

水力学中若干问题的数值方法

陈 文 英

(建 工 系)

摘 要

本文阐述求解超越方程实根的牛顿法、二分法、迭加法及解常微分方程的改进欧拉法等数值方法在普通水力学的若干问题的电算中之应用,并附相应的计算程序。

作为流体力学一个分支学科的计算流体力学虽然已出现约20年之久,但它主要研究拉普拉斯型、双曲型、抛物型、椭圆型等各种流体力学方程的数值方法,而且主要应用于解决宇航工程、航空工程、大型水利工程等各种复杂的实际问题。但是在与给排水专业或土建专业有关的水力学问题中,除了给水管网的平差及水击计算之外,在其他一般性水力计算中应用电算却尚未普及。近年来国内出版的水力学教材中也很少介绍有关的数值方法和计算程序。为了培养学生逐步熟练应用微机的能力,有必要结合水力学的教学,向学生介绍有关的内容。现通过实例对常用的计算方法在普通水力学中若干问题的应用阐述如下。

1 用牛顿法计算管道阻力系数

管道沿程阻力系数的Colebrook公式(式(1))本适用于光滑管至紊流粗糙管的过渡区,但由于当低雷诺数时,该式右边括号内的第二项值很大,第一项值相对很小,于是该式接近于光滑管公式;又当雷诺数 Re 很大时,该式右边括号内第二项很小,第一项相对很大,则接近于粗糙管公式。所以该式适用范围较广而有一定可取之处。但由于计算时需进行反复试算,使用起来颇为不便,因而值得应用电算。

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{E}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \quad (1)$$

如已知管壁的粗糙突出高度 E ,管径 D ,管中流速 V 及水的运动粘性系数 ν ,即可由上式求得沿程阻力系数 λ 。

现用牛顿法由上式求解 λ :

本文于1989年12月4日收到

设函数 $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 21g(\frac{E}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}) = 0$

现以 x 代替 λ , 则有

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 21g(\frac{E}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{x}}) \quad (2)$$

其导数为

$$F'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2.51}{(\frac{E}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{x}}) \cdot Re \cdot x \sqrt{x} \cdot \ln 10} \quad (3)$$

设 x_i 为 $F(x) = 0$ 方程的根的第 i 次迭代近似值,

第 $i+1$ 次迭代的近似值为 x_{i+1} 。参看图1。

因
$$\frac{F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = -F'(x_i)$$

所以
$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)} \quad (4)$$

如所要求的计算误差不大于 ε , 当满足下式时,

x_{i+1} 即为所求方程的解 (即算出的 λ 值):

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < \varepsilon \quad (5)$$

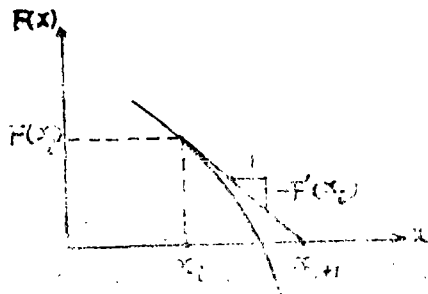


图 1

根据(2)、(3)、(4)、(5)诸式即可编写出程序。

2、用二分法计算梯形断面渠道的临界水深

梯形断面渠道的临界水深应满足下式:

$$1 - \frac{Q^2}{g} \frac{T}{A^3} = 0 \quad (6)$$

式中 Q ——通过渠道的流量 (m^3/s);

g ——重力加速度 (m/s^2);

T ——渠中水深为临界水深时渠道的水面宽度 (m);

A ——渠中水深为临界水深时的过水断面面积 (m^2)。

如以 B 表示渠底宽度 (m), M 表示边坡系数, 显然

$$T = B + 2Mh_c \quad (7)$$

$$A = (B + Mh_c)h_c \quad (8)$$

通常由(6)式手算求解 h_c 时, 多用试算法或图解法, 比较费事, 故可用电算。对式(6), 采用

二分法求方程 $F(x) = 1 - \frac{Q^2 T(x)}{g[A(x)]^3} = 0$ 的根, 较用牛顿法为方便, 因为它可避免后者为寻求 $F'(x)$ 的繁冗计算。

