

模态集结法在液压系统建模与仿真中的应用

张 会 明

(机械工程系)

摘 要

本文探讨了模态集结法在液压系统建模与仿真中的应用,通过实例验证了此法是正确的和有效的。

随着计算机及应用软件的发展,液压系统的动态仿真研究越来越受到重视。但通常在许多液压系统中,数学模型的阶数较高,多个环节的时间常数差异较大,直接用计算机处理,不仅费时,而且由于“病态”问题有时会得出错误的结果〔2〕。为此,相继出现了一些特殊的数值积分方法和降阶方法。

本文探讨了模态集结法在液压系统建模及动态仿真中的应用,并通过实例,阐明了应注意的问题。

集结原是经济学中分析经济模型的一个概念,1968年由Aoki引入控制系统的分析中,得到了很大的发展,成为大系统模型简化的主要方法之一〔1〕。模态集结法是集结法中的一种,其降阶是在保留原系统主特征运动的基础上进行,它类似于控制理论中研究系统的主要模态、忽略次要模态方法的深入和推广。

一、模态集结法

1、基本原理:

设液压系统的状态方程为:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) \dots\dots (1)$$

式中 $z(t)$ 是须保留在集结模型中的状态变量。通过模态变换:

本文于1990年7月2日收到

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \quad \dots\dots (2)$$

系统(1)可化为模态形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} u(t) \quad \dots\dots (3)$$

式中 $\Lambda = M^{-1}AM = \text{block-diag}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_f; \lambda_{f+1}, \dots, \lambda_n)$

M为n×n方阵, M₁₁为f×f方阵

其中λ₁, ..., λ_n为系统(1)的特征值, λ₁, ..., λ_f为系统(1)的主特征值, 须在集结模型中保留。

$$K = M^{-1}B = [K_1^T; K_2^T]^T \quad \dots\dots (4)$$

令(3)式中 $\dot{w}_2(t) = \Lambda_2 w_2(t) + K_2 u(t) = 0$

$$\text{得到 } w_2(t) = -\Lambda_2^{-1} K_2 u(t) = Lu(t) \quad \dots\dots (5)$$

其中 $L = -\Lambda_2^{-1} K_2$

由(2)式可以得到:

$$w_1(t) = M_{11}^{-1} [z(t) - M_{12} w_2(t)] \quad \dots\dots (6)$$

$$\dot{x}_2(t) = M_{21} M_{11}^{-1} z(t) + (M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}) Lu(t) = Nz(t) + Eu(t) \quad \dots\dots (7)$$

式中 $N = M_{21} M_{11}^{-1}$ $E = (M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}) L$

将(7)式代入(1)式, 便可得到一低阶集结模型, 同时保留了系统(1)的主要模态。

$$\dot{Z}(t) = FZ(t) + Gu(t) \quad \dots\dots (8)$$

式中 $F = A_{11} + A_{12} N$ $G = B_1 + A_{12} E$

2、模态矩阵

(1) 式中系统A矩阵的特征值λ_i与相应的特征向量M_i有:

$$AM_i = \lambda_i M_i \quad i=1, \dots, n \quad \dots\dots (9)$$

A的模态阵M = [M₁, M₂, ..., M_n]

由于Λ阵为若当(Jordan)阵

$$\Lambda^T = (M^{-1}AM)^T = M^T A^T (M^{-1})^T = \Lambda$$

因而(M⁻¹)^T为矩阵A^T的模态阵, 因此, 只要求出A^T对应于每个特征值λ_i的特征向量, 就可构成(M⁻¹)^T, 再转置即可得到M⁻¹。

二、实 例

以进口调速系统为例。调速阀安装在液压缸的进油管路上, 如图1所示。为简化数学模型, 作下列假设:

(1) 不考虑管道、调压阀、背压阀的动特性对系统特性的影响;

(2) 不考虑阀腔内油的压缩性;

