关于线性陀螺保守系统的不稳定性

圣 小 珍

（建筑工程系）

摘　　要

本文研究线性陀螺保守系统$\ddot{x}+G\dot{x}+Kx=0$的不稳定性，得出：在K负定且K为偶数阶的情形下，如果存在负实数ε，使$K-\frac{1}{4}G^2+\varepsilon I-\frac{\varepsilon}{4}GK^{-1}G$负定，则系统是不稳定的。文中说明了，该准则包含Hagedorn的不稳性判别准则。

引　　言

陀螺保守系统

$$\ddot{x}+G\dot{x}+Kx=0 \qquad (1)$$

（$x\in R^N$，N为正整数，$G^T=-G$，$K^T=K$为N×N阶方阵）是一类重要的力学系统，许多实际问题，如旋转轴的振动及流体输运管道的振动[1]，均可归为这类系统。因此，研究其稳定性或不稳定性具有重要意义。我们在〔2〕中研究了（1）的稳定性，建立了一个有效的判别准则。本文讨论它的不稳定性。我们利用李亚普若夫不稳定性定理得到了一个准则，并且证明了，由这个准则所决定的不稳定参数区一定不小于（一般是大于）由Hagdorn[3]准则所决定的不稳定参数区。

一、引理

引理1，设$T_1^T=T_1$，$T_3^T=T_3$，T_2均为N×N阶实方阵，则矩阵

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2^T & T_3 \end{pmatrix}$$

本文于1990年7月2日收到

为负定的充要条件是$Q_1=T_1$和$Q_2=T_3-T_2^TT_1^{-1}T_2$均为负定。其证明见〔2〕。

引理2[4]（李亚普若夫不稳定性定理），如果能找到函数$V(x,\ \dot{x})$，使得由方程(1)所构成的全导数$\dot{V}$是定号的，而V本身不是与$\dot{V}$的正负号相反的常号函数，则(1)是不稳定的。

二、判别准则

定理：如果存在实数ε，使得矩阵

$$Q_1=K^2+\varepsilon K>0\ \text{（即}Q_1\text{正定）}\qquad (2)$$

$$Q_2=K-\frac{1}{4}G^2+\varepsilon I-\frac{\varepsilon}{4}GK^{-1}G<0\qquad (3)$$

则陀螺保守系统（1）是不稳定的，其中I为N×N阶单位矩阵。

证明：取

$$V=x^T(K+\varepsilon I)\dot{x}$$

因此，V是一个变号函数，V关于（1）的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\dot{x}^T(K+\varepsilon I)\dot{x}+x^T(K+\varepsilon I)\ddot{x}\\&=\dot{x}^T(K+\varepsilon I)\dot{x}+x^T(K+\varepsilon I)(-G\dot{x}-Kx)\\&=-x^T(K^2+\varepsilon K)x-x^T(KG+\varepsilon G)\dot{x}+\dot{x}^T(K+\varepsilon I)\dot{x}\\&=(x^T\quad \dot{x}^T)\begin{pmatrix}-(K^2+\varepsilon K) & -\frac{1}{2}(KG+\varepsilon G)\\ -\frac{1}{2}(KG+\varepsilon G)^T & K+\varepsilon I\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ \dot{x}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

因此，如果

$$-Q_1=-(K^2+\varepsilon K)<0$$

即

$$Q_1=K^2+\varepsilon K>0\qquad (2)$$

及

$$\begin{aligned}Q_2&=K+\varepsilon I+\tfrac{1}{4}(KG+\varepsilon G)^T(K^2+\varepsilon K)^{-1}(KG+\varepsilon G)\quad (*)\\&=K+\varepsilon I-\tfrac{1}{4}G(K+\varepsilon I)(K+\varepsilon I)^{-1}K^{-1}(KG+\varepsilon G)\\&=K+\varepsilon I-\tfrac{1}{4}G(G+\varepsilon K^{-1}G)\\&=K-\tfrac{1}{4}G^2+\varepsilon I-\frac{\varepsilon}{4}GK^{-1}G<0\qquad (3)\end{aligned}$$

