

建议一种用FEM-BEM耦合 法求解动力问题的新格式

雷 晓 燕

(建 工 系)

摘 要

本文采用Laplace变换方法,分别对动力问题的有限元方程和边界元方程进行Laplace变换,在变换域中进行耦合,该方法与直接在时间域中耦合法相比,奇异积分的阶次大大降低,可用求解静力问题的程序处理奇异积分,因而具有计算简单的优点。文章对耦合中的若干数值问题作了详细的介绍和讨论,并给出了全部计算公式。

关键词: 弹性动力学, 有限元与边界元耦合。

引 言

近年来,已有不少工程技术人员将有限元与边界元耦合的方法用于求解动力学问题,如文献〔1〕~〔3〕,这是因为边界元法具有能精确处理无限域和半无限域中的问题,而有限元法具有快速处理非线性问题的特点,因此将两者结合起来使用,能充分发挥各自的优点,使求解的精度和效率得到大大的提高和改进,这一点,对工程实际应用是有重要意义的。

但过去采用的耦合方法,都是直接在时间域中进行的〔1〕,〔2〕,在直接法中,边界积分方程的位移基本解和面力基本解将出现 r^{-3} 和 r^{-4} 阶次的奇异积分⁽³⁾,在数值计算中,这需要采用特殊的处理技巧,显然,这一方面将使计算变得复杂,另一方面由于涉及到了高阶奇异积分,势必导致计算精度下降。为了克服这一缺点,我们在文中采用了Laplace变换方法,分别对有限元方程和边界元方程进行Laplace变换,在变换域中进行耦合,这种方法使得动力问题的基本解奇异性的阶次与静力问题的奇异性阶次相同,可用求解静力问题的程序处理奇异积分,因而具有计算简单和保证精度的优点。

本文于1989年10月17日收到

一 结构动力学的基本方程

不失一般性, 本文以三维问题为例进行讨论。

以位移分量作为基本未知量的动力学方程为

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{i,jj} + C_2^2 u_{j,ii} + \frac{b_j}{\rho} = \ddot{u}_j \quad (1)$$

式中:

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

初始条件

$$\begin{cases} u_j(\underline{x}, t) = u_j^0(\underline{x}) \\ \dot{u}_j(\underline{x}, t) = \dot{u}_j^0(\underline{x}) \quad \forall t = t_0, \underline{x} \in \Omega + \Gamma \end{cases}$$

边界条件

$$\begin{cases} u_i(\underline{x}, t) = \bar{u}_i(\underline{x}, t) \\ p_i(\underline{x}, t) = \bar{p}_i(\underline{x}, t) \end{cases} \quad \forall t > t_0, \underline{x} \in \begin{cases} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{cases}$$

其中: Γ_1 为给定位移的边界, Γ_2 为给定面力的边界。

不计体力作用, 对 (1) 式作 Laplace 变换, 得到

$$(C_1^2 - C_2^2)U_{i,jj} + C_2^2 U_{j,ii} - s^2 U_j + s u_j^0 + v_j^0 = 0 \quad (2)$$

式中: $U_j = L[u_j(\underline{x}, t)]$

令: $Q_j = s u_j^0 + v_j^0$

(2) 式成为

$$(C_1^2 - C_2^2)U_{i,jj} + C_2^2 U_{j,ii} - s^2 U_j + Q_j = 0 \quad (3)$$

对边界条件也进行 Laplace 变换, 得到

$$\begin{cases} U_i(\underline{x}, s) = \bar{U}_i(\underline{x}, s) & \underline{x} \in \Gamma_1 \\ p_i(\underline{x}, s) = \bar{p}_i(\underline{x}, s) & \underline{x} \in \Gamma_2 \end{cases}$$

二 Laplace 变换域中的基本解

Laplace 变换域中动力方程的基本解为⁽³⁾⁽⁵⁾

$$U_{Kj}^* = \frac{1}{4\pi\mu r} (\psi \delta_{Kj} + \phi r_{,K} r_{,j}) \quad (4)$$

式中: $\psi = G_2 - (F_2 - F_1)$ (5)