- (3) 不计液压缸中的液感；
 (4) 不计系统各部分的泄漏。
 1、基本方程：

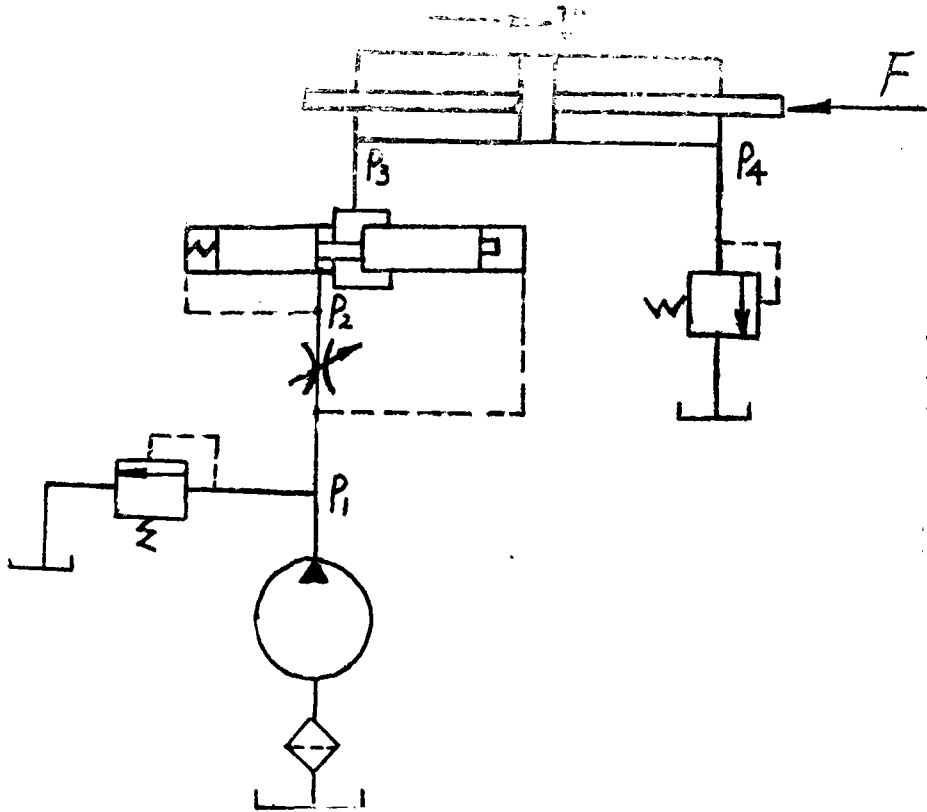


图 1

流经节流阀的流量方程：

$$Q_T = C_T W_{TX} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)} \quad \dots\dots (10)$$

流经减压阀的流量方程：

$$Q_R = C_R W_R x_R \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_2 - p_3)} \quad \dots\dots (11)$$

流量连续性方程：

$$Q_R = Q_T - A_R \dot{x}_R \quad \dots\dots (12)$$

减压阀阀芯力平衡方程：

$$(\overline{m}_{R1} + \frac{1}{2} \overline{m}_{R2}) \ddot{x}_R + B_R \dot{x}_R + k(x_R - x_C) = -0.43 W_R x_R (p_2 - p_3) + (p_{2R} - p_{1R}) A_R - C_R W_{R1} \sqrt{2\rho(p_2 - p_3)} \dot{x}_R \quad \dots\dots (13)$$

式中

$$\begin{cases} p_{2R} = p_2 - L_2 A_R \ddot{x}_R - R_2 A_R \dot{x}_R \\ p_{1R} = p_1 + L_1 A_R \ddot{x}_R + R_1 A_R \dot{x}_R \end{cases}$$

流入液压缸的流量:

$$Q_R = A_{C1} \dot{v} + c \dot{p}_3 \quad \dots\dots (14)$$

液压缸活塞力平衡方程式:

$$A_{C1} p_3 - A_{C2} p_4 = M_s \ddot{v} + F_f + F \quad \dots\dots (15)$$

其中 F_f 为摩擦力 $F_f = B_s \dot{v} + F_0$

F_0 为摩擦力中与速度无关的量

F 为外负载 $F = F_0 + F_1$ F_0 为初始状态时的外负载 F_1 为外负载的变化量

本例的基本数据为:

$$\begin{aligned} x_T &= 0.4 \text{ mm}, & d_T &= 1.5 \text{ cm}, & A_{C1} &= A_{C2} = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ A_R &= 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2, & d_R &= 2 \text{ cm}, & m_{R1} + \frac{1}{2} m_{R2} &= 0.12 \text{ 千克} \\ B_s &= 60 \text{ N} \cdot \text{s/m}, & B_R &= 9.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}, & p_1 &= 20 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ p_4 &= 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2, & k &= 5 \times 10^4 \text{ N/m} & M_s &= 12 \text{ kg} \end{aligned}$$