则由引理1知$\dot{V}$负定。由于V变号，故由引理2知，（1）是不稳定的。证毕。

现在我们对定理进行讨论。

1、在（2）（3）中令$\varepsilon=0$，这时$Q_1=K^2$为正定（只要K非奇异），$Q_2=K-\frac{1}{4}G^2$，即只要$K-\frac{1}{4}G^2<0$，系统（1）便是不稳定的，这正是Hagedorn导出的判别准则。

2、设Hagedorn的条件满足，即设

$$K-\tfrac{1}{4}G^2<0\qquad (4)$$

又取$\varepsilon<0$，由（4）知K负定，从而Q_1一定正定，即（2）一定成立。（4）等价于（设

G非奇异）

$$(G^{-1})^T K (G^{-1}) + \frac{1}{4} I < 0$$

由此不难推出（注意K为负定）

$$-GK^{-1}G + 4I > 0 \tag{5}$$

上式两边同乘 ε（<0）有

$$-\varepsilon GK^{-1}G + 4\varepsilon I < 0$$

即

$$\varepsilon I - \frac{\varepsilon}{4} GK^{-1}G < 0 \tag{6}$$

由（4）（6）知$Q_2 < 0$，即式（3）成立，这就是说，当取 $\varepsilon < 0$时，由条件（2）（3）决定的不稳定参数区一定不小于由（4）决定的不稳定参数区。对G奇异的情形，这个结论依然成立。

3、定理只适应于K<0的情形，这是该定理的不足。事实上，当K>0时，系统（1）一定稳定[5]。当K变号或常号（即K有零特征根）时，如果$Q_1 = K^2 + \varepsilon K > 0$，则$Q_2$一定不会负定。否则由式（*）有

$$Q_2 = K + \varepsilon I + \frac{1}{4}(KG + \varepsilon G)^T (K^2 + \varepsilon K)^{-1} (KG + \varepsilon G) < 0$$

由于$\frac{1}{4}(KG + \varepsilon G)^T (K^2 + \varepsilon K)^{-1} (KG + \varepsilon G) \geqslant 0$，故$K + \varepsilon I < 0$，又由于K变号或常号故$Q_1 = K^2 + \varepsilon K = K(K + \varepsilon I)$不可能是正定的。矛盾。

由于K<0且K是奇数阶时，系统（1）一定不稳定[5]，我们用该定理判别当K<0且K为偶数阶时系统（1）的不稳定性。

4、设K<0，则当$\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}\lambda_{max}(-G^2)$时，由(2)(3)确定的不稳定区不及由 Hagedorn 准则确定的不稳定性区大。此处 $\lambda_{max}(-G^2)$表示$-G^2$的最大特征值。事实上由（2）有$K + \varepsilon I < 0$，因此$K - \frac{1}{4}G^2 \leqslant K + \frac{1}{4}\lambda_{max}(-G^2) < K + \varepsilon I < 0$。

5、算例及以上讨论使我们确信，$\varepsilon > 0$得不稳定区不及$\varepsilon < 0$得的不稳定区大，而当$K < 0$，$\varepsilon < 0$时，(2)自然成立，故只要考虑式(3)。

综上所述，我们得到关于系统(1)的不稳定性判别准则：

设K<0且系统（1）是偶数阶的（即系统的(1)的自由度是偶数），如果存在负实数 ε，使矩阵

$$Q_2 = K - \frac{1}{4}G^2 + \varepsilon I - \frac{\varepsilon}{4}GK^{-1}G < 0,$$

则陀螺保守系统（1）是不稳定的。

注：当K<0，$K - \frac{1}{4}G^2 > 0$时，仿照从（4）到（5）的推理过程可知

$$-\frac{1}{4}GK^{-1}G + I < 0$$

因此，这时要使式（3）成立，ε必须取为大于零，但许多例子表明，当K<0且K为偶数阶时，$K - \frac{1}{4}G^2 > 0$意味着系统（1）稳定。当G^4的特征值全相等时，这个猜想在文〔2〕中得到了证明。对于其它情况，这个猜想是否正确还不得而知。