$\phi = G_1 - G_2 + 3(F_2 - F_1)$ (6)

$F_m = -\frac{C_2^2}{s^2 r^2} \left(1 + \frac{sr}{C_m}\right) e^{-sr/C_m}$ (7)

$$G_m = -\frac{C_2^2}{C_m^2} e^{-sr/C_m} \quad (8)$$

$$\text{及 } T_{K_i}^* = [\lambda U_{K_i, s}^* \delta_{ij} + \mu (U_{K_i, j}^* + U_{K_i, i}^*)] n_j \quad (9)$$

基本解(4)和(9)中形式上出现了 r^{-3} 和 r^{-4} 项, 为了处理奇异积分, 需要对基本解的奇异性阶次进行讨论, 首先将 e^{-sr/C_m} 展开为级数

$$e^{-sr/C_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{s}{C_m}\right)^n r^n \quad (10)$$

将(10)式代入(7), (8)两式中, 得到

$$F_m = -\frac{C_2^2}{s^2} \left[\frac{1}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \left(-\frac{s}{C_m}\right)^{n+1} r^{n-1} \right] \quad (11)$$

$$G_m = \frac{C_2^2}{C_m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{s}{C_m}\right)^n r^n \quad (12)$$

考察 $(F_2 - F_1)$, 可得

$$F_2 - F_1 = -\frac{C_2^2}{s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \left[\left(-\frac{s}{C_1}\right)^{n+1} - \left(-\frac{s}{C_2}\right)^{n+1} \right] r^{n-1} \quad (13)$$

从(11), (12), (13)式可见, 由(5), (6)两式表达的 ψ , ϕ 都没有奇异性, 因而弹性动力学方程的基本解 $U_{K_i}^*$ 和 $T_{K_i}^*$ 只分别具有 r^{-1} 阶和 r^{-2} 的奇异性, 与弹性静力学基本解的奇异性阶次相同。据此, 可将表达式(5), (6)分解为两部分之和[5], [6]

$$\psi = \psi^s + \psi^d \quad (14)$$

$$\phi = \phi^s + \phi^d \quad (15)$$

$$\text{式中: } \psi^s = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)}, \quad \psi^d = \sum_{n=1}^{\infty} A^n r^n$$

$$\phi^s = \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad \phi^d = \sum_{n=1}^{\infty} B^n r^n$$

$$\text{H} \quad A^n = \frac{C_2^2}{s^2} \left\{ \frac{n+1}{(n+2)!} \left[\left(-\frac{s}{C_1}\right)^{n+2} - \left(-\frac{s}{C_2}\right)^{n+2} \right] + \frac{1}{n!} \left(-\frac{s}{C_2}\right)^{n+2} \right\}$$

$$B^n = \frac{C_2^2}{s^2} \left\{ \frac{n^2-1}{(n+2)!} \left[\left(-\frac{s}{C_1}\right)^{n+2} - \left(-\frac{s}{C_2}\right)^{n+2} \right] \right\}$$

将(14), (15)两式代入(4)中, 可得

$$U_{K_i}^* = U_{K_i}^{(s)} + U_{K_i}^{(d)} \quad (16)$$

式中:

$$U_{K_i}^{(s)} = \frac{1}{4\pi\mu r} (\psi^s \delta_{K_i} + \phi^s r_{, K_i}) \quad (17)$$

$$U_{K_i}^{(d)} = \frac{1}{4\pi\mu r} (\psi^d \delta_{K_i} + \phi^d r_{, K_i}) \quad (18)$$