2、状态方程组:

由于模态集结法仅适用于线性系统, 因而必须将 (10) ~ (15) 式线性化并取增量式。以单输入——单输出为例, 其方法也适用于多输入——多输出的情况。 F_1 为输入项, 液压缸的速度 v 为输出项, 整理后可得到五阶微分方程式:

$$\begin{aligned} v^{(5)} + a_1 v^{(4)} + a_2 v^{(3)} + a_3 v^{(2)} + a_4 v' + a_5 v = \\ b_1 F_1^{(4)} + b_2 F_1^{(3)} + b_3 F_1'' + b_4 F_1' + b_5 F_1 \quad \dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\text{令 } x_1 = v - \beta_0 F_1$$

$$x_2 = \dot{v} - \beta_0 \dot{F}_1 - \beta_1 F_1 = \dot{x}_1 - \beta_1 F_1$$

$$x_3 = \ddot{v} - \beta_0 \ddot{F}_1 - \beta_1 \dot{F}_1 - \beta_2 F_1 = \dot{x}_2 - \beta_2 F_1$$

$$x_4 = \ddot{\ddot{v}} - \beta_0 \ddot{\ddot{F}_1} - \beta_1 \ddot{F}_1 - \beta_2 \dot{F}_1 - \beta_3 F_1 = \dot{x}_3 - \beta_3 F_1$$

$$(x_5 = v^{(4)} - \beta_0 F_1^{(4)} - \beta_1 F_1^{(3)} - \beta_2 F_1^{(2)} - \beta_3 F_1' - \beta_4 F_1 = \dot{x}_4 - \beta_4 F_1$$

$$\text{其中 } \beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0$$

$$\beta_4 = b_4 - a_1 \beta_3 - a_2 \beta_2 - a_3 \beta_1 - a_4 \beta_0$$

$$\beta_5 = b_5 - a_1 \beta_4 - a_2 \beta_3 - a_3 \beta_2 - a_4 \beta_1 - a_5 \beta_0$$

由 (16) 式, 可得到系统的状态方程和输出方程为:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A \cdot X + B \cdot F_1 \\ Y &= C \cdot X \quad \dots\dots (17) \end{aligned}$$

其中

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$B = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5]^T \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

利用本例的基本数据计算, 可得到:

$$\begin{aligned} a_5 &= 2.691 \times 10^{12}, & a_4 &= 1.91 \times 10^{10}, & a_3 &= 5.13 \times 10^9, \\ a_2 &= 6.011 \times 10^7, & a_1 &= 2.979 \times 10^4, & \beta_1 &= -6.67 \times 10^{-2}, \\ \beta_2 &= 17.787 \times 10^2, & \beta_3 &= -4.846 \times 10^7, & \beta_4 &= 13.37 \times 10^{11}, \\ \beta_5 &= -10.7 \times 10^{14} \end{aligned}$$

由矩阵 (18), 可得到系统的特征方程为:

$$-\lambda^5 - 2.97 \times 10^4 \lambda^4 - 6.011 \times 10^7 \lambda^3 - 5.13 \times 10^9 \lambda^2 - 1.91 \times 10^{10} \lambda - 2.691 \times 10^{12} = 0$$

用QR算法 [4], 可求得系统的特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -1.8616 \pm j22.826 \\ \lambda_3 &= -91.35 \\ \lambda_4 &= -2080 \\ \lambda_5 &= -27612 \end{aligned}$$

可以看出, 前三个特征值实部绝对值较小, 为主特征值, 原系统可以简化为一个三阶集结模型。

3、系统的简化和仿真

利用 (2) ~ (8) 式, 可得到系统的集结模型为:

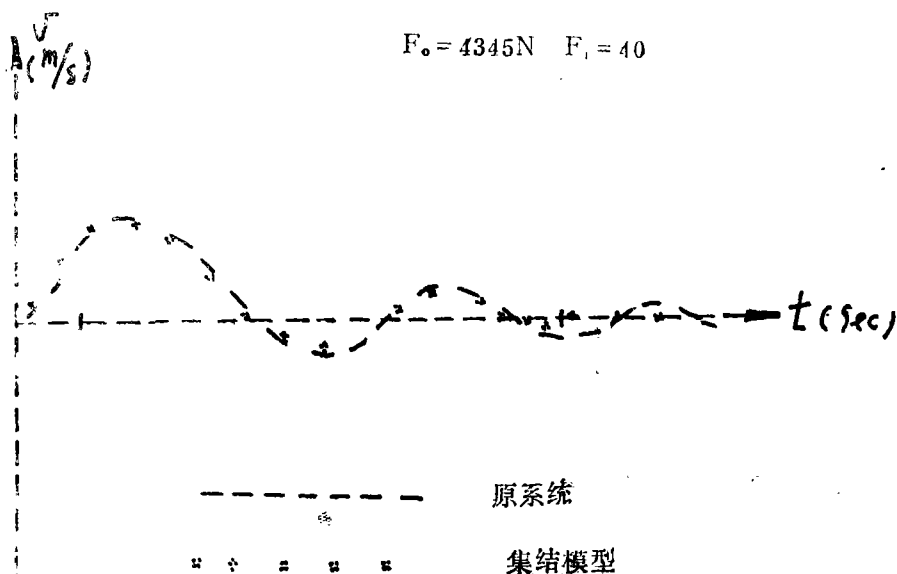
$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= F \cdot Z(t) + G \cdot F_1 \\ Y &= C \cdot Z(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3.732 \times 10^4 & -4.24 \times 10^2 & -90.45 \\ -6.67 \times 10^{-2} & & \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 17.787 \times 10^2 \\ 6.235 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$$

在IBM机上, 用basic语言编程, 用四阶Runge—Kutta法首先对系统的 (17) 式求解。F₁选择阶跃负载F₁=40, 根据系数矩阵的特征值和稳定性要求 [2], 计算步长选为10⁻⁴秒, 计算框图如图三所示, 仿真曲线如图二所示。随后, 在同样的条件, 对集结模型 (19) 求解, 计算步长选为0.035秒, 仿真曲线如图二所示。



可见，这两条曲线基本重合，说明集结模型和系统的动态性能基本一致，并且不存在稳态误差。

三、结 论

1、模态集结法对于液压系统线性模型的简化、对于防止“病态”问题、节省动态仿真时间都是有效的，有一定的推广价值。

2、模态集结法对于高响应的电液伺服系统模型简化，其动态精度还有待于进一步研究

主要符号

C_T ——节流阀的流量系数

W_T ——节流阀阀口面积梯度

x_T ——节流阀阀口开度

C_R ——减压阀的流量系数

W_R ——减压阀阀口面积梯度

x_R ——减压阀阀口开度

x_C ——弹簧予压缩量

ρ ——油液密度

m_{R1} ——减压阀阀芯质量

m_{R2} ——减压阀弹簧质量

A_R ——减压阀阀芯承压面积

L_1, L_2 ——液感

l_R ——长度

R_1, R_2 ——液阻

C ——液容

A_{c1} ——液压缸进油腔有效面积
 A_{c2} ——液压缸回油腔有效面积
 B_1 ——液压缸活塞的等效阻尼系数
 k ——弹簧刚度
 B_R ——减压阀阀芯等效阻尼系数
 M_G ——等效质量
 v ——速度

参 考 文 献

- 1、M.J.詹姆希迪.大系统建模与控制.陈中基,黄昌熙译.北京:科学出版社,1986
- 2、洪国辉.液压计算机分析和仿真中的病态 (Stiff) 问题.机床与液压,1986; 2
- 3、结方胜彦.现代控制工程.卢伯英等译.北京:科学出版社,1984
- 4、曹志洁等.矩阵计算和方程求根.北京:人民教育出版社,1979

Application of the Modal Aggregation to Modeling and Simulating Hydraulic System

Zhang Huiming

ABSTRACT

This paper explores application of the modal aggregation to modeling and simulating hydraulic system, and proves that the method is correct and effective through practical example.