三、应用举例

令

$$K=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

则

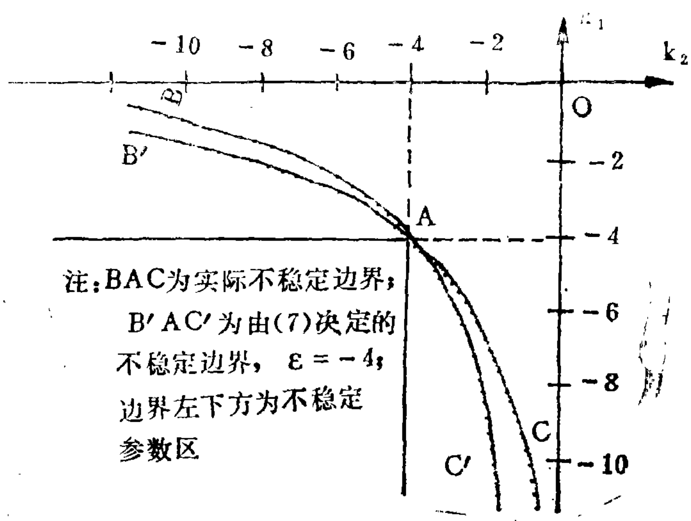
$$Q_1=K^2+\varepsilon K=\begin{pmatrix} k_1^2+\varepsilon k_1 & 0 \\ 0 & k_2^2+\varepsilon k_2 \end{pmatrix}$$

$$Q_2=K-\frac{1}{4}G^2+\varepsilon I-\frac{\varepsilon}{4}GK^{-1}G=\begin{pmatrix} k_1+4+\varepsilon+\dfrac{4\varepsilon}{k_2} & 0 \\ 0 & k_2+4+\varepsilon+\dfrac{4\varepsilon}{k_1} \end{pmatrix}$$

因此，只要

$$\begin{cases} k_1^2+\varepsilon k_1>0 \\ k_2^2+\varepsilon k_2>0 \\ k_1+4+\varepsilon+\dfrac{4\varepsilon}{k_2}<0 \\ k_2+4+\varepsilon+\dfrac{4\varepsilon}{k_1}<0 \end{cases} \tag{7}$$

成立，系统（1）便是不稳定的，研究$K<0$即k_1、$k_2<0$的情况，由（7）我们可画出以k_1、k_2为参数的不稳定参数区。取$\varepsilon=-4$，依准则，这时只须考虑(7)的后二式。从图看出，由（7）决定的不稳定参数区不但包含由Hagedorn准则所决定的不稳定参数区（$k_1<-4, k_2<-4$），而且与实际的不稳定区十分接近。但取$\varepsilon>0$时，由（7）决定的不稳定参数区甚至还没有由Hagedorn准则决定的不稳定区大。



四、结　　语

本文针对K＜0这一特殊情况给出了关于陀螺保守系统不稳定的一个判别准则，该准则不但包含Hagedorn准则，而且如算例表明的那样，当适当取定ε后，可由该准则得到与实际不稳定区十分接近的不稳定参数区。经验表明，为得到尽可能大的不稳定参数区，ε应在$-\frac{1}{4}\lambda_{max}$到$-\frac{1}{4}\lambda_{min}$之间取值，此处$\lambda_{max}$，$\lambda_{min}$分别为$-G^2$的最大和最小特征值。至于当K变号且K具有偶数个负特征根时，如何建立（1）的不稳定判别准则，有待于进一步的研究。

参　考　文　献

〔1〕Husryin K, Vibrations and Stability of Miltiple Parameters Systems, Noordholl International Publishing (1978)

(中译本，张文译·上海科学技术文献出版社(1984))

〔2〕圣小珍·关于线性陀螺保守系统的稳定性·华东交通大学学报，1990；(1)：1

〔3〕Hagedorn P, Über die instabilität konservativer systeme mit gyroskopischen kräften.Arch.Rat.Mech.Anal.1975, No.58.P1—9.

〔4〕舒仲周·运动稳定性·四川：西南交通大学出版社，(1989)：57

〔5〕舒仲周·运动稳定性·四川：西南交通大学出版社，1989：163

On the Instability of Linear Conservative Gyroscopic systems

Sheng xiaozhen

ABSTRACT

In this paper, we study the instability of a linear conservative gyroscopic system described by $\ddot{x}+G\dot{x}+Kx=0$ and assert that,if there exists a negative real number ε,such that $K-\frac{1}{4}G^2+\varepsilon I-\frac{\varepsilon}{4}GK^{-1}G$ is negative definite,then the conservative gyroscopic system with K negative definite and of even rank is unstable it is proved and illustrated that,this criterion contain Hagedorn one.