$U_{K_i}^{(s)}$ 是弹性静力学方程的基本解, 具有 r^{-1} 阶的奇异性, 而 $U_{K_i}^{(d)}$ 是动力效应的附加项, 没有奇异性。同样, 将(16)式代入(9)中, 也可将面力基本解表示为两部分之和

$$T_{Kj}^* = T_{Kj}^{(s)} + T_{Kj}^{(d)} \quad (19)$$

其中:

$$T_{Kj}^{(s)} = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{Kj} + 3r_{,i}r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}r_{,i} - n_{,i}n_{,i}) \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} T_{Kj}^{(d)} = & \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{n=2}^{\infty} B_n r^{n-2} \right) \left(r_{,i}n_{,i} + \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{Kj} + 2r_{,i}r_{,i} - 6r_{,i}r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i}n_{,i} \right) \\ & - \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{n=2}^{\infty} A_n r^{n-2} \right) \left(\delta_{Kj} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i}n_{,i} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i}n_{,i} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{n=2}^{\infty} n B_n r^{n-2} \right) \left(2r_{,i}r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i}n_{,i} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{n=2}^{\infty} n A_n r^{n-2} \right) \left(\delta_{Kj} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i}n_{,i} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i}n_{,i} \right) \quad (21) \end{aligned}$$

且 $r_i = x_i(x) - x_i(\xi)$

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_{,i}}{r}$$

(19)式中的 $T_{Kj}^{(s)}$ 是对应于弹性静力学方程的面力基本解, 具有 r^{-2} 阶的奇异性。 $T_{Kj}^{(d)}$ 是动力效应的附加项, 没有奇异性。

三 奇异积分的处理

由位移基本解(16)知, $U_{Kj}^{(s)}$ 是对应于弹性静力学方程的基本解, 具有 r^{-1} 阶的奇异性, 在数值计算中, 可用座标变换的方法消除奇异性 [8]; $U_{Kj}^{(d)}$ 是动力效应的附加项, 无奇异性, 可用一般的数值方法计算, 如高斯积分法。

由面力基本解(19)知, $T_{Kj}^{(s)}$ 具有 r^{-2} 阶的奇异性, 在计算主对角线上的元素时, 可用给结构一刚体位移的方法计算, 但必须注意的是只有相应于静力部分的 $U_{Kj}^{(s)}$ 能够应用于刚体位移法的计算中; $T_{Kj}^{(d)}$ 是无奇异性的动力附加项, 可用高斯积分法计算。

从上述分析可见, 处理动力问题的奇异积分与处理静力问题的奇异积分方法完全相同, 因此, 可用静力问题的边界元程序来处理动力问题, 这在程序设计上是很容易实现的。

四 Laplace变换域中的边界积分方程

由加权余量法, 可建立Laplace变换域中的边界积分方程

$$C_{ij} U_j + \int_{\Gamma} T_{ij}^* U_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_j^* T_j d\Gamma \quad (22)$$

式中:

$$C_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}/2 & \text{(在光滑边界上)} \\ 1 & \text{(在域 } \Omega \text{ 内)} \end{cases}$$

引进位移和面力插值函数 N , Ψ , 将边界位移和面力表示成节点位移和节点面力的插值形式

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{N} \underline{A} \\ \underline{T} = \underline{\Psi} \underline{P} \end{cases} \quad (23)$$

则(22)式用矩阵的形式表示则为

$$\underline{H} \underline{A} = \underline{G} \underline{P} \quad (24)$$

Laplace变换域中的应力可表示成⁽⁷⁾

$$L(\sigma_{ij}) = - \int_{\Gamma} S_{Kij} U_K d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{Kij} T_K d\Gamma \quad (25)$$

其中:

$$S_{Kij} = \rho [(C_1^2 - 2C_2^2) T_{mK, m} \delta_{ij} + C_2^2 (T_{iK, j} + T_{jK, i})]$$

$$D_{Kij} = \rho [(C_1^2 - 2C_2^2) U_{mK, m} \delta_{ij} + C_2^2 (U_{iK, j} + U_{jK, i})]$$

五 有限元动力方程的Laplace变换

由Hamilton原理, 可建立结构的动力学方程如下

$$\underline{M} \ddot{\underline{a}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{a}}(t) + \underline{K} \underline{a}(t) = \underline{f}(t) \quad (26)$$

其中: \underline{M} , \underline{C} , \underline{K} 分别是系统的质量矩阵, 阻尼矩阵和刚度矩阵, 都是与时间无关的量; $\underline{a}(t)$ 和 $\underline{f}(t)$ 分别是系统的位移向量和荷载向量。

