Silverman和Silvia结果的一点注记

潘天骥　魏寒柏　　　　凌鄂生

（九　江　师　专）　　　（华东交通大学）

摘　要

本文是Silverman和Silvia文〔1〕中的解析函数族的包含性质的一点补充。

引　言

设$f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$在单位圆$\Delta$：$|z|<1$内解析。以$f\prec g$表示$f(z)$从属于$g(z)$，即存在$\Delta$内的解析函数$w(z)$，满足$w(0)=0$，$|w(z)|<1$，使得函数$f(z)=g(w(z))$。又以$S^*(a,b)$表示满足

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-a\right|<b \qquad (z\in\Delta,\ a>b) \tag{1}$$

的$f(z)$的全体。以$k(a,b)$表示满足

$$\left|\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)-a\right|<b \qquad (z\in\Delta,\ a>b) \tag{2}$$

的$f(z)$的全体。以$S^*[A,B]$表示满足

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z\in\Delta,\ -1<B<A\leqslant1) \tag{3}$$

的$f(z)$的全体。以$k[A,B]$表示满足

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z\in\Delta,\ -1<B<A\leqslant1) \tag{4}$$

的$f(z)$的全体。此处a，b，A，B均为常数，对（1）、（2）除$a>b$外显然还有$|1-a|<b$。

Silverman和Silvia在文〔1〕中研究了函数族$S^*(a,b)$、$k(a,b)$、$S^*[A,B]$、$k[A,B]$，其中得到了包含性质：$k(a,b)\subset S^*(a,b)$及$k(A,B)\subset S^*[A,B]$。本文对此结果作了进一步的加强。

本文于1989年11月21日收到

主要结论及其证明

我们首先叙述下列引理

引理1 [2] 设$h(r,s,t)$: $c^3\to c$满足下列条件:

(i) $h(s,t,r)$在区域$D\subset c^3$内连续

(ii) $(a_1,0,0)\in D$, 且$|h(a_1,0,0)|<J$

(iii) 当$(Je^{i\theta},ke^{i\theta},L)\in D$, $k\geqslant J\lambda$和$R_e(Le^{-i\theta})\geqslant k(\lambda-1)$时, $|h(Je^{i\theta},ke^{i\theta},L)|\geqslant J$。

(此处$|a_1|<J$, $\lambda=n\cdot\dfrac{J-|a_1|}{J+|a_1|}$, $J>0$, L为实数)

若$p(z)=a_1+w_nz^n+w_{n+1}z^{n+1}+\cdots$在$\Delta$内解析, $p(z)\not\equiv a_1$, 且$(p(z),zp'(z),z^2p''(z))\in D$及$|h(p(z),zp'(z),z^2p''(z))|<J$ $(z\in\Delta)$

则 $|p(z)|<J$。

引理2 [1], (i) $S^*(c,d)\subset S^*(a,b)\Longleftrightarrow|a-c|\leqslant b-d$

(ii) $S^*[C,D]\subset S^*[A,B]\Longleftrightarrow|AD-BC|\leqslant(A-B)-(C-D)$

(注: 若上两式的不等号成立, 则有严格的包含关系)

定理1 $k(a,b)\subset S^*(a,b_1)\subset S^*(a,b)$此处$|1-a|<b_1<b$及$b_1$满足

$$\frac{b_1}{b}\left(1+\frac{b_1-|1-a|}{b_1+|1-a|}\cdot\frac{a-b_1}{(a+b_1)^2}\right)=1 \tag{5}$$

证明: 设$f(z)\in k(a,b)$, 记$p(z)=\dfrac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-a}{b_1}$, $p(0)=\dfrac{1-a}{b_1}\triangleq a_1$ 则

$p(z)=a_1+w_1z+w_2z^2+\cdots$

及 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}=a+b_1p(z)$, 对此式取对数求导得

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=a+b_1p(z)+\frac{b_1zp'(z)}{b_1p(z)+a} \tag{6}$$

又因$f(z)\in k(a,b)$ 即 $\left|(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-a\right|<b$ 从(6)得

$$\left|\frac{b_1}{b}\left(p(z)+\frac{zp'(z)}{b_1p(z)+a}\right)\right|<1 \tag{7}$$

令$h(r,s,t)=\dfrac{b_1}{b}\left(r+\dfrac{s}{a+b_1r}\right)$, 显然$h(r,s,t)$在$D=\left(c-\left\{-\dfrac{a}{b_1}\right\}\right)\times c\times c$内连续

(c为复平面), 即引理1中条件(i)满足。又$|h(a_1,0,0)|=\left|\dfrac{b_1}{b}a_1\right|=\left|\dfrac{1-a}{b}\right|<1$, 取$J=1$,

