsilon) \end{bmatrix} \\
Q_2 &= K + \varepsilon I - \varepsilon G(K + \varepsilon I)^{-1} G = \begin{bmatrix} k_1 - 7 + \varepsilon + \frac{16\varepsilon}{k_2 - 7 + \varepsilon} & 0 \\ 0 & k_2 - 7 + \varepsilon + \frac{16\varepsilon}{k_1 - 7 + \varepsilon} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

因此, 当以下四个不等式皆成立时

$$\left. \begin{aligned} (k_1 - 7)(k_1 - 7 + \varepsilon) &> 0 \\ (k_2 - 7)(k_2 - 7 + \varepsilon) &> 0 \\ k_1 - 7 + \varepsilon + \frac{16\varepsilon}{k_2 - 7 + \varepsilon} &> 0 \\ k_2 - 7 + \varepsilon + \frac{16\varepsilon}{k_1 - 7 + \varepsilon} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Q_1, Q_2 正定, 从而由定理知系统 (16) 稳定。取 $\varepsilon = -4$, (ε 取其它值得出较小的稳定参数区), 以 k_1, k_2 为参数, 可绘出 (17) 表示的稳定参数区 (见图)。稳定区分为两部分, 之一在 K 负定 ($k_1 < 7, k_2 < 7$) 的区域内 (记为 Ω), 另一在 K 正定 ($k_1 > 7, k_2 > 7$) 的区域内 (未画出)。对于 K 正定的情形, 由能量准则易知 (16) 是稳定的。不难检验, 在 K 负定的区域内, 由 (17) 得的稳定区与实际稳定区几乎是重合的。

文 [2] 的准则 (对 $GK = KG$ 时, (1) 为稳定的充要条件是 $4K - G^2$ 正定) 应用于此例, 得出稳定区为 45° 角射线 AL , 其位于 K 为负定的区域中的部分包含在 Ω 中。

文 [3] 的准则 (对 $N = 2$ 的情形, 当 K 负定, $\text{tr}(4K - G^2) > 0$ 时, 系统 (1) 稳定) 应用于此例, 得稳定区: $0 < k_1, k_2 < 7, k_1 + k_2 > 6$ 。该区也含在 Ω 中。

文 [4] 的准则 (当 K 负定而 $4K - G^2 - \frac{1}{2}\lambda_{\max}I$ 正定时, 系统 (1) 是稳定的, 此处 $\lambda_{\max}$ 为 $-G^2$ 的最大特征值), 我们认为其证明有误 (见附录)。但当 $\lambda_{\min} \geq \frac{1}{2}\lambda_{\max} > 0$ 时, 由推论 1 可证明这个准则是成立的。为此只要证明 $4K + \lambda_{\min}I$ 正定即可, 而这是很容易验证的。事实上, $\forall x \in R^n$ 有

$$\begin{aligned} x^T(4K + \lambda_{\min}I)x &= x^T(4K - G^2 - \frac{1}{2}\lambda_{\max}I + G^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}I + \lambda_{\min}I)x \\ &\geq x^T(4K - G^2 - \frac{1}{2}\lambda_{\max}I)x + x^T(-\lambda_{\max}I + \frac{1}{2}\lambda_{\max}I + \lambda_{\min}I)x \\ &\geq x^T(4K - G^2 - \frac{1}{2}\lambda_{\max}I)x \\ &> 0 \end{aligned}$$

现在再来考察一般的旋转系统 ($2N$ 个自由度)。由文 [6] 可知, 如质量矩阵为单位矩阵, 则旋转系统的动力学方程可写成

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\xi I \\ 2\xi I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 - \xi^2 I & 0 \\ 0 & K_2 - \xi^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

其中 $p, q \in R^N$, 代表位移矢量; K_1, K_2 均为 N 阶对称矩阵, 与系统的刚度和外力参数有关; ξ 代表旋转的角速度。我们有

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 0 & -2\xi I \\ 2\xi I & 0 \end{pmatrix}, \quad -G^2 = \begin{pmatrix} 4\xi^2 I & 0 \\ 0 & 4\xi^2 I \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\min} = 4\xi^2, \\ K &= \begin{pmatrix} K_1 - \xi^2 I & 0 \\ 0 & K_2 - \xi^2 I \end{pmatrix}, \quad K + \frac{1}{4}\lambda_{\min}I = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是由定理的推论 1 得到

结论: 当 $K_1 > 0, K_2 > 0$, $\begin{pmatrix} K_1 - \xi^2 I & 0 \\ 0 & K_2 - \xi^2 I \end{pmatrix} < 0$ 时, 旋转系统 (18) 是稳定的。

