控 制 临 界 图

于 崇 智

（基 础 课 部）

摘 要

一个顶点集S称为图G的控制集，如果对每一个$v\bar{\in}S$，有一个顶点$u\in S$，使u与v邻接。任何这样的控制集的最小基数称为G的控制数，记为$\gamma(G)$。对G中每一对不连接的顶点u，v，有$\gamma(G+uv)<\gamma(G)=k$，称G是k-γ临界图。本文研究k-γ临界图的一些性质，特别对3-γ临界图得到下列结果：

（1） 对直径为3的3-γ临界图证明了Sumner猜想，即$\gamma(G)$等于G的独立控制数；

（2） 任何一个正则3-γ临界图，其直径必为2。

引 言

本文所讨论的图均为简单图。文中没有定义的概念和符号见〔1〕。

图G中有一条边连接顶点u，v，则称顶点u,v是邻接的，记为$uv\in E$，否则记为$uv\bar{\in}E$。

设G是一个图，S是顶点集$V(G)$的一个非空子集。若对每一个$v\bar{\in}S$，存在$u\in S$，使$uv\in E$，则称S是G的一个控制集（Domination set）。任何这样的控制集的最小基数称为G的控制数（Domination number），记为$\gamma(G)$。若$\gamma(G)=k$，对任何u，$v\in V(G)$，且$uv\bar{\in}E$，使

$$\gamma(G+uv)=k-1$$

则称G为k-γ临界图。

我们用$N(v)$表示顶点v的邻域。

本文于1989年12月4日收到

—

对k-γ临界图，我们有如下一些性质定理：

定理1 设G为一个k-γ临界图，若u，v是G中任何二个不相邻接的顶点，则$V(G)$中必存在一个集合S，$|S|=k-2$，使$S\cup\{v\}$控制$G-u$或者$S\cup\{u\}$控制$G-v$。

证明 G为$k-\gamma$临界图。在G中，$uv\bar{\in}E$，所以

$$\gamma(G+uv)=k-1,$$

在$G+uv$中至少存在一个基数为$k-1$的顶点集S'控制$G+uv$。

如果u，$v\in S'$或者u，$v\bar{\in}S'$，则S'不仅控制了$G+uv$，还控制了G，这与$\gamma(G)=k$矛盾。故u，v中有且仅有一点属于S'。不失一般性，设$v\in S'$，令

$$S=S'-\{v\},$$

则$|S|=k-2$。因为S'控制$G+uv$，即$S\cup\{v\}$控制$G+uv$。若存在$t\in S$，使$tu\in E$，则$S\cup\{v\}$控制G，这与$\gamma(G)=k$矛盾。所以在$G+uv$的S中没有一点和u邻接，故在G中

$$N(u)\cap S=\phi,$$

且u与$S\cup\{v\}$中的任何一点不相邻接，所以，$S\cup\{v\}$控制$G-u$。

下一个定理说明从k-γ临界图的任一顶点出发，一定可以找到一个包含它的顶点集S，$|S|=k$，使S控制G。

定理2 若G为k-γ临界图，u是G中任一顶点，则$V(G)$中必存在一个集合A，$|A|=k-1$，使$A\cup\{u\}$控制G。

证明 已知$\gamma(G)=k$，当$k\geqslant 2$，对任$u\in V(G)$，有

$$d_G(u)\leqslant|V(G)|-k,$$

这里$d_G(u)$表示u在G中的度数，所以至少存在一点$v\in V(G)$，使$uv\bar{\in}E$。

由定理1，存在$S\subset V(G)$，$|S|=k-2$，使$S\cup\{u\}$控制$G-v$或者$S\cup\{v\}$控制$G-u$。不管何种情况，$S\cup\{u,v\}$控制G。取$A=S\cup\{v\}$。即证。

度数为1的点称为悬挂点。〔2〕中证明了任何3-γ临界图G中没有两个悬挂点有相同的邻点。这个结论可以推广到一般的k-γ临界图。

定理3 任何一个k-γ临界图中没有两个悬挂点有相同的邻点。

证明 设G为k-γ临界图，a，b为G的悬挂点，v是它们的公共邻点，$ab\bar{\in}E$。由定理1，存在$S\subset V(G)$，$|S|=k-2$，使$S\cup\{a\}$控制$G-b$。显然$v\bar{\in}S$，那么$S\cup\{v\}$必控制G，与$\gamma(G)=k$矛盾。

对k-γ临界图，悬挂点个数有多少呢？

定理4 当$k\geqslant 2$时，任何k-γ临界图至多有k个悬挂点。

证明 设G为一个k-γ临界图，$k\geqslant 2$，G包含$k+1$个悬挂点$x_i(i=1,2,\cdots,k+1)$。从定理3知，没有二个悬挂点有相同的邻点，故设G中与悬挂点x_i相邻接的顶点为$y_i(i=1,2,\cdots,k+1)$，且当$i\neq j$时，$y_i\neq y_j$。因为图的任何一个控制集S必控制顶点x_i，故悬挂边x_iy_i的两个端点至少有一个要属于S，则$|S|\geqslant k+1$。这与$\gamma(G)=k$矛盾。

二

Sumner在〔2〕中提出如下猜想：

〔猜想〕若G是临界的，则$\gamma(G)=i(G)$。

这里$i(G)$表示G的独立控制数，它定义为G的控制集中的点均不相邻的最小基数。对直径为3的3-γ临界图，我们证明猜想成立。

在证明定理前，先介绍一个记号。对3-γ临界图G，如果u,v,w是G的顶点且u,v控制G-w，则记为$[u,v]\rightarrow w$。

引理1 设G是一个3-γ临界图，S是一个顶点个数为$n\geqslant 4$的独立集，则S中的顶点能排序为$a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得在G-S中存在一条路$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，且$[a_i, x_i]\rightarrow a_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$。

