

对“齿轮传动稳态过程动载荷计算与分析”几个主要问题的商榷

左 美 森

(机 械 系)

摘 要

“齿轮传动稳态过程动载荷计算与分析”一文，(刊于1986年《华东交通大学学报》第一期，作者王中庆，以下简称“齿文”)，我们认为有不少基本概念问题值得商榷。现试从六个方面进行讨论。

一 齿轮传动系统的振动特性问题

“齿文”的研究对象是齿轮传动系统。原文说“一对齿轮传动的运动特性属于非线性系统的振动问题，并非是一个简单的单自由度振动系统所能描述的。”我们同意这一众所周知的观点。问题在于原文所提的“一对齿轮副的传动，可简化为如图6的动态非线性振动模型来研究。”是怎么简化的？先看原文图6、图7：

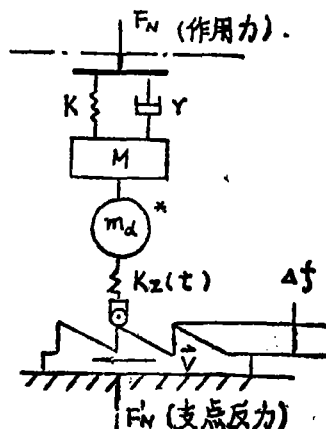
1、图中所示的 m_d ，作者说是“啮合系统冲击有效质量”；并注明“表示虚构质量意义”；在“齿文”式(11)中说：“ m_d 可由式中： $1/m_d = 1/m'_1 + 1/m'_2$ ”求出。可是从量纲上看，原式(11)等式两边是不一致的，怎能求出 m_d ？所谓“系统等效质量 M ”，它是没有运动的质量？它与 m_d 的区别何在？所谓“虚构质量 m_d ”，它贯穿于全文的力学公式推导过程中，但始终未提出是怎样“虚构”的质量？图中“楔块”在作速度 V 的运动，“作用于‘质量——弹簧’系统，”但“楔块”本身没有质量，怎能有运动？

力学模型是通过科学抽象而建立的理想客体。在力学抽象中，物体的质量(m)和刚度(K)分别是物体惯性和弹性大小的量度，这种本质因素是不能抽象掉的。“没有运动的物质和没有物质的运动是同样不可想象的”。⁽¹⁾

2、“齿文”说：“一对齿轮的传动过程的振动特点属于两个‘质量——阻尼——

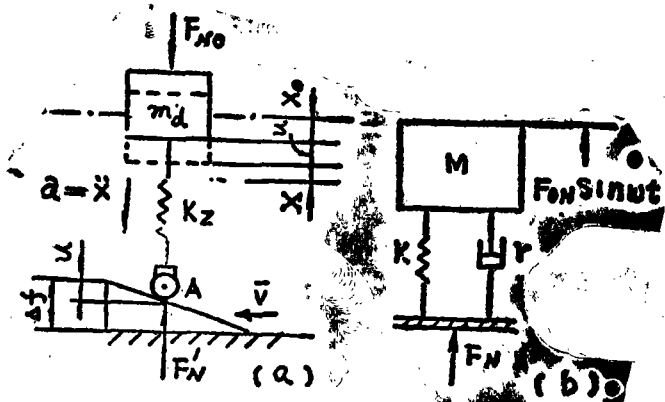
本文于1989年9月10日收到。 本文是多人合作撰写一作者

弹簧’系统的机械耦合性质。”我们认为齿轮副传动系统可简化为一个在忽略质量的两根轴上带有二个集中惯性体（即齿轮刚体）的系统，这种系统属于二个自由度的有阻尼的受迫扭转振动系统。在50年代国际齿轮界就曾用过‘质量、弹簧’系统来分析齿轮的动载荷。“齿文”中没有说明如何将扭转振动“转化”为直线振动？更没有“等效刚度”“等效粘性阻尼系数”的非线性。必须指出，在非线形振动模型中，或刚度或阻尼或二者均为非线性的。⁽³⁾所以原图6的“简化”振动模型是不妥的。原文进而在推导“物块 m_d 的位移量 u ”时又用的是匀加速运动中的位移公式： $u = \frac{1}{2}at^2$ 《式(1)》这就更使人难以接受他的“简化”了。



