线性椭圆塑方程广义解的一种级数展开法

刘 诗 俊

（基础课部）

摘 要

本文提出了一般线性椭圆型偏微分方程Dirichlet问题广义解的一种新的级数展开式。首先，我们在$H_*(\Omega)$空间（见（5）及（6）式）中找到了一种完备的标准正交基$\{e_i\}$，然后得到广义解的级数展开式（14）。用这种展开式不需要求出特征函数系，也不必解线性方程组（如在有限元法中所作的那样），只要按熟知的Schmidt手续这一固定格式求出$\{e_i\}$基，再按（14）式直接展开即可。

一、引言

通常对线性椭圆型方程解的级数展开，是使用特征函数系为基底（即 Galerkin 法）。但求特征函数系的计算量往往是很大的。至于有限元法和差分法，解多个未知量的方程组，也颇费事。用本文中提出的级数展开式（14），可大大降低计算量，有时不用计算机就能得到结果。

二、理论框架

线性椭圆型方程Dirichlet问题的现代提法。对于

$$(A)\begin{cases} Lu=-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u(x)=f(x)\ (x\in\Omega) \\ u\in H_0{}^1(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

设以下条件成立

1）$\Omega\subset R^n$，Ω是有界域，其边界$\partial\Omega\in c^1$。

2）$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)\in L^\infty(\Omega)$ （i，j=1，2…，n） （2）

本文于1990年4月13日收到

3）对于 $a(u,v) \triangleq \int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+cuv\right)dx$

$(u,v\in H_0^1(\Omega))$

$\exists$：$\delta>0$，使

$$|a(v,v)|\geqslant\delta\|v\|_1^2,\ 对\forall\ v\in H_0^1 \tag{3}$$

成立（此条件3）称为"强制性条件"）。

4）$f(x)\in H^{-1}(\Omega)$ （4）

这时，问题（A）在$H_0^1(\Omega)$中有唯一解（此解为广义解）。（参看〔V〕中第2定理2.7）

问题（A）常称为"齐次Dirichlet问题"。

三、齐次Dirichlet问题的解的级数展开

下面介绍我们提出的级数展开式。

引理1 设$\Omega\subset R^n$为有界域。又有函数$w(x)$满足

$$\begin{cases} w(x)\in C^1(\bar{\Omega}) \\ w(x)|_{\partial\Omega}=0 \\ w(x)\neq 0 \quad (当x\in\Omega) \end{cases} \tag{5}$$

（以下简称此条件为"条件5"）

那么，只要$u\in C_0^1(\Omega)$，则对任给的$\varepsilon>0$，都有多项式$P(x)$，使

$$\sup_{x\in\Omega}\left|D^{(s)}w(x)p(x)-D^{(s)}u(x)\right|<\varepsilon \tag{6}$$

$$|s|=\sum_{i=1}^{n}s_i\leqslant 1$$

（此处$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，$D^{(s)}u=\frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}}\frac{\partial^{s_2}}{\partial x_2^{s_2}}\cdots\frac{\partial^{s_n}}{\partial x_n^{s_n}}u$）

证：令

$$\frac{u(x)}{w(x)}=v(x)$$

显然$v(x)\in c_0^1(\Omega)$。用推广了的Weierstrass定理（见〔Ⅵ〕中第3章§11）对$\forall\ \eta>0$，有多项式$p(x)$，使

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\|s|\leqslant 1}}\left|D^{(s)}p(x)-D^{(s)}v(x)\right|<\eta$$

于是

$$|w(x)p(x)-u(x)|=|w(x)p(x)-w(x)v(x)|=$$

$$=|w(x)|\,|p(x)-v(x)|\leqslant\sup_{x\in\Omega}|w(x)|\cdot\eta$$

又

$$\left|\frac{\partial(wp)}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|=\left|\frac{\partial(wp)}{\partial x_i}-\frac{\partial(wv)}{\partial x_i}\right|=\left|w\frac{\partial(p-v)}{\partial x_i}+\frac{\partial w}{\partial x_i}(p-v)\right|$$

$$\leqslant|w(x)|\left|\frac{\partial(p-v)}{\partial x_i}\right|+\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\left|p-v\right|$$

由此可见，若令

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sup_{x\in\Omega}|w(x)|,\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\right\}=A$$

则

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\|s|\leqslant1}}\left|D^{(s)}w(x)p(x)-D^{(s)}u(x)\right|<A(n+1)\eta$$

对$\forall\varepsilon>0$，可取$\eta=\frac{\varepsilon}{A(n+1)}$，则（6）式成立。证毕。

推论2 设$w(x)$满足条件5，则函数集合$P=\{w(x),\ wx_1,\ wx_2,\ \cdots,\ wx_n,\ wx_1^2,\ wx_1x_2,\ \cdots,\ wx_1x_n,\ \cdots,\ wx_1^{i1}x_2^{i2}\cdots x_n^{in},\ \cdots,\ \}$在$H_0^1(\Omega)$中处处稠密。

