

期望最优控制系统设计

卢 宝 光

(电气系)

摘 要

本文首先定义期望最优控制设计的概念,推广按主导极点选择加权阵的方法,导出无需试探确定加权阵的期望最优控制系统设计算法。此算法便于CAD实现,从而解除了应用最优控制理论设计一类控制系统的限制。

引 言

设线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ 完全可控。二次型性能指标为

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (2)$$

其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ 。系统(1)的最优控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{x}$$

反馈增益阵

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3)$$

其中矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ 为Riccati代数方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4)$$

的唯一解。

上述最优控制理论是完美的,但是运用于工程设计时,为了使闭环系统具有满意的动态特性, $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}]$ 的选择迄今仍然靠试凑法,这限制了其推广作用。由于闭环极点对系统动态特性起主导作用,根据已知开环系统和期望的闭环系统特性来求得 $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}]$,即二次型最优控制的逆问题,吸引了国内外很多学者研究,取得不少结果⁽¹⁻⁵⁾。最近,文献⁽⁶⁾提供了给定闭环极点设计最优控制系统应满足的条件,但是,满足条件的给定闭环极点还不能保证

本文于1988年11月11日收到修改稿

一定具有要求的动态特征。本文应用最优性频域公式,把期望闭环极点与二次型性能指标结合起来,给出一条无需试探的最优控制系统设计的途径。

二 期望最优控制设计

定义1 具有期望的动态特性的二次型指标设计称为期望最优控制设计。

定义2 具有要求的三项常规指标(e_{∞} , σ , t)和抗干扰能力的闭环系统,其极点称为期望闭环极点。

对于单输入系统,方程(1)写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1')$$

为方便起见,令二次型指标中的 $R=1$ 并不失一般性。于是方程(2)变成

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^2] dt \quad (2')$$

引理1 线性定常系统(1')存在最优控制律, $u = -\mathbf{F}\mathbf{x}$,当且仅当

$$\begin{aligned} & [1 + \mathbf{F}(-s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}]^* [1 + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}] \\ & = 1 + \mathbf{b}^* (-s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{Q} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{或} \quad |1 + \mathbf{F}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}| \geq 1 \quad (6)$$

引理2 若系统(1')的 $u = -\mathbf{F}\mathbf{x}$ 存在,则形成的闭环系统 $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{F})$ 是稳定的,并称之为最优反馈增益系统,相应的状态反馈阵 $\mathbf{F}$ 称之为最优反馈增益阵。

推论 闭环系统 $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{F})$ 的特征值实部都是负的,即 $\text{Re}\lambda_i[\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{F}] < 0$ 。

由于工程要求系统的动态特性由期望闭环极点表征,而最优控制是用状态反馈来实现,显然,期望最优控制设计就是通过期望极点求得最优反馈阵 $\mathbf{F}$ 。

$\mathbf{A}$ 的特征方程

$$\mathbf{a}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (7)$$

闭环系统特征方程

$$p(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{F})] = s^n + (a_{n-1} + f_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + f_1)s + (a_0 + f_0) \quad (8)$$

于是有

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}(s)} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

以及

$$\mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{a}(s)} (f_{n-1}s^{n-1} + f_{n-2}s^{n-2} + \cdots + f_1s + f_0) \quad (10)$$

这样

$$[1 + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}] = \frac{p(s)}{\mathbf{a}(s)} \quad (11)$$

根据最优性频域公式(6)有

$$[1 + F(j\omega I - A)^{-1}b] [1 + F(-j\omega I - A)^{-1}b] = \frac{p(j\omega)p(-j\omega)}{a(j\omega)a(-j\omega)} \geq 1 \quad (12)$$

由此可得

$$\frac{p(j\omega)p(-j\omega) - a(j\omega)a(-j\omega)}{a(j\omega)a(-j\omega)} \geq 0 \quad (13)$$

设

$$d(j\omega)d(-j\omega) = p(j\omega)p(-j\omega) - a(j\omega)a(-j\omega) \quad (14)$$