对(26)式进行Laplace变换, 则有

$$(s^2 \underline{M} + s \underline{C} + \underline{K}) \underline{A} = \underline{F} + \underline{Q} \quad (27)$$

其中: $\underline{Q} = \underline{M}(s \underline{A}_0 + \dot{\underline{A}}_0) + \underline{C} \underline{A}$

而 $\underline{A} = L(\underline{a})$, $\underline{A}_0 = L(\underline{a}_0)$

$\dot{\underline{A}}_0 = L(\dot{\underline{a}}_0)$, $\underline{F} = L(\underline{f})$

位移边界条件为

$$\underline{A} = \underline{\bar{A}}(\underline{x}, t) \quad (28)$$

$$\forall t > t_0, \underline{x} \in \Gamma_1$$

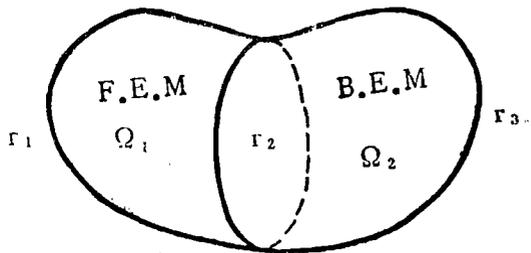
六 动力问题的边界元—有限元耦合

有了变换域中的边界元方程和有限元方程后, 我们即可进行两者的耦合。

考察如图所示的情况, Ω_1 为有限元求解域, Ω_1 的边界为 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$; Ω_2 为边界元求解域, Ω_2 的边界为 $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$, 其中 Γ_2 为耦合界面。在本文中, 我们采用将边界元方程化为等效的有限元方程的方法来进行两者的耦合。

为此将边界元方程(24)式重写如下

$$\underline{H} \underline{A}' = \underline{G} \underline{P} \quad (29)$$



式中： \underline{A}' ， \underline{P} 分别为边界元区域的节点位移和节点面力向量； \underline{H} ， \underline{G} 为包含有基本解积分的系数矩阵。

为了将(29)式化成等效的有限元方程，用 $\underline{R}\underline{G}^{-1}$ 左乘(29)式的两端，并令

$$\begin{cases} \underline{K}' = \underline{R}\underline{G}^{-1}\underline{H} \\ \underline{F}' = \underline{R}\underline{P} \end{cases}$$

则(29)式成为

$$\underline{K}'\underline{A}' = \underline{F}' \quad (30)$$

其中： $\underline{R} = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \underline{N}^T \underline{\Psi} d\Gamma$ ， n 为边界单元总数， \underline{N} ， $\underline{\Psi}$ 分别为位移和面力插值函数。

利用耦合面上位移和力的平衡条件

$$\underline{A} = \underline{A}', \quad \underline{F} + \underline{F}' = 0 \quad (31)$$

即可将(30)式按标准的有限元集成规则迭加到(27)中，至此完成了两者的耦合。

通过求解耦合方程，可得到拉氏变换域内的位移 \underline{A} ，经拉氏逆变换后，可得到时间域内的真实位移，据此可按常规的方法求出有限元域内的应力；或按(25)式求出边界元部分拉氏变换域内的应力。再经反演后，求得真实应力。

七 Laplace 逆变换数值方法

必须指出，上面求得的所有未知量，都是在拉氏变换空间的，为要得到时间域中的真实解，还需要对上述未知量进行拉氏逆变换。比较有效的拉氏逆变换数值方法要属 Durbin 法〔4〕，在这种方法中，先在变换域中对一系列的离散参数

$$s_k = \beta + ik \frac{2\pi}{T} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (32)$$

式中： $i = \sqrt{-1}$

求解，得到某一未知量的一系列对应的离散值，再用文献〔4〕介绍的 Laplace 反演技术，即可求得时间域中的真解。

例如，待求的未知量是节点位移 $\underline{a}(t)$ ，则我们可将时间域分成 N 等分

$$t_j = j\Delta t = j \frac{T}{N} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (33)$$