证：因为$H_0^1(\Omega)$是$C_0^\infty(\Omega)$在$H^1(\Omega)$中的闭包，所以当$u\in H_0^1(\Omega)$，对任意$\varepsilon>0$,有$\bar u\in C_0^\infty(\Omega)\subset C_0^1(\Omega)$，使$\|u-\bar u\|_{H^1(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{2}$又根据引理1容易证明，对此$\bar u$，有多项式$p(x)$,使$\|\bar u-w(x)p(x)\|_{H^1(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{2}$，于是$\|u(x)-w(x)p(x)\|_{H^1(\Omega)}<\varepsilon$

可见集合p在$H_0^1(\Omega)$中稠。

当u，$v\in H_0^1(\Omega)$时，我们取内积

$$(u,\ v)_*\triangleq a(u,\ v)\tag{7}$$

由此引出范数

$$\|u\|_*=\sqrt{a(u,\ u)}\tag{8}$$

关于$\|\cdot\|_*$及$\|\cdot\|_1$显然有

引理3 若$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$C(x)\in L^\infty(\Omega)$，且有$\delta>0$使$|a(v,\ v)|\geqslant\delta\|v\|_1^2$（$\forall v\in H_0^1(\Omega)$）则$\|\cdot\|_*$与$\|\cdot\|_1$二范数等价。

证 显然有$M>0$，使

$$|a_{ij}(x)|,\ |b_i(x)|,\ |C(x)|<M$$
$$(a.e.\ x\in\Omega,\ i,j=1,2\cdots,n)$$

于是

$$\|u\|_*^2\leqslant M\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|u\right|+\left|u\right|^2\right)dx$$

$$\leqslant M\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+\left|u\right|^2\right)+\left|u\right|^2\right)dx$$

$$=M\int_\Omega\left(\frac{1}{2}(2n)\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+\left(\frac{n}{2}+1\right)|u|^2\right)dx$$

$$=M\int_\Omega\left((n+\frac{1}{2})\ |\nabla u|^2+(\frac{n}{2}+1)\ |u|^2\right)dx$$

$$<M(n+1)\|u\|_1{}^2$$

所以

$$\|u\|_*<\sqrt{M(n+1)}\|u\|_1 \tag{9}$$

又由$|a(u,u)|\geqslant\delta\|u\|_1{}^2$，可见

$$\|u\|_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{\delta}}\|u\|_* \tag{10}$$

于是此二范数$\|\cdot\|_*$及$\|\cdot\|_1$等价。

推论4 设$\Omega\subset R^n$为有界域，又有$w(x)$满足条件5，且引理3的条件成立，则上文中所说的集合p在$H_*(\Omega)$中稠密。此推论的证明太简单，故略。

现在考虑

$$\begin{cases}Lu=f(x) & (x\in\Omega)\\ u\in H_*(\Omega)\end{cases} \tag{A'}$$

推论5 设条件1）2）3）4）成立，则问题（A′）在$H_*(\Omega)$中有唯一解。

证：因为$f\in H^{-1}(\Omega)$，所以有f_0，f_1，…，$f_n\in L^2(\Omega)$，使

$$(f,u)=f(u)=\int_\Omega\left(f_0u-\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx,\ \forall u\in H_0{}^1(\Omega), \tag{11}$$

（见〔V〕中的定理1.12）

现在我们利用（11）式可在$H_*(\Omega)$上定义一泛函。事实上，当$u\in H_*(\Omega)$时，$|(f,u)|\leqslant$

$$\|f_0\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M_1\|u\|_1$$

$$\leqslant\frac{M_1}{\sqrt{\delta}}\|u\|_*$$

所以，这是$H_*(\Omega)$上的有界线性泛函。将此泛函仍记为f。现在$f\in(H_*(\Omega))'$。

我们来考虑问题（A）在$H_*(\Omega)$中的解。由条件2）3）可见（7）式确实定义了$H_*(\Omega)$中的内积（注）。而方程（A）的广义解u满足变分方程

$$a(u,v)=(f,v)\qquad\forall\ v\in H_0{}^1(\Omega) \tag{12}$$

（在此$f\in H^{-1}(\Omega)$）

现在将（12）表为

$$(u,v)_*=(f,v)\qquad\forall\ v\in H_*(\Omega) \tag{13}$$

注：显然可认为$a_{ij}(x)\equiv a_{ji}(x)$而不失一般性。

由熟知的Riesz定理可知有唯一$u\in H_*(\Omega)$满足（13）。此u即（A）在$H_*(\Omega)$中的广义解。证毕。

注意：由（11）可见$f\in H^{-1}(\Omega)=(H_0{}^1(\Omega))'=(H_*(\Omega))'$，即f作为$H_0{}^1(\Omega)$上的泛函与f作为$H_*(\Omega)$上的泛函实际上是同一个泛函，所以方程（12）的解$u\in H_0{}^1(\Omega)$与方程（13）的解$u\in H_*(\Omega)$是同一个$u\in H_0{}^1(\Omega)=H_*(\Omega)$（此等号表示在等价范数意义下两空间相等），即（A）的广义解。