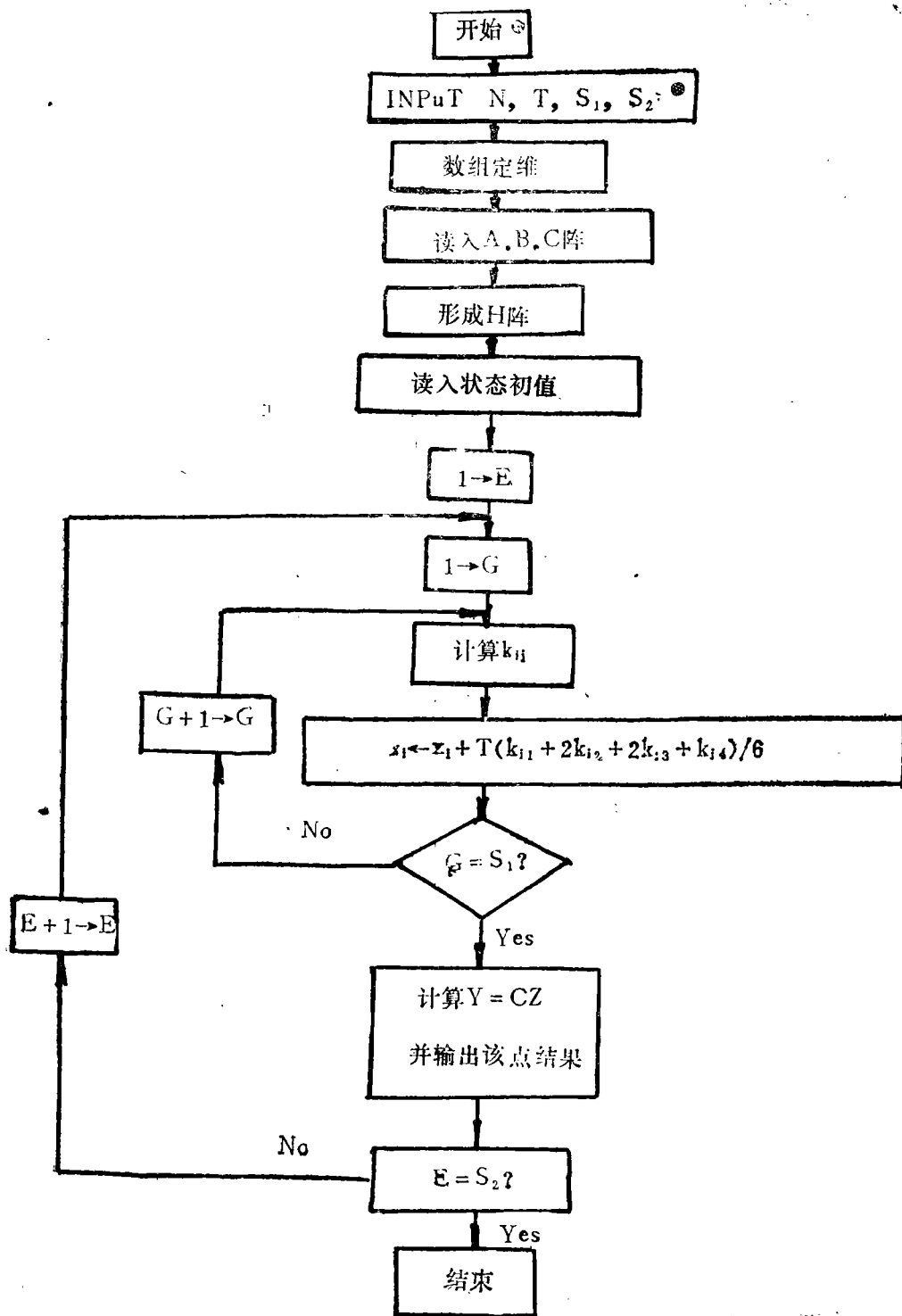


图 3