原图6 齿轮副等效模型

K_z : 轴系和轴承等效刚度 m_d : 啮合系统冲击有效质量 F_{N0} : 表示作用在 m_d 上的初始力。
 γ : 系统等效粘性阻尼系数 M : 系统等效质量 x_0 : 表示 m_d 的初位移。
 K_2 : 啮合刚度 Δf : 相对运动有效误差值

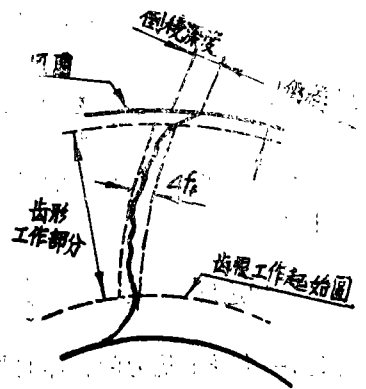


原图7 传动副啮合系统的运动情况。

3、“齿文”说：“误差的影响相当于在弹簧端部插入薄的楔形块作用”。由于切齿加工中分度运动的高频误差、刀具的窜动、刀具安装及刀具本身的齿形误差等诸因素引起的齿轮齿形误差 Δf_t （如右图所示）是影响齿轮传动平稳性、噪声、振动的主要因素之一。但是，其误差规律用简单的“楔块”作用是不可代替的。试想原图7中所示的没有质量的“楔块”以速度 V 线性移动怎能使“虚构质量 m_d ”产生加速度？

可以假设齿轮材料本身符合线性弹性；在齿轮传动过程中存在着非线性阻尼力和非线性弹性恢复力；由于几何上或结构上的原因，如齿形误差、变刚度和变阻尼的存在，还会出现几何非线性和激振力非线性。非线性和随机问题处理的理论与确定的线性振动理论有很大差别。

“齿文”根本没有涉及非线性问题，也没有考虑各种激振因素。“齿文”是要“说明一对齿轮副传动的特性属于非线性系统的振动问题”而避开这二者是不可思议的。

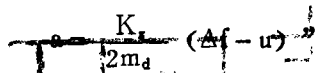


二 关于牛顿第二定律和胡克定律的用法问题

“齿文”从图7(a)所示的“力学模型”出发，作数学推导，原文为：“在时间 t 内，楔块向左运动，使物块 m_d 移动 u 距离，弹簧所受的力平均减少 $\frac{1}{2}K_z(\Delta f - u)$ ，那么物块 m_d 产生的惯性力为：

$$m_d a = -\frac{1}{2} K_z (u - \Delta f)$$

产生的加速度



按此，“在时间 t 内”，有某种外力，推动着楔块向左运动，又使物块 m_d 移动 u 距离，再拉伸或压缩弹簧，然后又使 m_d 产生惯性力。就是说这种力使三个物体产生三种运动和一个惯性力。这样就使人觉得这外力是“奇特”的力了。我们认为：（1）要使“物块 m_d 产生惯性力”，按牛顿第二定律，惯性力 $F = ma$ ，离不开加速度 a ，“使物块 m_d 移动 u 距离”不可能“产生惯性力”。（2）“在时间 t 内”，使楔块运动，物块 m_d 位移，弹簧受压缩或拉伸，按原图7(a)的这个系统内是并不存在着改变 m_d 运动速度的瞬时力，物块 m_d 也不可能“产生惯性力”的。（3）把一个物体的惯性力与自身弹性力的 $1/2$ 等同起来，也是不能成立的。可见“齿文”在这里与牛顿第二定律、胡克定律的概念相悖。

原文在图6中指明：“ K_z ：啮合刚度； m_d ：啮合系统冲击有效质量”（注明中说：虚构质量）研究“传动副啮合系统”（图7文字指明）。既是系统就应该把“啮合系统”作为一个实体来看待，这个实体的质量和刚度用 m_d 和 K_z 来表示，原图7(a)则描述了“啮合系统”这个实体的振动模型。这个力学模型实际可看作是瞬时位移 x 用 $(\Delta f - u)$ 来表示的由一个质量中心 m_d 和弹簧 K_z 构成的单自由度无阻尼振动系统。但是原文在推导求加速度的公式时却把“啮合系统”的 m_d 和 K_z 这两个物理量变成为“物块”和“弹簧”两个独立存在的实体，并同时把它们置于万有引力场和弹性力场，把产生的惯性力与弹性力的 $1/2$ 等同起来，即