二分法的基本点是假定方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内有根, 而且仅有一个根 x_c 。现取区间中点 $x_c = \frac{1}{2}(a + b)$, 将区间分为两半。假如 $F(x_c)$ 与 $F(a)$ 异号, 则所求的根在 x_c 的左侧, 于是进一步令 $a_1 = a$, $b_1 = x_c$; 如 $F(x_c)$ 与 $F(a)$ 同号, 则所求的根在 x_c 的右侧, 于是令

$a_1 = x_c$, $b_1 = b$ 。由此得出范围缩小后的有限区间 (a_1, b_1) 。再以上述方法对缩小后的区间逐次二分下去, 于无限次后, 区间最终必须缩于一点 x_c , 即为所求的根。实际计算时, 可根据搜索区间的长度及计算精度的要求, 取定有限的二分次数, 求得近似解。

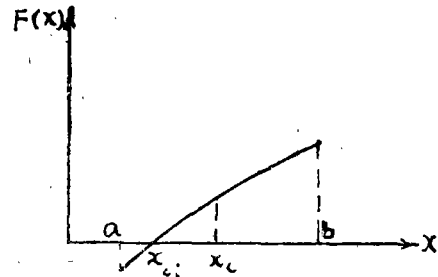


图 2

由此可编写出计算临界水深的程序。如对计算临界水深, 要求相对误差 $\varepsilon \leq 0.001$, 而临界水深搜索区间的起点 (即临界水深的最小值) 为零, 计算表明, 区间长度对达到精度所需的计算次数影响很小, 所以可取计算次数 $i = 30$, 不论区间初值多少都能满足精度要求。

3 用“试算—迭代法”计算梯形断面渠道的正常水深

如已知渠道通过流量 $Q(\text{m}^3/\text{s})$; 渠壁粗糙系数 N , 渠底坡度 I , 渠底宽度 $B(\text{m})$, 边坡系数 M 。现设定一水深 H , 由

$$\text{满宁公式} \quad V = \frac{1}{N} R^{2/3} I^{1/2} \quad (9)$$

$$\text{及} \quad Q = VA = V(B + MH)H \quad (10)$$

可试算出流量 Q 。显然, 通过一次试算得出之流量并不能就等于已知之流量值, 于是需修正 H 值逐次进行迭代计算, 使算得之 Q 逐步逼近已知的 Q 值。

在每次修改 H 值由 H_{i-1} 变为 H_i 时, 可认为: 因 H 值变化不大, 相应的流速 V 之变化很小而将 V 看作为常量。由式 (10) 可知, 在 V 看作为常量时

$$dQ \approx V(B + 2MH)dH$$

令 dQ 等于已知流量 Q 与试算得流量之差, 以它为依据来修正 H 值。于是当进行到第 i 次迭代确定 H_i 时:

$$dH = H_i - H_{i-1}$$

$$dQ = Q - Q_{i-1}$$

$$V_i \approx V_{i-1}$$

代入上式, 则得

$$Q - Q_{i-1} = V_{i-1}(B + 2MH_{i-1})(H_i - H_{i-1})$$

$$\text{从而} \quad H_i = H_{i-1} + \frac{Q - Q_{i-1}}{V_{i-1}(B + 2MH_{i-1})} \quad (11)$$

如果由 H_i 求出 A_i 并由 $Q_i = V_{i-1}A_i$ 算得之 Q_i 值, 满足

$$\left| \frac{Q - Q_{i-1}}{Q} \right| < \varepsilon \quad (12)$$

H_i 即为所求之正常水深, 式中 ε 为允许误差。

按上列诸式可编写出程序。计算表明, 如取允许误差 $\varepsilon = 0.001$, 即便初次设定的 H 值很大, 为实际正常水深之五倍, 用此方法, 在迭代八次后即能收敛到允许误差之内。

4 用改进欧拉法计算由等截面水箱经长度为 L 管径为 D 的管路之非恒定出流

非恒定流计算的能量方程是

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w + \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