引理2 3-γ临界图的直径至多为3。

这两个引理的证明详见〔2〕。

引理3 设G是直径为3的3-γ临界图，设u，v是G的一条直径的两个端点，若记

$$A=G-N(u)\cup N(v)\cup\{u,v\},$$

则A是完全图。

证明 从直径定义知

$$N(u)\cap N(v)=\phi。$$

$A\neq\phi$。若不然，$\{u,v\}$控制G，与$\gamma(G)=3$矛盾。

若A不是完全图，则至少存在$a, b\in A$，使$ab\bar{\in}E$。因为u，v与A中任何一点不邻接，$\{u,a,b,v\}$为G的一个独立集，记为S。由引理1，可将S中的顶点编序为

$$u,\ a,\ v,\ b。$$

因为$ua\bar{\in}E$，存在$x\in V(G)$，使$[u, x]\rightarrow a$。在G中，u控制$N(u)$，故x至少要和$V(G)-N(u)\cup\{u, a\}$中的任何一点相邻接。同理，因为$vb\bar{\in}E$，存在$y\in V(G)$，使$[v,y]\rightarrow b$。y至少要和$V(G)-N(v)\cup\{v,b\}$中的任何一点相邻接。

因为$N(u)\cap N(v)=\phi$，所以$\{x,y\}$控制G，与$\gamma(G)=3$矛盾，故证。

定理5 若G是直径为3的3-γ临界图，则$i(G)=3$。

证明　G是3-γ临界图，由控制数定义，$V(G)$中不可能存在一个基数小于3的独立集S来控制G。只要在G中能找到一个基数为3的独立集S，且S控制G，则证明了定理。

由引理3，若u,v是G中一条直径的两个端点，记

$$A=G-N(u)\cup N(v)\cup\{u,v\},$$

则A是非空的完全图。故在A中任取一点w，则$\{u,v,w\}$是G的独立集，且控制G。

三

引理2说明3-γ临界图的直径至多为3。因为3-γ临界图不是完全图，它的直径不等于1，因此只能取值2或3。但究竟什么样的3-γ临界图有直径2或直径3，是一个值得研究的问题。对此，有下面二个定理。

定理6 设G是3-γ临界图，若G是k正则图，则G的直径为2，即$\mathrm{diam}(G)=2$。

证明 设$\mathrm{diam}(G)=3$，则G中至少有一条长为3的路。设端点为u,v。由引理3知

$$A=G-N(u)\cup N(v)\cup\{u,v\}$$

是完全图。

因为$uv\notin E$,由定理1,不失一般性，存在$x\in V(G)$，使〔u，x〕→v。显然$xv\notin E$，故$x\notin N(v)$。若$x\in N(u)$，因u与$N(v)\cup A$中任何一点不相邻接，x必控制$N(v)\cup A$。但

$$d_G(v)=|N(v)|=k,$$

$A\neq\phi$，所以$d_G(x)\geqslant k+1$，与G为正则图矛盾。

若$x\in A$，x仍控制$N(v)\cup A$，因为

$$d_G(x)=k=|N(v)|,$$

所以A为单点集$\{x\}$。显然x与N(u)中任何一点不邻接。在N(u)中任取一点y，$xy\notin E$，故存在w，使〔x,w〕→y或者〔y,w〕→x。

当〔x,w〕→y，如果$w=v$或$w\in N(v)$，u不被x,w控制,矛盾。如果$w=u$或$w\in N(u)$，v不被x,w控制，同样矛盾。

当〔y,w〕→x，$wx\notin E$,故$w\notin N(v)$。若$w=u$或$w\in N(u)$，v不被y,w控制，矛盾。若$w=v$，y必须控制$N(u)\cup\{u\}$。因为

$$d_G(y)=k=|N(u)\cup\{u\}-\{y\}|,$$

y不和N(v)中任何一点相邻接。由y的任意性，故不存在一条从u到v的道路，与假设矛盾。证毕。

对有悬挂点的3-γ临界图，有

定理7 若G是含有悬挂点的3-γ临界图，则$\mathrm{diam}(G)=3$。

证明 从定理4知，G至多包含3个悬挂点。当G有2个或3个悬挂点时，因为每个悬挂点的邻点不同，任二悬挂点的距离不等于2。当G只含有1个悬挂点时，设悬挂点为a，它的邻点为u，若$\mathrm{diam}(G)=2$，则对任$v\in V(G)-\{a,u\}$，$uv\in E$，那么{u}控制G，与$\gamma(G)=3$矛盾。

参考文献

〔1〕 J.A 邦迪 和 U.S.R 默蒂著，吴望名等译.《图论及其应用》，科学出版社，1984.

〔2〕 D.P.Sumner and P.Blitch. Domination Critical Graphs, Journal of Combinatorial Theory Series B, vol 34（1983） 65-76.

Domination Critical Graphs

Yu Chongzhi

(Department of Basic)

ABSTRACT

A set of vertices S is said to dominate the graph G if for each $v \bar{\in} S$, there is a vertex $u \in S$ with u adjacent to v. The smallest cardinality of any such dominating set is called the domination number of G and is denoted by $\gamma(G)$. For each u, $v \in V(G)$ with u not adjacent to v, $\gamma(G+uv) < \gamma(G) = k$, G is k-γ critical graph. In this paper, some properties of k-γ critical graphs are studied. Particularly, following results in 3-γ critical graphs are shown:

(1) For 3-γ critical graph G, we show the Sumner conjecture if G has diameter 3.

(2) The diameter of every regular 3-γ critical graph is 2.