

控制临界图的顶点删除

于 崇 智

(基础课部)

摘 要

本文进一步讨论 k -控制临界图中顶点删除的一些性质,除了给出 $\gamma(G-v) = k-1$ 的充要条件以外,还得到下列主要结果:

- 1) 任何连通 k -控制临界图 G , v 是 G 中任一顶点,则 $G-v$ 至多有 $k-1$ 个分支;
- 2) 任何 k -控制临界图 G 中至少存在一点 v ,使 $\gamma(G-v) = k-1$;
- 3) 若 G 为3-控制临界图且对任何顶点 v ,有 $\gamma(G-v) = 2$,则 G 的直径为2。

本文讨论的图 $G = (V, E)$ 都是简单无向图。这儿没有定义的概念与符号见[1]。顶点 v 的邻域定义为

$$N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$$

它的闭邻域 $N[v] = \{v\} \cup N(v)$ 。更一般地,把子集 $X \subseteq V$ 的闭邻域定义为

$$N[X] = \bigcup_{x \in X} N[x].$$

设 X 是 V 的一个子集,若 $V-X$ 中每一个顶点至少和 X 中一个顶点相连接,则称 X 是 G 的一个控制集(Domination set)。任何这样控制集的最小基数称为 G 的控制数(Domination number),记为 $\gamma(G)$ 。若 $\gamma(G) = k$,对任何 $u, v \in V$,且 $uv \in E$,使

$$\gamma(G+uv) = k-1,$$

则称 G 为 k -控制临界图,简称为 k -控临图。

一、 k -控临图

一般地说,一个图的控制数 γ 随着顶点的删除而变化,图的分支数 ω 亦如此。例如星图 $G = K_{1,n}$,则 $\gamma(G) = \omega(G) = 1$ 。当 v 是星图的中心点时, $\gamma(G-v) = \omega(G-v) = n$ 。但 k -控临图中顶点的删除,Sumner⁽²⁾证出下列结果:

本文于1990年3月21日收到

引理 1 若 G 是一个 k -控临图($k \geq 1$), 则对任何一个顶点 $v \in V$, 有 $\gamma(G-v) \leq k$.

由 k -控临图定义, 显然有 $\gamma(G-v) \geq k-1$.

首先证明任何连通 k -控临图的顶点删除至多产生 $k-1$ 个分支。为此引进

引理 2 ⁽³⁾ 任何一个 k -控临图中没有两个悬挂点有相同的邻点。

引理 3 ⁽³⁾ 设 G 为 k -控临图, 若 u, v 是 G 中任何二个不相邻接的顶点, 则 $V(G)$ 中必存在一个集合 S , $|S| = k-2$, 使 $\{v\} \cup S$ 控制 $G-u$ 或者 $\{u\} \cup S$ 控制 $G-v$ 。

定理 1 设 G 为连通的 k -控临图($k \geq 2$), v 是 G 中任何一个顶点, 则 $\omega(G-v) \leq k-1$ 。

证明 设 $\omega(G-v) = k$ 。这 k 个分支记为 $A_i (i=1, 2, \dots, k)$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ 。由引理2, A_i 中至多只有一个分支是单点。不失一般性, 设

$$|A_i| \geq 2 (i=1, 2, \dots, k-1)。$$

分别选取 $a_i \in A_i (i=1, 2, \dots, k-1)$, 使 $va_i \in E$ 。但在 G 中, $a_i a_j \notin E (i \neq j)$ 。显然, $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ 是 $G-v$ 的一个独立集。因为 $a_1 a_2 \in E$, 由引理3, 存在 $S \subseteq V$, $|S| = k-2$, 使 $\{a_1\} \cup S$ 控制 $G-a_2$ 。记 $S = \{x_3, x_4, \dots, x_k\}$ 。因为 $x_i a_2 \in E (i=3, 4, \dots, k)$, 且 $va_2 \in E$, 故 $x_i \neq v (i=3, 4, \dots, k)$ 。显然, $A_1, A_2 - \{a_2\}, A_3, \dots, A_k$ 必须被 $\{a_1\} \cup S$ 控制, $a_1 \in A_1$, 但是 $A_i \cap A_1 = \emptyset (i \neq 1)$, $|A_2| \geq 2$, $A_2 - \{a_2\} \neq \emptyset$, 共有 $A_2 - \{a_2\}, A_3, \dots, A_k$ 这 $k-1$ 个非空独立分支, 每个分支至少要有一点方能控制, 但 $|S| = k-2$, 总有一个分支不能被控制, 矛盾。