对于确定的时间 t_j ，我们可以对一系列的 s_k 求解耦合方程，得到一系列的对应值 $\underline{A}(s_k)$ ，则时间域中真实位移可按式求得

$$\begin{aligned} \underline{a}(t_j) &= \underline{L}^{-1}[\underline{A}(t_j)] \\ &\approx \underline{B}(j) \left[-\frac{1}{2} \underline{R}_c \{ \underline{A}(\beta) \} + \underline{R}_c \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\underline{C}(k) + i\underline{D}(k)) \underline{W}^{jk} \right\} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

其中： $\underline{C}(k) = \sum_{L=0}^L \underline{R}_c \left\{ \underline{A}(\beta + i(k + LN) \frac{2\pi}{T}) \right\}$

$$\underline{D}(k) = \sum_{L=0}^L I_n \left\{ A(\beta + i(k + LN) \frac{2\pi}{T}) \right\}$$

$$B(j) = e^{\beta j \Delta t}, \quad W = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

根据计算经验〔4〕，当 $L \times N$ 在50~5000的范围内， β 取值在 $5 \leq \beta T \leq 10$ 的范围内，将有较好的精度。

在实际计算中，我们并不需要对每一个确定的时间 t_i ，都要求解 $L \times N$ 次耦合方程组，我们只需在程序中设置两个数组，将求解 $L \times N$ 次耦合方程组得到的结果存放在数组中，再按(34)式计算，即可得到各个不同时刻的位移 $\underline{a}(t_i)$ 。当我们需要计算许多不同时刻点的动力响应值时，用这种方法将有较高的计算效率。在时间域耦合法中，时间是一步步向前推进的，当计算的时刻点较多且时间域较长时，这种方法的计算效率无疑是较低的。

以上介绍的是在Laplace变换域中进行边界元与有限元耦合的方法是作为一种新观点提出来的，作者在本文中详细讨论了这种方法在数值计算中的可行性。文章还就耦合中有关的几个数值问题展开了讨论，并推导了全部显式计算公式，这些对工程技术人员在比较、选择和应用更有效的数值方法求解实际问题以及编制计算程序时有一定的参考作用。关于该问题的进一步研究作者正在进行中。

参 考 文 献

- 〔1〕陈虬，屈建平，“结构——地基系统动态响应的有限元、边界元耦合分析”，第一届全国计算岩土力学研讨会论文集，1987. 11.
- 〔2〕陈培良，卢盛松，“三维动力基础的边界元分析”，第一届全国计算岩土力学研讨会论文集，1987. 11.
- 〔3〕C. A. Brebbia, "Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.
- 〔4〕Durbin, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms, An efficient improvement to Dubner and Abate's Method", Computer J., 17, 371-374 (1974).
- 〔5〕Kupradze, V. D., 3-D Problems of the Math. Theory of Elasticity and Thermal-elasticity, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, New York and Oxford, 1980.
- 〔6〕张大鸣，叶天麒，“弹性厚板静动力分析的三维边界元法”，第二届全国工程中的边界元会议论文集，Vol.2, 1988.12.
- 〔7〕张向晖，张永元，边界元——拉氏变换法在三维动态裂纹问题中的应用，第二届全国工程中的边界元会议论文集，Vol.1, 1988.12.
- 〔8〕雷晓燕，“有限元——边界元耦合中的几个问题”，《上海铁道学院学报》№2, 1988.
- 〔9〕雷晓燕，“有限元与边界元耦合法的数值计算”，《西南交通大学学报》，№4, 1989.

A New Technique of Solving Dynamic Problems by Coupling Finite Elements with Boundary Elements

Lei Xiaoyan

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT

In the paper, using Laplace transform, we respectively transform finite element equation and boundary element equation, and then couple them together. Compared with other methods which are coupled in time domain, this method can greatly reduce the order of singular integrals, so it can be treated by elastic statics program. Therefore, the method has the advantage of computation simplicity. The paper also comprehensively introduces and discusses several numerical problems in the process of coupling, and present all computational formulas.

Keywords: Elasto-dynamics, Coupling finite element with boundary element.