将 $j\omega$ 换成 S , $p(s)$ 与 $a(s)$ 中的 S^n 项消去, $d(s)$ 是不大于 $(n-1)$ 次的多项式, 故

$$d(s) = d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \dots + d_1s + d_0 \quad (15)$$

令

$$D = [d_0, d_1, \dots, d_{n-1}] \quad (16)$$

则

$$D(sI - A)^{-1}b = d(s)/a(s) \quad (17)$$

这样式(12)可写成

$$\begin{aligned} [1 + F(j\omega I - A)^{-1}b] [1 + F(-j\omega I - A)^{-1}b] &= 1 + \frac{d(j\omega)d(-j\omega)}{a(j\omega)a(-j\omega)} \\ &= 1 + b^*(-j\omega I - A^*)^{-1}D^*D(j\omega I - A)^{-1}b \end{aligned} \quad (18)$$

比较式(5)和(18)得

$$Q = D^*D \quad (19)$$

由式(15)和(19)可知: 选择加权阵 Q 所需要的期望极点数 N 最多不超过 $(n-1)$ 个, 即 $N \leq n-1$ 。这样选择的 Q 是属部分状态反馈情况, 不能保证最优性。为了系统最优性实现, 先取已知 n 个期望极点中 $(n-1)$ 作为零点构造 $d(s)$, 即

$$d(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (s - \lambda_i) \quad (20)$$

而第 n 个期望极点用非主导极点条件检验。若

$$|\lambda_n| \geq 5 |\lambda_i|_{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (21)$$

则 λ_n 不需要调整, 加权阵选为

$$Q' = |\lambda_n|^2 D^*D \quad (22)$$

若式(21)不成立, 则调整 λ_n 为 λ_n' , 以达到

$$|\lambda_n'| \geq 5 |\lambda_i|_{\max} \quad (23)$$

加权阵为

$$Q' = |\lambda_n'|^2 D^*D \quad (24)$$

式(22)和(24)统一写成

$$Q' = \rho D^*D \quad (25)$$

相应的二次型性能指标形为

$$J = \int_0^\infty [\rho x^T Q x + u^2] dt \quad (26)$$

由此可得

定理 可控系统 (A, b) 的 n 个期望闭环极点构成最优控制系统的充分必要条件是至少有一个期望闭环极点满足非主导极点条件。

证明 (略)

对于式 (26) 求最优反馈阵 F , 可采用求解出式 (4) 中的矩阵 P , 然后按式 (3) 计算, 或者对式 (14) 求解出多项式 $p(s)$, 然后按式 (11) 计算。注意, 式 (14) 改变为

$$p'(s)p'(-s) = a(s)a(-s) + \rho d(s)d(-s) \quad (27)$$

三 设计算法及举例

由上节可知, 期望最优控制系统设计特点是, 利用期望闭环极点确定二次型指标中的加权阵, 从而使整个设计流程解析化。现将其算法归纳如下:

- 1、按期望闭环极点幅值, 由小到大排序, 即 $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$;
- 2、取 $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ 构造多项式 $d(s)$ 和定义 D 矢量;

$$d(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (s - \lambda_i)$$

- 3、判断 $|\lambda_n| \geq 5|\lambda_{n-1}|$ 成立与否, 计算 ρ ;
- 4、计算加权阵 $Q' = \rho D^* D$
- 5、求解出 Riccati 代数方程 (4) 中的矩阵 P , 或分解出偶次多项式 (27) 中的多项式 $p'(s)$