$$m_d a = -\frac{1}{2} K_z (u - \Delta f)$$

$$a = \frac{K_z}{2m_d} (\Delta f - u)$$

试想已知“啮合系统”的质量为 m_d 、刚度为 K_z ，则“啮合系统”的固有频率 $\omega^2 = K_z/m_d$ ，代入上式得：

$$\text{加速度} \quad a = \frac{1}{2} \omega^2 (\Delta f - u)$$

就是说，一个受干扰力的物体的加速度与固有频率的平方成正比，而与作用在物体上的外力无关？再说用匀加速公式 $s = \frac{1}{2} a t^2$ 来求振动中的瞬时微幅位移 u 也是不妥的。原文说：“齿形误差

相当模块”并用图 5 (未标明出处)来证实:“误差形状产生的‘动载荷’也是为最大。”“楔块向左运动,使物块 m_d 移动距离 u ”,这个 u 应该是瞬时微幅位移 x ,这个位移应该按牛顿第二定律: $F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ 求解。“齿文”原文:

$$\text{“等效物块 } m_d \text{ 移动距离 } u \text{ 可由下式求出: } u = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{K_z (\Delta f - u)}{4 m_d} t^2 \text{”}$$

根据此,若将固有频率 $\omega^2 = K_z/m_d$ 代入,将得出“物块 m_d 移动距离 u ”为:

$$u = \frac{1}{4} \omega^2 t^2 (\Delta f - u)$$

这就是说,一个物体的运动位移,或者说一个物体振动瞬时位移与固有频率的平方成正比,而与速度、加速度无缘?之所以这样不可思议,可以用《理论力学》⁽²⁾中的一句话以蔽之:“动力学问题在原则上是不同于静力学问题的,没有任何工具或方法可以把动力学现象的研究归结为静力学的研究”。而“齿文”却以静力学方法来“研究”所谓的齿轮系统振动问题是完全站不住脚的。

三 关于能量守恒定律的概念问题

“齿文”称:

“啮合弹簧中最大的动载荷可由这个啮合系统的能量守恒关系来求出。 F_{n0} 作用力所作的功”:

$$F_{n0}(u+X) = K_z X_0(u+X)$$

弹簧A端的反作用力 $F'_A = K_z X_0 - \frac{1}{2} K_z (\Delta f - u)$, 在此区间这个力所做的功等于:

$$F'_A \Delta f = [K_z X_0 - \frac{1}{2} K_z (\Delta f - u)] \Delta f$$

“弹簧的应变能应该等于外力所作的功,即 $U = W$ 可得: $X_{max} = X_0 + \sqrt{\Delta f (\Delta f - u)}$... (3)”

这一段有几个概念问题

(1) 假设图 7 (a) 是由一个质量可以忽略而刚度为 K_z 的弹簧实体和一个质量为 m_d 的绝对刚度体形成的系统,则其自由振动的运动微分方程为:

$$m_d \frac{d^2 x}{dt^2} = -K_z X$$

设系统扰动后质量的瞬时位移为: $x = A \sin(\omega t + \beta)$, 瞬时速度为: $v = A \omega \cos(\omega t + \beta)$ 系统的一部分能量是势能(以 Π 表示),它以弹性变形能或以重力场位能的形式储存在系统内;另一部分能量是动能(以 T 表示),它以质量具有速度的形式储存于系统内。在保守系统中,系统在振动中任一瞬时机械能量守恒,即 $\Pi + T = \text{常数}$ 。如给定的平衡位置的瞬时: $\Pi = 0$ $T = T_{max}$ 而在给定的振动位移到极限位置的瞬时: $T = 0$ $\Pi = \Pi_{max}$ 该系统机械能量守恒式为

$$T_{max} = \Pi_{max}$$

当质量仅受势力场中保守力作用时,(机械)能量守恒定律用来解题是正确的。但,有作功的外力或非保守内力存在时,机械能量怎么守恒?这些力作的功总是使物体(或系统)的机械能量有所增加或减少,不再保持恒定,即机械能量守恒遭到了破坏。显然“齿文”混淆了能量守恒定律和功能原理的概念。