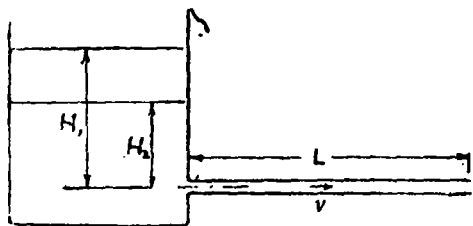


图 3

如有一等截面圆柱形水箱（如图 3 所示），箱中之水经管径为 D 长度为 L 的管路出流。现利用上式计算当水箱中水头由 H_1 降到 H_2 时所需的时间 T 。已知水头为 H_1 时管中流速为 v_0 。

设水箱的瞬时水位为 H ，截面积为 A ，而

$$h_w = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = S v^2 \quad (14)$$

式中 f 为管路沿程阻力系数。于是由 (13) 式得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{L} (H - \frac{v^2}{2g} - S v^2) \quad (15)$$

又由连续性方程，可得

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{v \pi D^2}{4A} \quad (16)$$

由式 (15)、(16) 可联立求解在任一时刻 t 时的 H 和 v 值，从而求出由 H_1 降到 H_2 所需的时间。

对式 (15)、(16) 这样的常微分方程，可采用改进的欧拉格式（预估—校正法）求其数值解，该方法的实质是：如已知方程 $\frac{dH}{dt} = f(H, t)$ 及水头初始值 H_0 ，依次求出 $H = H(t)$ 在一系列离散结点 $t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$ 上的近似值 $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_{i+1}$ ，在由前一个已知值确定相隔一定时间步长后的下一个近似值时，系取区间两个端点上的有关值为依据进行估值。如已知 t_i 时刻的 H_i 值，为确定 $t_{i+1} = t_i + h$ 时刻的 H_{i+1} 之近似值，其步骤如下：

参看图 4，先以 H_i 为依据，从已知点 a 引出斜率为 $\frac{dH_i}{dt}$ 的直线 ab ，相应于取定的时间步长 h 的区间内， a, b 两端点纵坐标的变化为 u_{11} ：

$$u_{11} = h \frac{dH_i}{dt} = h \cdot f(H_i, t_i)$$

暂且将 u_{11} 作为水头 H 的增量，于是得 t_{i+1} 时刻的水头预估值 $\bar{H}_{i+1}$ 为

$$\bar{H}_{i+1} = H_i + u_{11} \quad (17)$$

再以 $\bar{H}_{i+1}$ 为依据，即由 b 点引出斜率为 $\frac{d\bar{H}_{i+1}}{dt}$ 的

直线 $a'b$ ，得出在区间 h 的两个端点 a', b 纵坐标之差为 u_{21} ：

$$u_{21} = h \frac{d\bar{H}_{i+1}}{dt} = h \cdot f(H_i + u_{11}, t_i + h) \quad (18)$$

然后取 u_{11} 与 u_{21} 之平均值作为水头增量而得出 t_{i+1} 时刻之水头近似值 H_{i+1} ：

$$H_{i+1} = H_i + \frac{1}{2} (u_{11} + u_{21}) \quad (19)$$

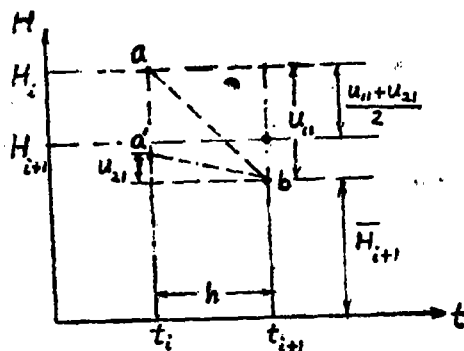


图 4

依上述同样方法可列出 t_{i+1} 时刻的流速近似值式:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(u_{12} + u_{22}) \quad (20)$$

式中 $u_{12} = h \cdot f(v_i, t_i) \quad u_{22} = h \cdot f(v_i + u_{12}, t_i + H)$

根据上述各式即可编制出程序。

本文所列举的数值方法已基本满足普通水力学计算的要求, 凡是普通水力学中需要反复试算的问题均可利用上述的某一种方法编制程序进行电算(例如梯形断面渠道水跃的共轭水深的求算; 溢流坝坝趾收缩水深的求算; 宽顶堰通过流量的求算等等)。现至于环状管网及水击问题的计算, 在许多教材中已有介绍, 兹不赘述。为读者使用方便, 现特将上述有关程序附录于后, 以供参考。

程 序 (一)