设条件1）2）3）4）成立，又有函数$w(x)$满足条件（5），这时函数集$p=\{w, wx_1, \cdots, wx_n, \cdots\}$在$H_*(\Omega)$中稠。我们用Schmidt手续将p集标准正交化，得到标准正交基$\{e_i\}$，显然$\{e_i\}$在$H_*(\Omega)$中完备。这时，将（A）的唯一广义解$u\in H_*(\Omega)$按$\{e_i\}$展为Fourier级数

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}(u,e_i)_*e_i$$

但$(u,e_i)_*=a(u,e_i)$，而u是（A）的广义解，所以对$\forall e_i\in H_*(\Omega)=H_0{}^1(\Omega)$，有

$$a(u,e_i)=(f,e_i)=\int_\Omega fe_i dx$$

于是我们得到

定理6 设条件1）2）3）4）成立，又函数$w(x)$满足条件（5），则Dirichlet问题（A）的广义解$u(x)$有级数展开式

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_\Omega fe_i dx\right)e_i(x) \tag{14}$$

附带说一下近似解及其误差估计。

取

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega fe_i dx\right)e_i$$

作为（A）的近似解。由Parseval等式得

$$\|u\|_*{}^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_\Omega fe_i dx\right|^2$$

及

$$\|u-u_n\|_*=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\int_\Omega fe_i dx\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

显然

$$\|u-u_n\|_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\int_\Omega fe_i dx\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

现在举一个简单例子。对于

$$(B)\quad\begin{cases}-\Delta u=-4 & (\Omega:\ x^2+y^2<1)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

这时，$\partial\Omega$的方程是$1-x^2-y^2=0$。我们就选

$$w(x)=1-x^2-y^2$$

则w(x)满足条件（5）。易见定理6的所有条件均成立，且

$$a_{ij}=\delta_{ij} \qquad b_i\equiv 0\equiv C \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

故$H_*(\Omega)$中的内积为

$$(u,v)_*=a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dxdy$$

现在按Schmidt手续将$P=\{w,wx,wy,\cdots,wx^i,wx^{i-1}y,\cdots,wy^i,\cdots,\}$在$H_*(\Omega)$中标准正交化。作为示范，我们只取近似解

$$u_4=\sum_{i=1}^{4}(u,e_i)_*e_i$$

为此，只写出e_1,e_2,e_3及e 。按Schmidt手续，有

$$e_1=\frac{w}{\|w\|_*}=\frac{1-x^2-y^2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$e_2=\frac{wx-(wx,e_1)_*e_1}{\|wx-(wx,e_1)_*e_1\|_*}=\frac{wx}{\|wx\|_*}=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(1-x^2-y^2)x$$

$$e_3=\frac{wy-(wy,e_1)_*e_1-(wy,e_2)_*e_2}{\|wy-(wy,e_1)_*e_1-(wy,e_2)_*e_2\|}=\frac{wy}{\|wy\|_*}=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(1-x^2-y^2)y$$

$$e_4=\frac{wx^2-\sum\limits_{i=1}^{3}(wx^2,e_i)_*e_i}{\|wx^2-\sum\limits_{i=1}^{3}(wx^2,e_i)_*e_i\|_*}=\frac{2.22834}{\sqrt{\pi}}(1-x^2-y^2)(x^2-\frac{1}{6})$$

又

$$\int_\Omega fe_i dxdy=0 \qquad (i=2,3,4)$$

于是

$$u_4=u_1=\left(\int_\Omega fe_1dxdy\right)e_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2-y^2)\int_\Omega(-4)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2-y^2)dxdy$$
$$=x^2+y^2-1$$

可以验证，这u_1就是（B）的精确解。所以，对此简单问题（B）而言，我们只取了级数展开式（14）中的第一项，就得到了精确解。

参 考 文 献

〔Ⅰ〕Л.В.Канторович, В.N.Крыдов, “Приближенные methoды высшего анализа”, изд.4.m, —л.1952.

〔Ⅱ〕Lions J.L. “Mageneous Boundary Value Problems and Applications”, Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ, Springer—Verlag, Berlin, 1972, 1973.

〔Ⅲ〕F.Treves, “Basic Linear Partial Differential Eguations”, Academic Press, Inc. 1975.

〔Ⅳ〕齐民友·线性偏微分算子引论（上）·北京：科学出版社，1986

〔Ⅴ〕王耀东·偏微分方程的L^2理论·北京：北京大学出版社，1989

〔Ⅵ〕吉田耕作·泛函分析·程其襄译，上海：上海科技出版社，1962

One kind of Series Expansions for Generalized Solutions of Linear Elliptic Partical Differential Equations

Liu Shijun

ABSTRACT

This article propose a new series expansion to generalized solutions of Dirichlet problems of Linear elliptic differential equations. At first, we make a complete orthonormal set in space $H_0(\Omega)$, then the series expansion (14) is found. In many cases, the amount of work in this method may be less than it in other traditional ways.