对 k -控临图 G 的一个顶点 v , 下面定理给出 $\gamma(G-v) = k-1$ 的充要条件。

定理 2 设 G 是 k -控临图($k \geq 2$), 若 $v \in V$, $\gamma(G-v) = k-1$ 的充要条件是至少存在一个 $S \subseteq V - N[v]$, $|S| = k-1$, 使 $\{v\} \cup S$ 控制 G 且

$$N(v) \subseteq N[S]。$$

证明 必要性。若对任何 $S \subseteq V - N[v]$, $|S| = k-1$, $\{v\} \cup S$ 控制 G , 但

$$N(v) - N[S] \neq \emptyset。$$

已知 $\gamma(G-v) = k-1$, 设 $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ 控制 $G-v$ 。由上面假设, x_i 中至少有一点 $x_i \in N(v)$, 则 $x_i v \in E$, 故 $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ 控制 G , 与 $\gamma(G) = k$ 矛盾。

充分性显而易见。

由定理2立即可推得

定理2' 设 G 是 k -控临图($k \geq 2$), 若 $v \in V$, $\gamma(G-v) = k$ 的充要条件是对任何 $S \subseteq V - N[v]$, $|S| = k-1$, 使 $\{v\} \cup S$ 控制 G , 但

$$N(v) - N[S] \neq \emptyset。$$

在判定控临图某个顶点删去后的控制数时, 使用定理2或定理2'必须对任何这样的子集 S 进行检查, 为简化起见, 有下面充分条件

定理 3 设 G 为 k -控临图($k \geq 2$), $v \in V$, 若存在一点 $u \in N(v)$, 使

$$N[u] \subseteq N[v],$$

则 $\gamma(G-v) = k$ 。

证明 因为 $N[u] \subseteq N[v]$, 在 G 上与 $V - N[v]$ 中任何一点不连接, 由定理2'知, $\gamma(G-v) = k$ 。

定理3的逆不一定成立。图1是个反例。 G 是3-控临图。 $v \in V$, $N(v) = \{u_1, u_2, u_3\}$ 。虽然对任何 u_i , $N[u_i] - N[v] \neq \emptyset$, 但 $\gamma(G-v) = 3$ 。

定理 4 任何 k -控临图 $G(k \geq 2)$, 至少存在一点 $v \in V$, 使 $\gamma(G-v) = k-1$ 。

证明 若对任何 $v \in V$, $\gamma(G-v) = k$ 。由定理 2' 知, 对任何 $S \subseteq V - N[v]$, $|S| = k-1$, 使 $\{v\} \cup S$ 控制 G , 但 $N(v) - N[S] \neq \emptyset$ 。设 u 是 $V - N[v]$ 中任何一个顶点, 则 $uv \in E$ 。不失一般性, 由引理 2, 存在 $S' \subseteq V$, $|S'| = k-2$, 使 $\{u\} \cup S'$ 控制 $G-v$ 。取

$$S = \{u\} \cup S',$$

$|S| = k-1$, 则 $N(v) - N[S] = \emptyset$, 矛盾。

定理 4 说明不存在这样的 k -控临图 G , 使对任何顶点 v , 有 $\gamma(G-v) = k$ 。事实上存在使每个顶点 v , 满足 $\gamma(G-v) = k-1$ 的 k -控临图。下面这个定理证明这个的控临图没有悬挂点。

定理 5 设 G 是 k -控临图, 若对任何 $v \in V$, $\gamma(G-v) = k-1$, 则 $\delta(G) \geq 2$ 。

证明 若 $\delta(G) = 1$, 设 G 有悬挂点 u , $uv \in E$, 故 $N[u] \subseteq N[v]$, 由定理 3, $\gamma(G-v) = k$, 与已知矛盾。

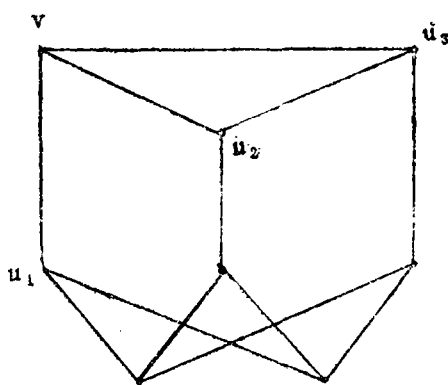


图 1: G

二、2-控临图和3-控临图

先讨论2-控临图。

定理 6 设 G 是2-控临图, 对任何 $v \in V$, $\gamma(G-v) = 1$ 的充要条件是 G 的补图

$$\bar{G} = \bigcup K_2.$$

证明 2-控临图的补图⁽²⁾

$$\bar{G} = \bigcup_{i=1}^n K_{n_i},$$

若 $n_i > 1$, 则在 $\bar{G}$ 中与 v 相连接的顶点数大于1, 设为 $v_1, v_2, \dots, v_{n_i}$, 删去其中一点 v_i , 因 $\gamma(G-v_i) \neq 1$, 与已知矛盾, 故 $n_i = 1$ 。