- 6、计算最优反馈阵 F [用式 (3) 或者式 (11)]。

设计算法框图如图 1 所示。

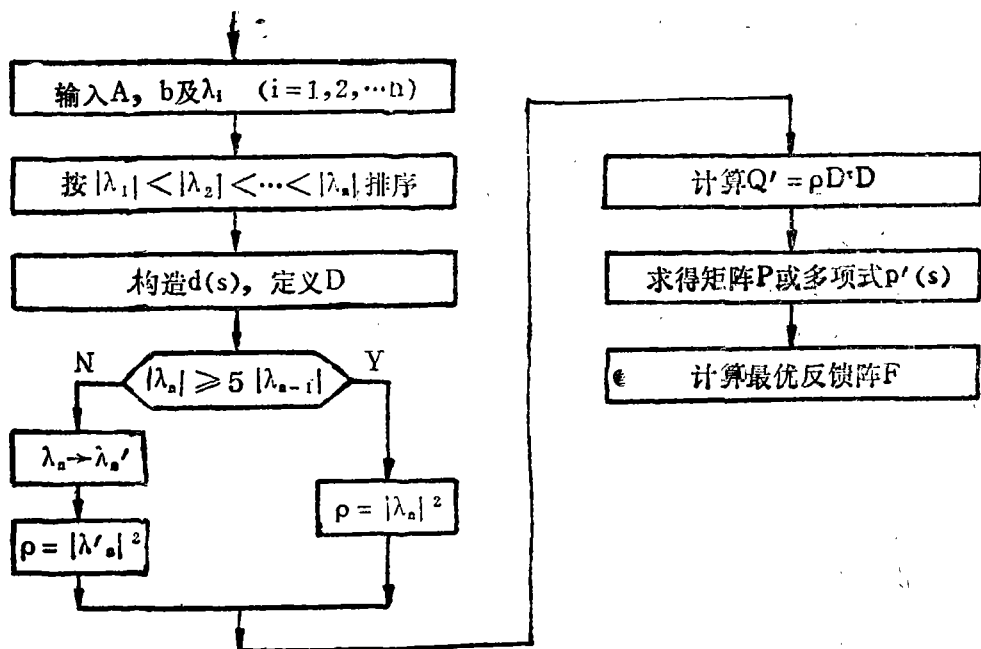


图 1 期望最优控制设计框图

例: 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 期望闭环极点 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, 取 $R = 1$ 。计算最优反馈阵 F 。

构造 $d(s) = s + 1$, $D = [1, 1]$; $|\lambda_2| \geq 5|\lambda_1|$ 不成立, 调整 λ_2 至 $\lambda_2' = -6$, $\rho = |\lambda_2'|^2 = 36$, $Q' = 36 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{相应 } J = \int_0^{\infty} [36(x_1 + x_2)^2 + u^2] dt$$

采用 $p'(s)$ 来计算 F 。分解得 $p'(s) = s^2 + \sqrt{46.14} s + 6$, $F = [5 \sqrt{46.16}]$

四 结 束 语

本文介绍的是单变量系统期望最优设计, 最多只要调整一个极点就能达到。并且其算法便于用CAD实现。对于多变量系统, 若满足解耦条件或能实现对角优势阵, 采用此算法可设计出最优或近似最优控制系统。

本方法的前提是确定好期望闭环极点, 对此问题, 将另文讨论。

参 考 文 献

- [1] Juang J C, Lee T T. On optimal pole assignment in specified region. Int. J. control, 1984; 40(1):65—79
- [2] 王沅, LQ问题加权阵的选择, 信息与控制, 1984; 13(4):7—11
- [3] 石应廉, 曹长修, 多变量系统的最优配置设计方法, 信息与控制, 1984; 13(4):12—16
- [4] 解学书, 最优控制理论与应用, 北京、清华大学出版社, 1986; 329—354
- [5] 王吉红, 苏学成, 按二次型性能指标最优设计系统的一种准解析方法, 信息与控制, 1987; 16(5):19—27
- [6] 王耀青, 吕勇哉, 具有给定闭环极点的最优控制系统的设计, 信息与控制, 1989; 18(3):41—44

Expectant Optimal Control System Design

Lu Baoguang

(Department of Electrical Engineering)

ABSTRACT

In this paper, the concept of expectant optimal control design (EOCD) is defined, then the method selecting weighted matrix in accordance with dominant poles is extended, the algorithm of EOCD that don't use try-and-error method for determining weighted matrix is obtained. This algorithm is convenient to realize by CAD, thus extricate constraint to apply optimal control theory for a class control systems design.