(2) “齿文”上列等式右边的“ $K_Z X_0(u+X)$ ”。按其图7(a)所示, $K_Z X_0$ 系 m_d 引起的弹簧变形 X 而产生的弹性力, 但作者又将其与外力 F_{n0} 混为一谈, 从而有“ $F_{n0}(u+X) = K_Z X_0(u+X)$ ”的公式, 这就使一个弹簧的瞬时变形有 x_0 和 $(u+x)$ 两个不同量值的现象。问题出在对胡克定律的概念不清晰, 胡克定律表述的 $f=kx$ 是指在弹变范围内, 弹簧的弹性力 f 不是一个恒力, 而是与其伸长量 x 成正比的变力, 在计算弹性力做功时须用积分法(或图介法、数值解法等)如形式:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} K_Z X dx$$

再联系到原文在图7的说明意义时: “……使物块 m_d 移动 u 距离, 弹簧所受的力平均减少 $\frac{1}{2}K_Z(\Delta f - u)$ ”, 按胡克定律, 设若弹簧变形量 $x = (\Delta f - u)$, 则弹性力为 $f = K_Z(\Delta f - u)$ 。此中 $\frac{1}{2}$ 显然与胡克定律相悖。为什么减少 $\frac{1}{2}K_Z(\Delta f - u)$? 弹性力怎么“平均减少”的? 均没有清楚概念推导或指明出处。同样, 由于功能概念的混淆, “齿文”中有所谓“弹簧A端的反作用力 F/a ……所做的功”等式的错误。

四 所谓“稳态过程”、“静差”的问题

我们注意到原文的“齿轮传动稳态过程动载荷计算与分析”这一命题, 并且在原文一开始突然引出的所谓“时域曲线”中, 把振动过程分为“过渡过程(动特性)”和“稳态过程(静特性)”。但是, 这不能成为用静力学方程来解决动力学问题提供依据⁽¹⁾。因为无法否定“稳态过程”是一个比较稳定的振动过程, “稳态振动”是持续的等幅振动, 它的频率和激振频率一致, 完全符合微分方程非齐次项是正弦函数这一性质。但是原文有:

“弹簧所受的最大力为:

$$F_{jd} = K_Z X_{max} = F_{n0} + K_Z \Delta f \sqrt{1 - \frac{u}{\Delta f}} \quad (4)$$

稳态过程, 动载荷系数为:

$$K_{jd} = \frac{F_{jd}}{F_{n0}} = 1 + \frac{K_Z \Delta f}{F_{n0}} \sqrt{1 - \frac{u}{\Delta f}} \quad (5)$$

式(4)中所示弹簧刚度 K_Z 是给定值, 所谓“最大变形量 X_{max} ”为定值, 故 $K_Z X_{max}$ 是一个定弹性力, 而式(5)中 F_{n0} 也属于静力范畴, 正如上述“静特性”不能作为任意把动载荷改为静载荷的掩护。鉴于非线性振动精确解比较复杂、困难, 而齿轮系统作为一个非线性振动系统, 因其啮合刚度和阻尼系数是非线性的, 其微分方程不易解出, 稳定性理论是研究系统受到确定性的或随机性的干扰、激振作用对运动的影响, 从而建立判别运动状态是稳定的、渐近稳定的或不稳定的准则, 近数十年来国际齿轮界不论是采用数值近似解法或通过推导简化为线性振动方程, 都要用相应的数学工具, 借助于计算机计算。

再说“静差”, “齿文”没有作应有的说明, 现将原文仅有的三处提到的“静差”阐述列于下:

在“小结(2)”中, “齿文”说: “……齿轮传动过程的‘静差’的影响效果, 即轮齿误差效应”。而在文中仅有一处为“因此齿轮传动过程的‘静差’特性, 是由于齿轮啮合系统

的……而引起的”，然后有“力静差（即平均附加动载荷）为：”，

$$\Delta F_{ja} = K_{jd} - F_{a0} = K_a \Delta f \sqrt{1 - \frac{u}{\Delta f}} \quad (6)$$

在原文式（9）与此类似。由式（5）及原文中知道 K_{jd} 是所谓“动载荷系数”， $K_{jd} > 1$ ，而 F_{a0} 是“作用力”，一个系数怎么能减一个力？且量纲也不一致！再就“动载荷”而言，原文中并看不出“动载荷”的大小，又怎样“平均附加”？怎么“平均”？“附加”到哪里？纵观全文，“齿文”提出的“静差”概念是什么，使读者很难理解。

五 怎么进行“动载荷计算与分析”