即引理1中条件(ii)满足, 现证$h(r,s,t)$满足引理1的条件(iii)。

因$\lambda=1\cdot\dfrac{1-|a_1|}{1+|a_1|}=\dfrac{b_1-|1-a|}{b_1+|1-a|}$故当$k\geqslant J\lambda=\lambda$及 $(Je^{i\theta},ke^{i\theta},L)\in D$时 $(J=1)$,

$$\left|\frac{b_1}{b}\left(Je^{i\theta}+\frac{ke^{i\theta}}{a+b_1Je^{i\theta}}\right)\right|=\left|\frac{b_1}{b}\left(1+\frac{k}{a+b_1e^{i\theta}}\right)\right|=\left|\frac{b_1}{b}\left[1+\frac{k(a+b_1e^{-i\theta})}{|a+b_1e^{i\theta}|^2}\right]\right|$$

$$\geqslant\left|\frac{b_1}{b}\left[1+\frac{k(a+b_1\cos\theta)}{|a+b_1e^{i\theta}|^2}\right]\right|\geqslant\frac{b_1}{b}\left(1+\frac{\lambda(a-b_1)}{(a+b_1)^2}\right)=1\quad(\text{由(5)式及 }\lambda=\frac{b_1-|1-a|}{b_1+|1-a|})$$

即证$h(r,s,t)$满足引理1中条件(i)，(ii)，(iii)，又由（7）式知

$$|h(p(z)),zp'(z),z^2p''(z)|<1$$

由引理1得　$|p(z)|<1$

即

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-a\right|<b_1$$

即　$f(z)\in S^*(a,b_1)$

$\Longrightarrow$　$k(a,b)\subset S^*(a,b_1)$

又$|a-a|=0<b-b_1$，由引理2得

$$k(a,b)\subset S^*(a,b_1)\subset S^*(a,b)$$

且　$S^*(a,b_1)\neq S^*(a,b)$

（注：满足（5）式的b_1是显然存在的）

定理2：$k[A,B]\subset S^*[A_1,B_1]\subset S^*[A,B]$（若记$a=\frac{1-AB}{1-B^2}$，$b=\frac{A-B}{1-B^2}$，且$b_1$为定理1所定，则在此处有$A_1=\frac{b_1^2-a^2+a}{b_1}$，$B_1=\frac{1-a}{b_1}$）

证明：记$a=\frac{1-AB}{1-B^2}$，$b=\frac{A-B}{1-B^2}$，由文[1]有$S^*[A,B]\equiv S^*(a,b)$，$k[A,B]\equiv k(a,b)$

$$S^*[a,b]\equiv S^*\left[\frac{b^2-a^2+a}{b},\ \frac{1-a}{b}\right]$$，则由定理1有

$$k[A,B]\equiv k(a,b)\subset S^*(a,b_1)\equiv S^*\left[\frac{b_1^2-a^2+a}{b_1},\ \frac{1-a}{b_1}\right]$$，此处b_1由定理1所定。

又记$A_1\overset{\Delta}{=}\frac{b_1^2-a^2+a}{b_1}$，　$B_1\overset{\Delta}{=}\frac{1-a}{b_1}$

此即

$k[A,B]\subset S^*[A_1,B_1]$

现证$S^*[A_1,B_1]\subset S^*[A,B]$，且$S^*[A_1,B_1]\neq S^*[A,B]$　因

$$|A_1B-AB_1|=\left|\frac{b_1^2-a^2+a}{b_1}\cdot\frac{1-a}{b}-\frac{b^2-a^2+a}{b}\cdot\frac{1-a}{b_1}\right|$$

$$=\frac{|1-a|}{bb_1}|b_1^2-b^2|=\frac{|1-a|}{bb_1}(b^2-b_1^2)\tag{8}$$

$$(A-B)-(A_1-B_1)=\left(\frac{b^2-a^2+a}{b}-\frac{1-a}{b}\right)-\left(\frac{b_1^2-a^2+a}{b_1}-\frac{1-a}{b_1}\right)$$

$$=\frac{1}{bb_1}(b-b_1)[bb_1+(1-a)^2] \tag{9}$$

又

$$|1-a|(b+b_1)-b_1b-(1-a)^2=|1-a|b-bb_1+|1-a|b_1-|1-a|^2$$
$$=(|1-a|-b_1)b-(|1-a|-b_1)(|1-a|)=(|1-a|-b_1)(b-|1-a|)<0$$

(因 $|1-a|<b$, $|1-a|<b_1$)

由 (8)、(9) 得

$$|AB_1-A_1B|<(A-B)-(A_1-B_1)$$

由引理 2 得

$$S^*[A_1,B_1]\subset S^*[A,B] 且 S^*[A_1,B_1]\neq S^*[A,B]$$

即 $k[A,B]\subset S^*[A_1,B_1]\subset S^*[A,B]$。

参 考 文 献

〔1〕 H. Silverman and E. M. Silvia, Subclasses of Starlike Functions Subordinate to Convex Functions, Can. J. Math. Vol XXX V11, No1, 1985: 48～61.

〔2〕 S. S. Miller and P. T. Mocanu, Second order Differential Inequalities in the Complex Plane, J. Math. Anal. Appl. 65, 1978: 289～305.

A NOTE ON THE RESULT OF SILVERMAN AND SILVIA

Pan Tianchi Wei Hanbai (Jiu Jiang Teacher's College)

Ling Esheng (East China JiaoTong University)

ABSTRACT

In this note, the authors obtain the Containment properties of some classes of analytic functions in [1].