例 2、推论 1 和推论 2 的比较

令 $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_4)$, $-G^2 = \text{diag}(16, 16, 30, 30)$ 。可知 $\lambda_{\min} = 16, \lambda_{\max} = 30$ 。

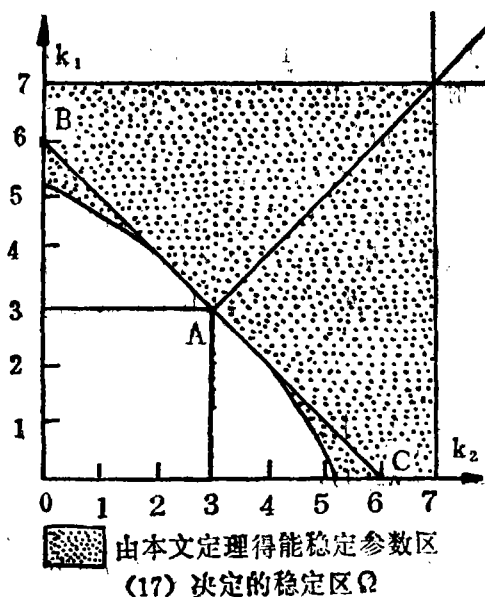
由推论 1 得稳定参数区

$$\Omega_1: 0 > k_1, k_2, k_3, k_4 > -4$$

由推论 2 得稳定参数区

$$\Omega_2: \begin{cases} 0 > k_1, k_2 > 30/4 - 16/2 = -0.5 \\ 0 > k_3, k_4 > 30/4 - 30/2 = -7.5 \end{cases}$$

可见 Ω_1 和 Ω_2 互不包含。



四 结 束 语

本文在一般情况下建立了任意有限自由度陀螺保守系统的稳定性判别准则, 并据此得到两个推论。算例表明, 我们准则十分有效, 比现有准则能得到更大的稳定区。在应用时, 为了得到尽可能大的稳定区, 必须选择最优的 ε 。两个推论更便于应用, 但作为代价, 要损失一部分稳定区。然而, 推论提供了 ε 的选择方法。

在撰写本文过程中, 作者得到北京理工大学基础课部李骊教授的鼓励, 在此致谢。

参 考 文 献

- [1] 舒仲周, 运动稳定性, 西南交通大学出版社(1989), p.163.

- [2] Huseyin K., Hagedorn P., and Teschner W., On the stability of linear conservative gyroscopic systems. J. of Appl. Math. and Phys., Vol. 34, No. 6 (1983) pp. 807—815.
- [3] Inman D.J., and Saggio M., F, Stability analysis of a gyroscopic system by matrix Methods, AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 1 (1985), pp. 150—152
- [4] Inman D.J., A sufficient condition for the stability of conservative gyroscopic systems. Trans. of ASME, J. of Appl. Mech., Vol. 55 (1988), pp. 895—898
- [5] [6] Huseyin K. 著, 张文译, 多参数系统的振动与稳定, 上海科学技术出版社, (1984). p. 137, p. 133

On the Stability of a Linear Conservative Gyroscopic System

Sheng Xiaozhen

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT

The problem how to determine the stability of a conservative gyroscopic system $\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$ is theoretically and practically important and has been widely studied. In this paper, a new stability criterion, which is based on the Lyapunov stability theorem, is proposed. The examples show that, being able to provide a very large stable region of parameters, this proposed criterion is superior to the previous ones

key words: conservative gyroscopic systems, stability.

附录：关于文[4]中的几个错误

1、文[4]对其准则的证明似有错。为证明这个准则的正确性，关键在于证明

$$d = (x^* B x)^2 - 4 x^* C x \quad (a) \text{ (文[4]式(23))}$$

恒正。此处 x 为 $2N$ 维复向量， x^* 为 x 的共轭转置，且 $x^* x = 1$ ； $B = \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$ ， $C = \text{diag}$

$(-K, -K)$ 。为此，作者得出不等式

$$d > (x^* B x)^2 > 0 \quad (b) \text{ (文[4]式(27))}$$

从而认为准则获得了证明。但式(b)的第一个不等式显然是不成立的。由于文[4]设定 K 负定，故矩阵 C 正定，对任何 $x \neq 0$ ，有 $x^* C x > 0$ ，从而由(a)只能得出

$$d < (x^* B x)^2 \quad (c)$$

这样，文[4]的准则没有得到证明。

2、文[4]认为“如果 $4K - G^2$ 和 $GK - KG$ 均为正定矩阵，则(1)是稳定的”。这个结论是空的，因为不难证明 $GK - KG$ 永远不会定号，正如文[2]所指出的那样。

3、文[4]的算例有误，作者把 $GK - KG$ 算错了。