“齿文”说：“对于齿轮副整个传动系统而言，由图2、图7分析可知，动载荷为：

$$\begin{aligned} F_d &= F_a + \Delta F_a + A(\omega) \sum F_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ &= TF_{ac} + \Delta F_a + A(\omega) \sum F_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (13)$$

这个“动载荷”计算公式，能从“由图2、图7分析”而“可知”？且文中也没有“分析”，式中 $A(\omega) \sum F_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ 是冒然第一次出现，不知是什么力？还有前后均未解释的关系式 $F_a = TF_{ac}$ 我们不得而知。但是对于一个有阻尼的受迫振动来说，系统中所受的力有干扰力（ $P_0 \sin \omega t$ ），是时间的函数；弹性力（ kx ），是位置的函数；阻尼力（ Cx ）是速度的函数；惯性力（ $m\ddot{x}$ ），是加速度的函数；运动微分方程一般写作：

$$P_0 \sin(\omega t) = m\ddot{x} + C\dot{x} + kx$$

其中弹性力与阻尼力相位差 $\pi/2$ ，在给定的瞬时构成动力力系的互成平衡。力的概念是力学上的基本概念之一，在动力学问题中，“力”是多种多样的，但“力”并不是维持物体速度的原因，而是改变物体速度的原因。不论是恒力或是变力。“齿文”中那么多“动载荷”，“平均附加动载荷 ΔF_a ”、“齿轮副整个系统动载荷 F_d ”、“稳态过程动载荷 F_{max} ”……等等，哪一个是改变速度的“力”？

在动力学问题中的“动载荷”是有不同性质的“力”的，但其有确切的内涵，而合力是多个参数的函数，造成运动微分方程的复杂性，这也就是“动力学问题原则上是不同于静力学问题”的原因。在一个振动系统中的“动载荷”不可以象“齿文”那样随意性，它们应该是其特定功能确定的。

六 所谓“系统动载荷系数”的问题

“齿文”按照“稳态过程、动载荷系数”的一样的逻辑有：“系统动载荷系数：

$$K_d = T + (K_{jd} - 1) + \frac{1}{2} A(\omega) \varepsilon \quad (14)$$

原文摘要并称：“……采用系统动载荷系数来描述。……这为深入研究齿轮传动状态特性提出了新的途径”。这很难使人认可，因为对于各种不同性质的变力（或曰“动载荷”）根本

不能用静力学中求其代数和的方法求合力，已如上节所述，其“齿轮副整个传动系统……动载荷为 F_d ”的(13)式根本不能成立，再用 F_d 与“作用在(虚构质量) m_d 上的初始力 F_{d0} ”之比得出的式(14)，也是站不住脚的。

即使就式论式而言，式(14)作为一个确定性的数学模式也是不能成立的。因为对于研究物体机械运动的力学系统必需确定一些基本量(如质量、速度或角速度、位移和时间等)并遵从形式逻辑的基本法则，以保证从前提出发导出的结论是准确的、可靠的；其次，一个方程只有在确定的初始条件和边界条件之后，才构成特定问题的数学模式。并且式(14)右列各项子系数均为未知数，每一子系数中又有许多非限定性的Ⅱ级和Ⅲ级子系数，它们含多少未知数？量的关系如何？所以这是一个含许多未知数的、不可计算的计算式，何以侈谈“新途径”。

至于原文中从图2至图5的曲线，我们不知“齿文”作者是否根据自己作出的试验结果而得出的，但是，文中没有说明试验条件和过程，甚至连坐标(图4, 5)、坐标刻度(图2~5)都没有，更见不到对试验结果、具体含义的交代。

纵观“齿文”全文，该文并没有把问题作为非线性振动研究，也没有把齿轮系统作为振动问题来分析和计算。而且给读者以论证不严谨、前后散乱之感。

参 考 资 料

- [1] 清华大学编 《机械振动》上册P₅₄ 机械工业出版社 1980年北京
- [2] 哈尔滨工业大学编 《理论力学》下册P₄₂₃ 人民教育出版社
1962年北京
- [3] [英] D.J哈托著 《振动分析的矩阵计算机方法》 机械工业出版社
1982年北京
- [4] 《普通物理学》高等学校教材 程守珠、江之永编 高等教育出版社修订本
1982年北京
- [5] 湖南省机械工程学会编 《渐开线圆柱齿轮精度》 1984年11月
- [6] 恩格斯著《反杜林论》 人民出版社 1970年12月版