充分性显然。

对3-控临图, 有

定理 7 设 G 是3-控临图, 对任何 $v \in V$, $\gamma(G-v) = 2$, 则 G 的直径 $\text{diam} G = 2$ 。

证明 3-控临图的直径至多为3⁽²⁾, 故设

$$\text{diam} G = 3.$$

由[3]中引理3知, 若 u, v 为 G 中某直径的两端点, 则

$$A = V - N[u] \cup N[v]$$

为非空完全图。

对任何 $z \in A$, $\{u, z, v\}$ 为 G 的一个独立控制集。由[2]中引理2, 存在 $t \in V$, 使 $\{u, t\}$

控制 $G-z$ 。因 $uv \in E$, 故 $t \in N(v)$ 且 t 必须控制 $N(v) \cup (A - \{z\})$ 。

考察 $G-t$ ，由已知， $\gamma(G-t)=2$ 。设 $x, y \in V(G-t)$ ，使 $\{x, y\}$ 控制 $G-t$ 。不失一般性，可分下列三种情况进行讨论。

情况1: $x=u$ 。当 $y \in N(u)$ 或 A 时， $\{x, y\}$ 不能控制 v ；当 $y=v$ ， $\{x, y\}$ 不能控制 z ；所以 $y \in N(v)$ 。因为 $yt \in E$ ， $\{x, y\}$ 控制 G ，矛盾。

情况2: $x=v$ 。 $\{x, y\}$ 控制 $G-t$ ，但 $xt \in E$ ，故 $\{x, y\}$ 控制 G ，亦矛盾。

情况3: $x \in N(u)$ 。当 $y \in A$ ， $\{x, y\}$ 不能控制 v ，故 $y \in N(v)$ 。但因 $\{x, y\}$ 控制 $G-t$ ，又 $yt \in E$ ，所以 $\{x, y\}$ 控制 G ，矛盾。定理得证。

定理7的逆不一定成立。有反例如图1。 G 为3-控临图， $\text{diam} G=2$ ，但存在顶点 v ，使 $\gamma(G-v)=3$ 。

下一个定理将证明连通3-控临图中割点的删去并不降低其控制数。为此先证

定理8 任何直径为2的3-控临图是2-连通的。

证明 若不然， G 必有一割点，设为 u ，使

$$G-u = G_1 + G_2,$$

$G_i \neq \phi (i=1, 2)$ 且 $G_1 \cap G_2 = \phi$ 。因 $\text{diam} G=2$ ， G_1, G_2 中任何点必须与 u 相连接，所以 $\{u\}$ 控制 G ，矛盾。

定理9 设 G 为连通3-控临图，若 u 为割点，则 $\gamma(G-u)=3$ 。

证明 由定理8， $\text{diam} G=3$ 。设 $G-u = G_1 + G_2$ ， $G_i \neq \phi (i=1, 2)$ 且 $G_1 \cap G_2 = \phi$ 。设 $x \in V(G_1)$ ，若 $xu \in E(G)$ ，则对 G_2 中任何顶点 y ，有

$$yu \in E(G)。$$

若 $\gamma(G-u)=2$ ，则存在 u_1, u_2 ，分别属于 $V(G_1), V(G_2)$ ，使 $\{u_1\}$ 控制 G_1 。这样 $\{u_1, u\}$ 控制 G ，矛盾。

定理9控逆也不一定成立。反例如图2所示。 G 为3-控临图。图中标出 v 的记号的顶点，均有 $\gamma(G-v)=3$ ，但 v 不是割点。

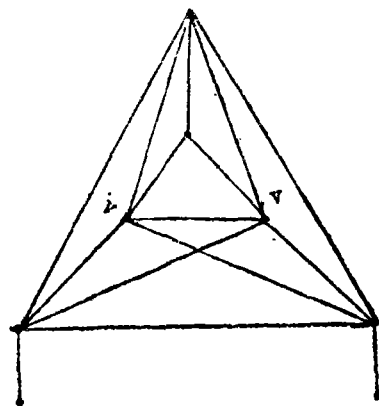


图2: G

参 考 文 献

- (1) J. A. 邦迪 U. S. R. 默蒂, 吴望名等译·图论及其应用·北京: 科学出版社, 1984
- (2) D.P.Sumner and P.Blitch, Domination Critical Graphs, Journal of Combinatorial Theory Series B, vol.34(1983)65—76.
- (3) 于崇智, 控制临界图. 华东交通大学学报, 1990, 12(1): 34—38.

Vertex Deletion in Domination Critical Graphs

Yu Chongzhi

ABSTRACT

Some properties of vertex deletion in k -domination critical graphs are studied in this paper. We obtain a sufficiency and necessary condition for $\gamma(G-v)=k-1$, here G is a k -domination critical graph and v is a vertex of G . We also prove following results:

- 1) If v is a any vertex in every connected k -domination critical graph G , then $\omega(G-v) \leq k-1$;
- 2) For every k -domination critical graph G , it contains at least a vertex v , such that $\gamma(G-v)=k-1$;
- 3) G is a 3-domination critical graph. For each $v \in V(G)$, if $\gamma(G-v)=2$, then $\text{diam } G=2$.