Colebrook公式管道沿程阻力系数的计算

```

5 REM JI SUAN ZU LI XI SHU
10 DEF FNA(X)=E/(3.7*D)+2.51/(RE*SQR(X))
20 DEF FNB(X)=1/SQR(X)+2*LOG(FNA(X))/LOG(10)
30 DEF FNC(X)=-.5/(X*SQR(X))-2.51/(FNA(X)*RE*X*SQR(X)*
  LOG(10))
40 READ E, D, V, VIS
50 RE=V*D/VIS
60 IF RE>2100 THEN 80 ELSE X=64/RE
70 GOTO 120
80 X0=.03
90 X1=X0-FNB(X0)/FNC(X0)
100 IF ABS((X1-X0)/X1)<.01 THEN 120 ELSE X0=X1
110 GOTO 90
120 LPRINT "E="; E; "CM"; " "; "D="; D; "CM"; " "; "VIS=";
  VIS; "CM^2/S"; " "; "V="; V; "CM/S"; " "; "LAMBDA="; X1
130 DATA 0.02, 20, 25, 0.01
140 END
E=.02 CM D=20 CM VIS=.01 CM^2/S V=25 CM/S LAMBDA=
2.402075E-02
  
```

程 序 (二)

梯形断面渠道临界水深的计算

```

5 REM JI SUAN LIN JIE SHUI SHEN
10 READ Q, B, M, G
20 DEF FNH(H)=1-Q^2*(B+2*M*H)/(G*((B+M*H)*H)^3)
30 HB=40; HA=0; HC=.5*(HA+HB)
40 FOR I=1 TO 30
50 Y=FNH(HC)
  
```

```

60 IF Y>0 THEN HB=HC ELSE HA=HC
70 HC=.5*(HA+HB)
80 NEXT I
90 LPRINT "Q, B, M, G, HC="; Q; B; M; G; HC
100 DATA 31.2, 10, 1.5, 9.8
110 END
Q, B, M, G, HC=31.2 10 1.5 9.8 .9494776

```

程 序 (三)

梯形断面渠道正常水深的计算

```

5 REM JI SUAN ZHANG CHANG SHUI SHEN
10 READ Q, N, I, B, M, E
20 PRINT "H=";
25 INPUT H
30 A=(B+M*H)*H; P=B+2*H*SQR(1+M*M); R=A/P
40 V=R^(2/3)*SQR(I)/N; Q1=V*A
50 PRINT "H="; H; "Q1="; Q1
60 IF ABS((Q-Q1)/Q)<=E THEN 80 ELSE H=H+(Q-Q1)/(B*
    V+2*V*M*H)
70 GOTO 30
80 LPRINT "Q, N, I, B, M, HO="; Q; N; I; B; M; H
90 DATA 31.2, 0.02, 0.0003, 10, 1.5, 0.001
100 END
Q, N, I, B, M, HO=31.2 .02 .0003 10 1.5 2.058353

```

程 序 (四)

非恒定流水箱出流时间的计算

```

5 REM JI SUAN FEI HENG DING LIU
10 READ A, H1, H2, D, L, F, DT, G, V0
20 C1=G/L; S=F*L/(D*2*G); C2=S+1/(2*G)
30 C3=-3.141593*D*D/(4*A)
40 T=0; V=V0; H=H1
50 OH=H; U11=DT*C3*V; U12=DT*C1*(H-C2*V*V)
60 U21=DT*C3*(V+U12); U22=DT*C1*(H+U11-C2*(V+U12)^2)
70 H=H+.5*(U11+U21); V=V+.5*(U12+U22); T=T+DT
80 PRINT "H="; H; "V="; V; "T="; T
90 IF H<H2 THEN T=T-(H2-H)*DT/(OH-H) ELSE GOTO 50
100 LPRINT "H2="; H; "T="; T
110 DATA 10, 5, 3, 0.2, 300, 0.03, 10, 9.8, 1.46
120 END
H2=3.0013 T=490

```

THE NUMERICAL METHODS AND PROGRAMS FOR SOLVING HYDRAULIC PROBLEMS

Chen Wenying

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT

Solutions of transcendental equations by Newton, bisection and iteration methods and ordinary differential equations by the improved-Euler method for hydraulic calculations are discussed. Several representative programs are recommended.